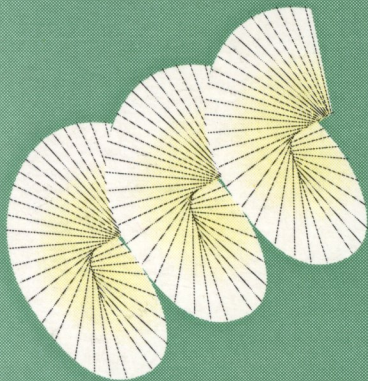
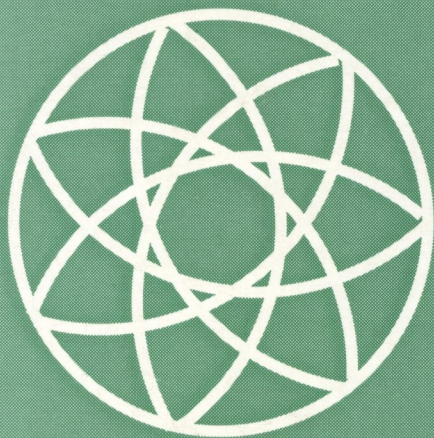




Jan Stankiewicz
Katarzyna Wilczek

Algebra z geometrią

Teoria, przykłady, zadania



**Matematyka
dla studentów
Politechniki Rzeszowskiej**

ISBN 83-7199-155-X

Jan Stankiewicz
Katarzyna Wilczek

ZA DARMO NA

WWW.EBOOKGIGS.COM

Algebra z geometrią

Teoria, przykłady, zadania

*Matematyka dla studentów
Politechniki Rzeszowskiej*



Wydano za zgodą Rektora

Opiniodawca

dr hab. Leopold KOCZAN, prof. PL

Redaktor

Genowefa SPÓLNIK

Redaktor techniczny

Anna MAZUR

Autor logo na okładce

Stanisława DUDA

Druk wykonano z matryc dostarczonych przez autorów

Skrypt uczelniany dla studentów Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa
oraz Wydziału Elektrycznego do wykładów z przedmiotu "matematyka"

Algebra liniowa

Układy równań

Macierze

Geometria analityczna

Liczby zespolone

ISBN 83-7199-155-X

Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej

ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

Nakład 500 + 35 egz. Ark. wyd. 17,38. Ark. druk. 16,25. Papier offset. kl. III 70g B1.

Oddano do druku we wrześniu 2000 r. Wydrukowano w październiku 2000 r.

Zakład Poligrafii Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

Zam. nr 65/2000

Spis treści

Wstęp	7
1 Elementy logiki	9
1.1 Rachunek zdań	9
1.2 Dedukcyjna struktura matematyki	12
1.3 Zbiory, podstawowe oznaczenia	16
1.4 Iloczyn kartezjański zbiorów	24
1.5 Relacje i odwzorowania	26
1.6 Zadania	36
2 Funkcje zmiennej rzeczywistej	43
2.1 Uwagi ogólne	43
2.2 Przegląd funkcji elementarnych	48
2.2.1 Funkcja stała	48
2.2.2 Funkcja potęgowa	49
2.2.3 Funkcja wielomianowa	50
2.2.4 Funkcja wymierna	51
2.2.5 Funkcja wykładnicza	54
2.2.6 Funkcja logarytmiczna	55
2.2.7 Funkcje trygonometryczne	55
2.3 Funkcje kołowe (cyklometryczne)	59
2.4 Funkcje hiperboliczne	60
2.5 Inne przykłady funkcji	63
2.6 Zadania	66
3 Struktury algebraiczne	73
3.1 Działania w zbiorach	73
3.2 Grupa	77
3.3 Izomorfizm grup	78
3.4 Ciało	82
3.5 Zadania	84

4	Działania na liczbach zespolonych	89
4.1	Liczby zespolone	89
4.1.1	Ciało liczb zespolonych	89
4.1.2	Postać kartezjańska liczby zespolonej	91
4.1.3	Postać trygonometryczna liczby zespolonej	92
4.1.4	Postać wykładnicza liczby zespolonej	95
4.2	Plaszczyzna zespolona	96
4.3	Pierwiastkowanie liczb zespolonych	97
4.4	Wielomiany zmiennej zespolonej	100
4.5	Zadania	103
5	Przestrzenie wektorowe	107
5.1	Przestrzeń liniowa	107
5.2	Liniowa zależność i niezależność wektorów	108
5.3	Przestrzeń Euklidesa	113
5.4	Zadania	117
6	Macierze i wyznaczniki	121
6.1	Macierze, działania na macierzach	121
6.2	Wyznacznik macierzy kwadratowej	125
6.2.1	Obliczanie wyznacznika bezpośrednio z definicji	125
6.2.2	Obliczanie wyznacznika regułą Laplace'a	127
6.3	Rząd macierzy	132
6.4	Macierz odwrotna	134
6.5	Zadania	136
7	Układy równań liniowych	143
7.1	Podstawowe wiadomości	143
7.2	Układ n równań o n niewiadomych	144
7.3	Badanie układu m równań o n niewiadomych	146
7.4	Układy równań liniowych jednorodnych	151
7.5	Zadania	152
8	Geometria analityczna w przestrzeni	157
8.1	Wektory w układzie współrzędnych	157
8.2	Niekartezjańskie układy współrzędnych	163
8.2.1	Współrzędne sferyczne	164
8.2.2	Współrzędne walcowe (cylindryczne)	165
8.3	Krzywe stożkowe na płaszczyźnie	166
8.4	Przykłady innych krzywych na płaszczyźnie	169
8.5	Równanie płaszczyzny	172
8.6	Prosta w przestrzeni	174
8.7	Wzajemne położenia prostych i płaszczyzn	176
8.7.1	Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn	176
8.7.2	Wzajemne położenie dwóch prostych	177
8.7.3	Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny	178
8.7.4	Pęk płaszczyzn	180

8.8	Odległości w przestrzeni	181
8.8.1	Odległość dwóch punktów	181
8.8.2	Odległość punktu od płaszczyzny	181
8.8.3	Odległość płaszczyzn równoległych	182
8.8.4	Odległość punktu od prostej	182
8.8.5	Odległość prostych równoległych	183
8.8.6	Odległość prostych skośnych	183
8.9	Powierzchnie drugiego stopnia	184
8.9.1	Równanie powierzchni kulistej (sfery)	184
8.9.2	Okrąg w przestrzeni	186
8.9.3	Powierzchnie obrotowe	188
8.9.4	Powierzchnie prostokątne	191
8.9.5	Kwadryki	193
8.10	Przykłady zadań	195
8.11	Zadania	202
9	Elementy topologii	211
9.1	Przestrzenie metryczne	211
9.2	Przestrzenie unormowane	214
9.3	Przestrzeń topologiczna	215
9.4	Zbiory zwarte i spójne w przestrzeni metrycznej	221
9.5	Zadania	225
10	Odpowiedzi	229
10.1	Elementy logiki	229
10.2	Funkcje zmiennej rzeczywistej	235
10.3	Elementy algebry	240
10.4	Działania na liczbach zespolonych	241
10.5	Przestrzenie wektorowe	244
10.6	Macierze, działania na macierzach	245
10.7	Układy równań liniowych	247
10.8	Geometria analityczna w przestrzeni	248
10.9	Elementy topologii	251
Literatura		253
Indeks		255

■ www.ebookgigs.com ■



■ www.ebookgigs.com ■

■ prasa za darmo w PDF ■

■ uwalniamy pismo od papieru ■

Wstęp

Książka "ALGEBRA Z GEOMETRIĄ, teoria, przykłady, zadania" jest wynikiem doświadczeń wielu lat prowadzenia przez nas wykładów i ćwiczeń z matematyki dla studentów pierwszych lat Politechniki Rzeszowskiej.

Z uwagi na bardzo duże zróżnicowanie w przygotowaniu absolwentów różnych szkół (różne profile w liceach ogólnokształcących oraz różne kierunki w technikach), książka zawiera, ujęte w skrócie, niektóre partie materiału będącego w programie szkół średnich, których znajomość jest konieczna do zrozumienia przedstawionych w tym opracowaniu zagadnień Algebry i Geometrii (Rozdział 1, Rozdział 2 oraz części 8.1 - 8.3 Rozdziału 8).

Mała i zróżnicowana, w zależności od wydziału, liczba godzin przeznaczona na realizację tych zagadnień powoduje, że niektóre tematy studenci muszą poznawać samodzielnie. Z tego względu książka zawiera nie tylko potrzebną teorię, zadania, lecz i dużą liczbę przykładów. Podane przykłady mają dwojaki charakter. Część z nich jest ilustracją omawianych zagadnień, inne mają postać rozwiązanych zadań.

Mamy nadzieję, że tak przedstawiona teoria oraz propozycje zadań i przykładów będą przydatne zarówno dla studentów, jak i prowadzących wykłady oraz ćwiczenia na pierwszych latach wyższych uczelni technicznych.

Książka zawiera szczegółowy Spis treści oraz Indeks używanych terminów, co pozwoli czytelnikom na szybkie odnalezienie potrzebnych wiadomości. Załączona literatura zaś pozwoli na odnalezienie innych książek z tego tematu.

Autorzy dziękują recenzentowi Panu dr. hab. Leopoldowi Koczanowi za uwagi merytoryczne oraz redaktorom Oficyny Wydawniczej Politechniki Rzeszowskiej za uwagi i wskazówki poprawiające jakość redakcji tego podręcznika.

Czytelników prosimy o przekazywanie uwag i sugestii w sprawie zauważonych usterek oraz ewentualnej zmiany zakresu treści w następnym wydaniu.

Jan Stankiewicz, jan.stankiewicz@man.rzeszow.pl

Katarzyna Wilczek, wilczek@man.rzeszow.pl

Rozdział 1

Elementy logiki

1.1 Rachunek zdań

Zdaniem w matematyce nazywamy tylko takie zdanie w sensie gramatycznym, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy fałszywe.

Przyjmujemy, że zdanie prawdziwe ma **wartość logiczną** równą 1, zdanie fałszywe zaś wartość logiczną równą 0. Zdania proste, zwane dalej **zmiennymi zdaniowymi**, oznaczamy literami p, q, r .

Zdanie złożone tworzymy ze zmiennych zdaniowych za pomocą **funktorów zdaniotwórczych**, które oznaczamy odpowiednimi symbolami.

Zdanie „nieprawda, że p ” nazywamy **zaprzeczeniem** zdania p lub **negacją** zdania p i oznaczamy $\sim p$. Zdanie $\sim p$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie p jest fałszywe.

Zdanie „ p lub q ” nazywamy **alternatywą** zdań p, q i oznaczamy $p \vee q$. Alternatywa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

Zdanie „ p i q ” nazywamy **koniunkcją** zdań p, q i oznaczamy $p \wedge q$. Koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są prawdziwe.

Zdanie „jeżeli p , to q ” nazywamy **implikacją** o poprzedniku p oraz następniku q i oznaczamy $p \Rightarrow q$. Jest ono fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zdanie $p \Rightarrow q$ można odczytać: „ p jest **warunkiem wystarczającym** dla q ” lub „ q jest **warunkiem koniecznym** dla p ”, „z p wynika q ”, „ p implikuje q ”.

Zdanie $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, oznaczane krócej $p \Leftrightarrow q$, nazywamy **równoważnością** i odczytujemy „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”, lub „ q jest **warunkiem koniecznym** i

Tab. 1.1.1.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

wystarczającym dla p ". Równoważność jest prawdziwa, gdy zdania p, q mają taką samą wartość logiczną.

Treść wymienionych określeń zawiera Tabela 1.1.1.

Wykorzystując zmienne zdaniowe, funktory oraz nawiasy, tworzymy wyrażenia rachunku zdań zwane **schematami zdaniowymi**. Na przykład ze schematu: $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$, podstawiając za p dowolne zdanie prawdziwe i za q dowolne zdanie prawdziwe, to znaczy $p = 1$ i $q = 1$, otrzymujemy zdanie prawdziwe, podstawiając zaś w miejsce p zdanie prawdziwe, $p = 1$, a w miejsce q zdanie fałszywe, $q = 0$, otrzymujemy zdanie fałszywe.

Szczególne znaczenie mają takie schematy zdaniowe, które pozostają zdaniem prawdziwym niezależnie od tego, czy w miejsce zmiennych zdaniowych podstawimy zdanie prawdziwe czy fałszywe. Takie schematy zdaniowe nazywamy **prawami rachunku zdań** albo **tautologiami**.

Prawdziwość tautologii wykazujemy metodą **zero-jedynkową**, opartą na Tabeli 1.1.1.

Przykład 1.1.1 Sprawdzić, czy schemat $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ jest tautologią.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Ponieważ w ostatniej kolumnie zawierającej badany schemat występują same 1, więc schemat jest tautologią.

Do najczęściej stosowanych praw rachunku zdań należą:

1. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ – prawo podwójnego przeczenia,
2. $\sim[p \wedge (\sim p)]$ – prawo sprzeczności,
3. $p \vee \sim p$ – prawo wyłączonego środka,

4. $[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ – prawo kontrapozycji,
5. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ – przechodność implikacji,
6. $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \vee (\sim q)]$ – prawo zaprzeczenia implikacji,
7. $[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ oraz $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ – prawa de Morgana.

Czytelnik dla ćwiczenia sprawdzi metodą zero-jedynkową, że wypisane schematy zdaniowe są tautologiami.

Poza zdaniami w matematyce posługujemy się **funkcjami zdaniowymi**.

Definicja 1.1.1 *Funkcją zdaniową jednej zmiennej określoną w dziedzinie X nazywamy takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy zamiast zmiennej podstawimy element zbioru X . Oznaczamy ją $\varphi(x)$.*

Na przykład: „człowiek waży 70 kg” nie jest zdaniem; słowo „człowiek” gra tu rolę zmiennej. Jeśli zastąpimy je nazwiskiem konkretnej osoby, to otrzymamy zdanie, zdanie prawdziwe lub fałszywe.

Niech zmienna x przebiega zbiór X . Zbiór tych i tylko tych elementów zbioru X , które podstawione na miejsce x zamieniają funkcję zdaniową $\varphi(x)$ w zdanie prawdziwe, oznaczamy symbolem

$$\{x \in X : \varphi(x)\}$$

lub $\{x : \varphi(x)\}$, jeśli wiadomo, jaki zbiór przebiega zmienna x .

Niech zmienna x przebiega zbiór X i niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową. Zdanie: „istnieje takie $x \in X$, że $\varphi(x)$ ” zapisujemy krótko

$$\bigvee_{x \in X} \varphi(x) \text{ lub } \bigvee_x \varphi(x) \text{ bądź równoważnie } \exists x \in X \varphi(x) \text{ lub } \exists x \varphi(x).$$

Zdanie „dla każdego $x \in X$ jest $\varphi(x)$ ” zapisujemy

$$\bigwedge_{x \in X} \varphi(x) \text{ lub } \bigwedge_x \varphi(x) \text{ bądź } \forall x \in X \varphi(x) \text{ lub } \forall x \varphi(x).$$

Symbole $\bigvee, \bigwedge, (\exists, \forall)$ użyte w opisanym znaczeniu nazywamy odpowiednio **małym i dużym kwantyfikatorem** lub odpowiednio **kwantyfikatorem szczególnym i ogólnym**.

Przykład 1.1.2 *Zdanie: $\exists x \ x^2 > 5$ jest zdaniem prawdziwym, zdanie $\exists x \ \sin x = 2$ jest zdaniem fałszywym.*

W funkcji zdaniowej może wystąpić także więcej zmiennych. Wtedy, aby ją przemienić w zdanie, potrzeba odpowiednio więcej kwantyfikatorów. Na przykład:

Przykład 1.1.3

$$\begin{aligned}\forall x \exists y 5x + y = 10 &- \text{ zdanie prawdziwe,} \\ \exists y \forall x 5x + y = 10 &- \text{ zdanie fałszywe,} \\ \forall x \varphi(x, y) &- \text{ funkcja zdaniowa zmiennej } y.\end{aligned}$$

Podamy podstawowe własności kwantyfikatorów.

Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową z jedną zmienną, to równoważności

$$\begin{aligned}[\sim \forall x \varphi(x)] &\Leftrightarrow [\exists x \sim \varphi(x)], \\ [\sim \exists x \varphi(x)] &\Leftrightarrow [\forall x \sim \varphi(x)]\end{aligned}$$

wyrażają prawa de Morgana dla kwantyfikatorów.

Jeżeli $\varphi(x, y)$ jest funkcją zdaniową z dwoma zmiennymi, to zachodzą związki

$$\begin{aligned}\exists x \exists y \varphi(x, y) &\Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi(x, y), \\ \forall x \forall y \varphi(x, y) &\Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y), \\ \exists x \forall y \varphi(x, y) &\Rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y).\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

W praktyce stosuje się następującą zasadę: zamiast $\forall x \forall y \varphi(x, y)$ lub $\exists x \exists y \varphi(x, y)$ piszemy $\forall x, y \varphi(x, y)$ albo $\exists x, y \varphi(x, y)$. Oznacza to, że w przypadku dwóch jednakowych kwantyfikatorów ich kolejność jest dowolna, natomiast w przypadku różnych kwantyfikatorów jest możliwa tylko zmiana zawarta w implikacji (1.1.1).

1.2 Dedukcyjna struktura matematyki

W matematyce każda teoria jest oparta na zespole **pojęć pierwotnych**. Wybór pojęć pierwotnych może być różnorodny, np. w geometrii pojęciami pierwotnymi są: punkt, prosta, płaszczyzna, w arytmetyce zaś liczba naturalna.

Prawdy matematyczne formułuje się w **twierdzeniach**. Twierdzenia, które w danej teorii przyjmujemy bez dowodu, jako oczywiste, są zwane **aksjomatami** albo **pewnikami**. Każde twierdzenie matematyczne, które nie zostało zaliczone do aksjomatów, musi być udowodnione. **Dowód** matematyczny opiera się na prawach logiki.

Zespół pojęć pierwotnych możemy rozszerzyć o nowe terminy za pomocą **definicji**. Definicja składa się z dwóch części: określanej i określającej. Uznajemy ją za

poprawną, jeżeli część definiująca, na podstawie pojęć pierwotnych i terminów wprowadzonych wcześniej, precyzuje jednoznacznie człon definiowany i jeżeli dołączenie jej do przyjętych uprzednio aksjomatów oraz definicji nie prowadzi do sprzeczności.

Wprowadzając definicje, którym można nadać postać analityczną, używamy symbolu „:=”, zastępując zwrot „z definicji”.

Przykład 1.2.1 *Mamy definicję: „Zbiorem liczb wymiernych nazywamy zbiór liczb rzeczywistych mających postać $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, $q \neq 0$. Oznaczamy go symbolem $\mathbb{Q}$ ”. Definicję tę można podać równoważnie:*

$$\mathbb{Q} := \{t \in \mathbb{R} : t = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Nauka, w której przyjmuje się bez określenia pojęcia zwane pojęciami pierwotnymi oraz bez dowodu twierdzenia zwane aksjomatami, a następnie każde pojęcie określa się i każde twierdzenie dowodzi się zgodnie z prawami logiki, nazywa się nauką **aksjomatyczno-dedukcyjną**.

Matematyka jest nauką aksjomatyczno-dedukcyjną.

Twierdzenia w matematyce mają jedną z dwóch postaci:

1. Postać implikacji.

Poprzednik implikacji nazywamy **założeniem** (Z), następnik **tezą** (T) twierdzenia, czyli

$$Z \Rightarrow T. \quad (1.2.1)$$

Zarówno założenie, jak i teza mogą być zdaniami złożonymi.

Twierdzeniem **odwrotnym** do twierdzenia (1.2.1) zwanego twierdzeniem **prostym**, nazywamy zdanie

$$T \Rightarrow Z;$$

twierdzeniem **przeciwnym** do twierdzenia prostego nazywamy zdanie

$$\sim Z \Rightarrow \sim T;$$

twierdzeniem **przeciwstawnym** (kontrapozycją) nazywamy zdanie

$$\sim T \Rightarrow \sim Z.$$

Twierdzenie proste oraz przeciwstawne (podobnie jak odwrotne i przeciwne) mają zawsze tę samą wartość logiczną (albo oba są fałszywe, albo oba prawdziwe).

Twierdzenie $Z \Rightarrow T$ możemy wypowiedzieć w formie:

- jeżeli Z to T ,
- z Z wynika T ,
- warunkiem wystarczającym dla T jest Z ,
- warunkiem koniecznym dla Z jest T .

2. Postać równoważności.

Jeżeli prawdziwe jest zarówno twierdzenie proste, jak i odwrotne, to możemy wypowiedzieć jedno twierdzenie w postaci równoważności:

$$T_1 \Leftrightarrow T_2.$$

Zarówno T_1 (teza pierwsza), jak i T_2 (teza druga) mogą być zdaniami złożonymi.

Twierdzenie takie wypowiadamy:

- T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy T_2 ,
- T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy T_1 ,
- warunkiem koniecznym i wystarczającym dla T_1 jest T_2 ,
- warunkiem koniecznym i wystarczającym dla T_2 jest T_1 ,
- jeżeli T_1 , to T_2 i jeżeli T_2 , to T_1 .

Twierdzenie może mieć też bardziej skomplikowaną postać, np.

$$Z \Rightarrow (T_1 \Leftrightarrow T_2).$$

Wówczas Z traktujemy jako założenie do tezy $(T_1 \Leftrightarrow T_2)$.

Dowody matematyczne mają różnorodną budowę. Korzystamy w nich z **reguł wnioskowania**. Reguły wnioskowania, czyli reguły otrzymywania wniosków z przesłanek, muszą być takie, aby od prawdziwych przesłanek prowadziły zawsze do prawdziwych wniosków. Wszystkie one mają następującą postać: jeżeli pewne zdanie lub zdania zostały już uznane za prawdziwe, to wolno też uznać za prawdziwe nowe zdanie, które powstaje z poprzednich przez zastosowanie jednego z praw rachunku zdań.

Na przykład:

$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ – reguła odrywania,

$[(\sim p) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$ – reguła opuszczania alternatywy,

$(p \wedge q) \Rightarrow p$ lub $(p \wedge q) \Rightarrow q$ – reguła opuszczania koniunkcji.

Dowód twierdzenia $p \Rightarrow q$ wypowiedzianego w formie implikacji może przyjmować różną postać, np.:

Dowód wprost – polega na tym, że uważając za prawdziwe wszystkie założenia twierdzenia (poprzednik p implikacji), prowadzimy ciąg rozumowań opartych na uprzednio udowodnionych twierdzeniach i przyjętych aksjomatach, aż dojdziemy do wniosku, że teza (następnik q implikacji) jest prawdziwa.

Dowód nie wprost – polega na wykazaniu, że zaprzeczenie twierdzenia, to znaczy $\sim (p \Rightarrow q)$, jest fałszywe, a więc $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe. W praktyce opierając się na równoważności (tautologii)

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p],$$

należy wykazać, że z założenia p i zaprzeczenia tezy q dochodzimy do zaprzeczenia założenia p .

Inna metoda dowodu twierdzenia postaci $p \Rightarrow q$ polega na udowodnieniu twierdzenia przeciwnego (kontrapozycji), to znaczy $\sim q \Rightarrow \sim p$ (które ma zawsze tę samą wartość logiczną co twierdzenie proste).

W matematyce występują również inne dowody, np. w celu udowodnienia, że zdanie $\forall t \varphi(t)$ jest fałszywe, można posłużyć się metodą **kontrprzykładu**, to znaczy wystarczy znaleźć jedną wartość t_0 z zakresu dziedziny zmiennej t , dla której zdanie $\varphi(t_0)$ jest fałszywe. Odpowiednie prawo de Morgana dowodzi poprawności rozumowania.

Aby dowieść prawdziwości zdania $\varphi(n)$, gdzie n jest zmienną wolną, przebiegającą zbiór liczb naturalnych, można posłużyć się **zasadą indukcji matematycznej** zawartą w schemacie:

$$\{\varphi(n_0) \wedge [\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)]\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \varphi(n),$$

gdzie n_0 jest ustaloną liczbą naturalną.

Każde udowodnione twierdzenie ma następujące zastosowanie wynikające z reguły odrywania: jeżeli w danej sytuacji stwierdzimy prawdziwość założenia p i uznajemy za prawdziwe twierdzenie $p \Rightarrow q$, to również należy uznać za prawdziwe zdanie q (teza).

Twierdzenie, które formułujemy w celu wykorzystania w dowodzie innego twierdzenia, nazywamy często **lematam** – twierdzeniem pomocniczym.

Twierdzenie, które wynika bezpośrednio z udowodnionego lub przedstawionego właśnie twierdzenia, nazywamy **wnioskiem**.

1.3 Zbiory, podstawowe oznaczenia

Jednym z podstawowych pojęć pierwotnych matematyki jest pojęcie **zbioru**. Przyjmujemy następujące oznaczenia i definicje:

$a \in A$ – element a należy do zbioru A ,

$\{a, b, c\}$ – zbiór złożony z elementów a, b, c ,

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych wraz z zerem,

$A := \{a : \varphi(a)\}$ – zbiór elementów a mających własność $\varphi(a)$,

$\mathbb{Z} = \{t : t \in \mathbb{N} \text{ lub } -t \in \mathbb{N} \text{ lub } t = 0\}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q} = \left\{t : t = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ – zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\langle a, b \rangle := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ – przedział właściwy domknięty,

$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ – przedział właściwy otwarty,

$(-\infty, b), (-\infty, b), \langle a, \infty \rangle, (a, \infty)$ – przedziały niewłaściwe,

$\emptyset$ – zbiór pusty – nie zawierający żadnego elementu.

Jeżeli każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B , to mówimy, że A jest **podzbiorem** B lub że A zawiera się w B i oznaczamy $A \subset B$. Relację zawierania nazywamy **inkluzją**. Odpowiada jej następujący zapis logiczny:

$$A \subset B \iff \forall a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Przykład 1.3.1 Dla zbiorów $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\}$ jest spełniona inkluzja $A \subset B$, gdyż $A = \{-2, 2\}$ oraz $-2 \in B$ i $2 \in B$.

Dwa zbiory nazywamy zbiorami **równymi** wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tych samych elementów.

Przykład 1.3.2 Dla zbiorów $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ zachodzi równość $A = B$.

Inkluzja ma tę własność, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi

$$A \subset A, \quad \emptyset \subset A, \quad (A \subset B) \wedge (B \subset A) \iff (A = B).$$

Podzbiorem właściwym zbioru A nazywamy dowolny zbiór B , różny od zbioru pustego i zbioru A , spełniający inkluzję $B \subset A$ (będący podzbiorem zbioru A).

Sumą zbiorów A, B nazywamy zbiór tych elementów, z których każdy jest elementem zbioru A lub zbioru B . Oznaczamy $A \cup B$. Zatem

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Iloczynem lub **przekrojem zbiorów** A, B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B . Oznaczamy $A \cap B$. Zatem

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Mówimy również, że iloczyn $A \cap B$ jest **częścią wspólną** zbiorów A i B .

Zbiory A, B nazywamy zbiorami **rozłącznymi**, jeżeli nie mają wspólnych elementów, to znaczy $A \cap B = \emptyset$.

Zbiór tych wszystkich elementów zbioru A , które nie należą do zbioru B , nazywamy **różnicą zbiorów** A i B i oznaczamy $A \setminus B$. Zatem

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

W rachunku zbiorów mamy również działanie zwane **różnicą symetryczną zbiorów** A i B , oznaczamy je $A \div B$ i definiujemy następująco:

$$A \div B := \{x : x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)\}.$$

Jeżeli A jest podzbiorem B , to możemy rozważać elementy zbioru B , które nie należą do A . Tworzą one **dopełnienie** zbioru A do zbioru B , czyli zbiór C , gdzie

$$C := \{x : x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Przypuśćmy, że wszystkie rozpatrywane zbiory są podzbiorem pewnego stałego zbioru U , który nazywamy **przestrzenią**. Taką przestrzenią jest dla zbiorów liczbowych zbiór liczb rzeczywistych. Każdy rozpatrywany zbiór jest podzbiorem pewnej przestrzeni.

Dopełnienie zbioru A do przestrzeni U , $A \subset U$, oznaczamy A^c i definiujemy:

$$A^c := U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Z definicji działań na zbiorach wynikają następujące własności tych działań:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A,$$

$$\emptyset \cup A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset,$$

$$A \cup B = B \cup A - \text{przemienność dodawania zbiorów},$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C - \text{łączność dodawania zbiorów},$$

$$A \cap B = B \cap A - \text{przemienność mnożenia zbiorów},$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C - \text{łączność mnożenia zbiorów},$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) - \text{rozdzielność mnożenia względem dodawania zbiorów},$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) - \text{rozdzielność dodawania względem mnożenia zbiorów},$$

$$A \cup A^c = U,$$

$$U^c = \emptyset,$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ oraz } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c - \text{prawa de Morgana dla zbiorów}.$$

Pokażemy dla przykładu dowód jednej z tych własności, dowód prawa rozdzielności dodawania względem mnożenia zbiorów, dowód oparty na definicjach działań i na prawach rachunku zdań.

Twierdzenie 1.3.1 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Dowód. Załóżmy, że pewien element x jest elementem zbioru określonego lewą stroną wzoru. Zatem

$$x \in [A \cup (B \cap C)] \Leftrightarrow (x \in A) \vee [x \in (B \cap C)] \Leftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)].$$

Analogicznie, jeżeli x jest elementem zbioru określonego prawą stroną wzoru, to

$$\begin{aligned} x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] &\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \wedge [x \in (A \cup C)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]. \end{aligned}$$

Wprowadzimy oznaczenia występujących zdań prostych:

$$p \Leftrightarrow x \in A, \quad q \Leftrightarrow x \in B, \quad r \Leftrightarrow x \in C.$$

Pozostało zatem wykazać, że schemat rachunku zdań postaci:

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

jest tautologią. Wykonać to można metodą zero-jedynkową (czytnik sprawdzi samodzielnie) i to kończy dowód.

W praktyce często mamy do czynienia z działaniami na większej liczbie zbiorów. Niech $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ będą ustalonymi zbiorami. Wówczas używamy oznaczeń

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^n A_k &:= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n & \text{lub} & \bigcup_n A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \\ \bigcap_{k=1}^n A_k &:= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n & & \bigcap_n A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \end{aligned}$$

i mówimy, odpowiednio, o **skończonej sumie i iloczynie** lub **przeliczalnej sumie i iloczynie zbiorów**.

Niech teraz T będzie danym zbiorem i niech $\{A_t\}_{t \in T}$ oznacza rodzinę zbiorów, to znaczy zbiór, którego elementami są zbiory A_t , $t \in T$. Zapis ten należy rozumieć tak, że każdemu elementowi $t \in T$ jest przyporządkowany dokładnie jeden zbiór A_t .

Przykład 1.3.3 Niech

$$A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = t^2\}, \quad T = \{t : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Każdy ze zbiorów A_t jest okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu t .

Przyjmujemy następujące definicje:

$$\begin{aligned} \bigcup_{t \in T} A_t &:= \{x : \exists t \in T \ x \in A_t\}, \\ \bigcap_{t \in T} A_t &:= \{x : \forall t \in T \ x \in A_t\} \end{aligned}$$

dla **sumy i iloczynu mnogościowego** zbiorów.

Innymi słowy: suma $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest zbiorem złożonym z tych i tylko tych elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A_t , iloczyn $\bigcap_{t \in T} A_t$ składa się tylko z tych elementów, które znajdują się we wszystkich zbiorach A_t , $t \in T$. W Przykładzie 1.3.3 zbiór wszystkich okręgów wyznacza koło domknięte o środku w początku układu i promieniu 1, a więc $\bigcup_{t \in T} A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ponieważ zbiory A_t odpowiadające różnym wartościom t są rozłączne, więc $\bigcap_{t \in T} A_t = \emptyset$.

W przypadku, gdy $T = \{1, 2, \dots, n\}$, ma miejsce równoważność oznaczeń

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{k=1}^n A_k,$$

gdy zaś $T = \mathbb{N}$, to piszemy odpowiednio $\bigcup_n A_n$ lub $\bigcap_n A_n$.

Przykład 1.3.4 Znaleźć sumę i iloczyn przeliczalny zbiorów A_n , jeśli

$$A_n = \{x : 0 \leq x \leq n-1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Najpierw zapiszemy kilka zbiorów A_n :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0\}, \\ A_2 &= \{x : 0 \leq x \leq 1\}, \\ A_3 &= \{x : 0 \leq x \leq 2\} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Zbiory A_n spełniają inkluzję: $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. Zatem

$$\bigcup_n A_n = \{x : x \geq 0\}, \quad \bigcap_n A_n = \{0\}.$$

Obecnie wyjaśnimy pojęcia: moc zbioru, zbiory przeliczalne i zbiory nieprzeliczalne.

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne**, jeżeli każdemu elementowi zbioru A odpowiada dokładnie jeden element zbioru B , i odwrotnie.

Przykład 1.3.5 Zbiór $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem P wszystkich liczb naturalnych parzystych. Każdej liczbie naturalnej n odpowiada dokładnie jedna liczba naturalna parzysta $2n$, i odwrotnie: każdej liczbie naturalnej parzystej m odpowiada dokładnie jedna liczba naturalna $\frac{1}{2}m$.

Zbiory dzielimy na zbiory skończone i zbiory nieskończone.

Zbiór A nazywamy **zbiorem skończonym**, gdy istnieje taka liczba naturalna n , że jest on równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$. Zbiór, który nie jest skończony, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

Liczebnością lub **mocą** zbioru skończonego A nazywamy liczbę elementów należących do tego zbioru i oznaczamy $n(A)$ lub $\overline{A}$.

Przykład 1.3.6 Dany jest zbiór $A = \{-3, 0, \sqrt{7}, \frac{3}{8}\}$. Dla tego zbioru $n(A) = 4$.

Zbiory skończone lub zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywamy **zbiorami przeliczalnymi**. Inaczej mówiąc, zbiór przeliczalny jest to taki zbiór, którego elementy można ponumerować. Oczywiście, każde dwa zbiory przeliczalne nieskończone są równej mocy.

Moc zbiorów przeliczalnych nieskończonych oznaczamy symbolem $\aleph_0$, zwanym **alef zero**;

$$n(\mathbb{N}) = \overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0.$$

Z definicji zbioru przeliczalnego wynika, że każdy ciąg nieskończony

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

jest zbiorem przeliczalnym.

Można wykazać, że prawdziwe są następujące własności:

1. Każdy zbiór nieskończony zawiera zbiór przeliczalny.
2. Dowolny nieskończony podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.
3. Suma dowolnej skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.
4. Suma przeliczalnej liczby zbiorów skończonych jest zbiorem przeliczalnym.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód drugiej z wymienionych własności.

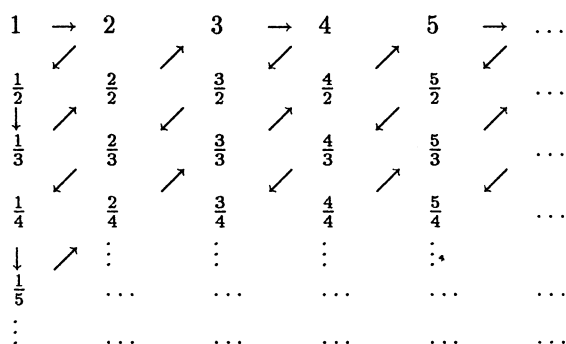
Jeżeli X jest zbiorem przeliczalnym, to jego elementy mogą być ponumerowane, zatem $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Przypuśćmy, że Y jest nieskończonym podzbiorem zbioru X . Oznaczmy przez y_1 pierwszy element podzbioru Y zawierającego się w zbiorze $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, tj. element $x_n \in X$, który należy do podzbioru i ma najmniejszy numer n_0 , czyli $y_1 = x_{n_0}$. Przez y_2 oznaczmy element x_n , który należy do zbioru Y i ma najmniejszy numer spośród numerów $n > n_0$, i tak dalej.

Każdy element zbioru Y występuje w ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, zatem po skończonej liczbie m kroków możemy go oznaczyć y_m . Ponieważ zbiór Y jest nieskończony, więc wskaźnik m przyjmuje wartości $1, 2, \dots$. W ten sposób wszystkie elementy podzbioru Y okażą się ponumerowane, czyli podzbiór Y jest zbiorem przeliczalnym.

Przykład 1.3.7 *Zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny. Jego elementy można ustawić w ciąg*

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots,$$

otrzymany ze schematu:



W schemacie tym nie ustawiono liczby 0 oraz liczb wymiernych ujemnych, więc dołączymy je jak wskazano w ciągu, ponadto wybierając liczby ze schematu, pomijamy te, które już uprzednio wystąpiły. Każda liczba wymierna występuje na odpowiednim miejscu tego schematu. Zatem wszystkie liczby wymierne dają się ustawić w ciąg, czyli można je ponumerować. Wynika stąd, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, ma moc $\aleph_0$.

Pozostaje pytanie, czy istnieją zbiory nieskończone, które nie są przeliczalne? Okazuje się, że takie zbiory istnieją, należy do nich zbiór liczb rzeczywistych.

Moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy **continuum** i oznaczamy $\mathcal{C}$.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorami mocy continuum.

Przykład 1.3.8 Każdy przedział właściwy jest zbiorem mocy continuum, np. przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Każdej liczbie $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ można przyporządkować liczbę rzeczywistą k według wzoru $k = \tan t$. Gdy t przebiegnie wszystkie wartości z przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wówczas k przyjmie wszystkie wartości rzeczywiste. Każdej wartości $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ odpowiada dokładnie jedna wartość $k \in \mathbb{R}$, i odwrotnie, stąd

$$n\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}.$$

Liczby, w programie szkolnym, są wprowadzane zgodnie z historycznym rozwojem tego pojęcia. Najpierw uczeń zapoznaje się z liczbami naturalnymi i działaniami na nich, następnie z liczbami wymiernymi dodatnimi jako uporządkowanymi parami liczb naturalnych, potem z liczbami ujemnymi. Aby zapewnić sobie wykonalność pewnych prostych działań, np. rozwiązalność równania $x^2 = 2$, rozszerzamy poznane zbiory,

tworząc liczby niewymierne. Liczby wymierne i niewymierne tworzą razem zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

Obecnie zdefiniujemy zbiór $\mathbb{R}$ w sposób aksjomatyczny.

Definicja 1.3.1 *Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy, w którym są określone dwa działania (dodawanie $+$ i mnożenie $\cdot$) oraz relacja mniejszości, przy czym mają być spełnione następujące aksjomaty:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ (x + y) \in \mathbb{R}$ – zbiór $\mathbb{R}$ jest zamknięty względem dodawania,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x + y = y + x$ – dodawanie jest przemienne,
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x + (y + z) = (x + y) + z$ – dodawanie jest łączne,
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ a + x = b$ – aksjomat o istnieniu różnicy $x = b - a$,
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x \cdot y \in \mathbb{R}$ – zbiór $\mathbb{R}$ jest zamknięty względem mnożenia,
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x \cdot y = y \cdot x$ – mnożenie jest przemienne,
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ – mnożenie jest łączne,
8. $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \ \exists x \in \mathbb{R} \ a \cdot x = b$ – aksjomat o istnieniu ilorazu $x = \frac{b}{a}$,
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ – mnożenie jest rozdzielne względem dodawania,
10. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ – zbiór $\mathbb{R}$ jest uporządkowany,
11. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ – uporządkowanie jest liniowe,
12. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x < y \Rightarrow x + z < y + z$ – monotoniczność dodawania,
13. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ – monotoniczność mnożenia.
14. Zbiór $\mathbb{R}$ jest ciągły, to znaczy jeżeli dokonamy podziału zbioru $\mathbb{R}$ na dwa niepuste zbiory A i B , gdzie $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$ i $\forall a \in A \ \forall b \in B \ a < b$, to albo w zbiorze A istnieje element największy, albo w zbiorze B istnieje element najmniejszy.

Można udowodnić na podstawie tych aksjomatów, że różnica $b - a$ oraz iloraz $\frac{b}{a}$ są określone jednoznacznie.

Definicja 1.3.2 *Mówimy, że zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry, jeżeli*

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \quad x \leq M.$$

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \quad m \leq x.$$

Liczby M i m nazywamy, odpowiednio, liczbami ograniczającymi zbiór od góry i od dołu (ograniczeniami).

Jeżeli zbiór X jest ograniczony od dołu i od góry, to nazywamy go **zbiorem ograniczonym**.

Kresem dolnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę m , która jest największą z liczb ograniczających zbiór od dołu, to znaczy:

$$(\forall x \in X \ m \leq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in X \ x_1 < m + \varepsilon).$$

Oznaczamy: $m = \inf X$ (czytaj: *infimum*).

Kresem górnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę M , która jest najmniejsza z liczb ograniczających zbiór od góry, to znaczy

$$(\forall x \in X \ x \leq M) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in X \ M - \varepsilon < x_1).$$

Oznaczamy: $M = \sup X$ (czytaj: *supremum*).

Oczywiście nie każdy zbiór ma kresy, np. zbiór liczb naturalnych nie posiada kresu górnego. Ponadto, jeżeli dany zbiór ma kres dolny (górny), to może on do tego zbioru należeć lub nie.

Przykład 1.3.9 Dany jest zbiór $A = \{y : y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, $\inf A = 0 \notin A$, $\sup A$ nie istnieje.

Z aksjomatu ciągłości zbioru $\mathbb{R}$ wynika następujące

Twierdzenie 1.3.2 Każdy niepusty zbiór Z liczb rzeczywistych ograniczony od góry posiada kres górny. Każdy niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ ograniczony od dołu ma kres dolny.

Odnotujemy na koniec własność zbioru $\mathbb{R}$ zwaną **gęstością zbioru $\mathbb{R}$** , wynikającą również z aksjomatu ciągłości, to znaczy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \exists z \in \mathbb{R} \ (x < y) \Rightarrow (x < z < y). \quad (1.3.1)$$

1.4 Iloczyn kartezjański zbiorów

Niech a, b oznaczają dowolne elementy. Symbolem (a, b) będziemy oznaczać **parę uporządkowaną**, gdzie a nazywamy **poprzednikiem**, b zaś **następnikiem pary**.

Dwie pary (a, b) i (c, d) uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne poprzedniki i identyczne następniki. Własność uporządkowania par oznacza, że

$$[(a, b) = (b, a)] \Leftrightarrow (a = b).$$

Definicja 1.4.1 *Zbiór wszystkich uporządkowanych par (a, b) , których poprzednik należy do zbioru A , następnik zaś do zbioru B , nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B i oznaczamy $A \times B$. Tak więc*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Przykład 1.4.1 *Niech*

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 9\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{0, 1\}.$$

Wówczas

$$A \times B = \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}.$$

Pojęcie iloczynu kartezjańskiego można rozszerzyć na większą liczbę zbiorów. Na przykład dla trzech zbiorów A, B, C jest

$$\begin{aligned} A \times B \times C &:= (A \times B) \times C = \{((a, b), c) : (a, b) \in A \times B \wedge c \in C\} = \\ &= \{(a, b, c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}. \end{aligned}$$

Pojęcie pary uporządkowanej jest ściśle związane z prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie. Punkt na płaszczyźnie można, jak wiadomo, traktować jako uporządkowaną parę jego współrzędnych. Dlatego jeżeli A, B są dowolnymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to iloczyn kartezjański $A \times B$ można rozpatrywać jako pewien zbiór punktów płaszczyzny.

Przykład 1.4.2 *Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d\}$.*

Wtedy $A \times B = \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle \wedge y \in \langle c, d \rangle\}$.

Ilustracją geometryczną zbioru $A \times B$ jest zbiór punktów domkniętego prostokąta o wierzchołkach: (a, c) , (a, d) , (b, c) , (b, d) zawartego w płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych.

Jeżeli $A = B = \mathbb{R}$, to iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, zgodnie z przyjętą interpretacją, będziemy utożsamiać z całą płaszczyzną, na której ustalono układ współrzędnych.

Iloczyn $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oznaczamy $\mathbb{R}^2$ i nazywamy **plaszczyzną kartezjańską** lub przestrzenią $\mathbb{R}^2$.

Analogicznie

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

nazywamy przestrzenią kartezjańską $\mathbb{R}^3$.

Ponadto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ nazywamy **kartezjańską przestrzenią n -wymiarową**.

Z określenia tego wynika, że $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem uporządkowanych układów n liczb rzeczywistych.

Łatwo dostrzec, że iloczyn kartezjański nie jest przemienny. Na podstawie definicji oraz rachunku zdań można dowieść, że mają miejsce następujące wzory:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \text{ – łączność iloczynu kartezjańskiego,}$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \text{ – rozdzielność iloczynu kartezjańskiego względem sumy zbiorów,}$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ – rozdzielność iloczynu zbiorów względem iloczynu kartezjańskiego,}$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C) \text{ – rozdzielność różnicy zbiorów względem iloczynu kartezjańskiego.}$$

Pokażemy, dla przykładu, dowód drugiej z tych własności, to znaczy, że $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Wykorzystując definicję działań na zbiorach i prawa rachunku zdań, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \forall a \in A \forall x \in (B \cup C) \quad (a, x) \in (A \times (B \cup C)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [a \in A \wedge x \in (B \cup C)] \Leftrightarrow (a \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(a \in A) \wedge (x \in C)] \Leftrightarrow (a, x) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]. \end{aligned}$$

1.5 Relacje i odwzorowania

Definicja 1.5.1 *Dowolny podzbiór $\mathcal{R}$ iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ nazywamy relacją dwuczłonową lub krótko relacją.*

Niech $a \in A$, $b \in B$. Mówimy, że a **pozostaje w relacji z b** i piszemy $a\mathcal{R}b$ lub $\mathcal{R}(a, b)$, jeżeli $(a, b) \in \mathcal{R} \subset A \times B$.

Dziedziną relacji $\mathcal{R} \subset A \times B$ jest zbiór $D(\mathcal{R}) \subset A$ określony następująco:

$$D(\mathcal{R}) := \{x \in A : \exists b \in B \ (x, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Przeciwdziedzina relacji $\mathcal{R}$ jest następujący zbiór $D^{-1}(\mathcal{R}) \subset B$:

$$D^{-1}(\mathcal{R}) := \{b \in B : \exists a \in A \ (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Wykresem relacji $\mathcal{R}$ jest zbiór

$$W_{\mathcal{R}} := \{(a, b) : a\mathcal{R}b\}.$$

Przykład 1.5.1 W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozpatrzmy relację

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}.$$

Wykresem tej relacji na płaszczyźnie kartezjańskiej jest zbiór punktów leżących poniżej prostej $y = x$.

Pojęcie relacji można rozszerzyć na większą liczbę zbiorów.

Definicja 1.5.2 n -członową relację nazywamy zbiór $\mathcal{R}$, dla którego istnieją zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ takie, że

$$\mathcal{R} \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Rozważmy teraz relacje $\mathcal{R} \subset A \times A$, czyli relacje określone w zbiorze A . Spośród nich wyróżnimy specjalne rodzaje relacji. Mianowicie:

1. Zwrotna, to znaczy $\forall a \in A \ (a, a) \in \mathcal{R}$.
2. Symetryczna, to znaczy $\forall a, b \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$.
3. Antysymetryczna, to znaczy $\forall a, b \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$.
4. Przechodnia, to znaczy $\forall a, b, c \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.
5. Spójna, to znaczy $\forall a, b \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R}$.
6. Prawostronnie jednoznaczna, to znaczy: $\forall a \in A \ \forall b, c \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (a, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow b = c$.
7. Lewostronnie jednoznaczna, to znaczy: $\forall a, c \in A \ \forall b \in A \ (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (c, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = c$.

Przykład 1.5.2 Dana jest relacja $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$. Własności zbioru $\mathbb{R}$ wskazują, że relacja $<$ nie jest zwrotna, jest natomiast przechodnia.

Przykład 1.5.3 Niech $A = B = \mathbb{N}$. $\mathcal{R}_p(a, b)$ oznacza, że liczby a, b przy dzieleniu przez ustaloną liczbę $p \in \mathbb{N}$ dają taką samą resztę. Zdefiniowana relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Definicja 1.5.3 Relację, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywamy **równoważnością** w tym zbiorze.

Definicja 1.5.4 Jeśli w zbiorze A jest określona relacja równoważności, to zbiór $\{b \in A : a = b\}$ nazywamy **klasą abstrakcji relacji $\mathcal{R}$** i oznaczamy $[a]$, to znaczy

$$[a] = \{b \in A : a = b\}.$$

Zachodzą własności:

1. $[a] \subset A$.
2. Zbiór $[a]$ jest niepusty. Wynika to ze zwrotności relacji $\mathcal{R}$.
3. Jeżeli $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności i $(a, b) \in \mathcal{R}$, to $[a] = [b]$.
4. Klasy abstrakcji relacji $\mathcal{R}$ wyznaczone przez różne elementy są albo równe, albo rozłączne. Istotnie, jeśli $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, to istnieje w zbiorze A taki element c , że $(a, c) \in \mathcal{R}$ oraz $(b, c) \in \mathcal{R}$, skąd, wobec symetrii i przechodniości relacji $\mathcal{R}$ mamy $(a, b) \in \mathcal{R}$, to znaczy $[a] = [b]$.

Omówiona w Przykładzie 1.5.3 relacja jest równoważnością. W przypadku $p = 2$ dokonuje ona podziału zbioru liczb naturalnych na dwie klasy abstrakcji: klasę liczb parzystych $[0]$ i klasę liczb nieparzystych $[1]$.

Przykład 1.5.4 W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relację $\mathcal{R}$ w następujący sposób:

Jeżeli $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ to $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (ad = bc)$.

Wprowadzona relacja jest równoważnością. Klasą abstrakcji tej relacji wyznaczoną przez parę (a, b) jest ułamek $\frac{a}{b}$, to znaczy $[x] = \frac{a}{b}$, $[y] = \frac{c}{d}$. Zgodnie z omawianymi własnościami jest:

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc).$$

Przykład 1.5.5 Ważnym przykładem tworzenia klas abstrakcji jest pojęcie wektora swobodnego.

Wektor zaczepiony rozpatrywany w $\mathbb{R}^3$ jest określany jako para $(A, \bar{a})$, gdzie $A = (x, y, z)$ jest punktem początkowym wektora z , $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ są jego współrzędnymi; piszemy również $\overrightarrow{AB}$, gdzie punkt $B = (z + a_x, y + a_y, z + a_z)$ jest końcem wektora zaczepionego $(A, \bar{a})$.

Niech $x = (A, \bar{a})$, $y = (B, \bar{b})$ będą dwoma elementami zbioru X wszystkich wektorów zaczepionych. W zbiorze tym wprowadzamy relację równoważności

$$(x, y) \in \mathcal{R} := (\bar{a} = \bar{b}).$$

Wprowadzona relacja dokonuje w zbiorze X podziału na klasy abstrakcji, z których każdą nazywamy **wektorem swobodnym**.

Rozpatrując różne typy relacji w zbiorze $A = \mathbb{R}$, to znaczy gdy $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, możemy im nadać prostą interpretację geometryczną. Mianowicie, jeżeli relacja jest:

- zwrotna, to wykres relacji zawiera prostą $y = x$,
- symetryczna, to wykres relacji jest symetryczny względem prostej $y = x$,
- antysymetryczna, to jeżeli punkty symetryczne względem prostej $y = x$ należą do wykresu relacji, wówczas muszą leżeć na tej prostej,
- prawostronnie jednoznaczna, to dowolna prosta prostopadła do osi OX przecina wykres relacji w co najwyżej jednym punkcie.

Definicja 1.5.5 Relację $\mathcal{R} \subset A \times A$ nazywamy **relacją częściowo porządkującą** zbiór A , jeżeli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

Jeżeli ponadto jest spójna, nazywamy ją **relacją porządkującą** zbiór A .

Przykład 1.5.6 Relacja $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ jest relacją porządkującą zbiór A .

Przykład 1.5.7 Niech $P(X)$ oznacza zbiór, którego elementami są podzbiory pewnego ustalonego zbioru X . Określamy relację $\mathcal{R}$ w następujący sposób:

$$\forall A, B \in P(X) \quad (A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow A \subset B.$$

Jest to relacja częściowo porządkująca zbiór X .

Definicja 1.5.6 Niech X i Y będą dwoma niepustymi, niekoniecznie różnymi zbiorami, relacja $T \subset X \times Y$ niech będzie taką relacją, że

$$\forall x \in X \exists y \in Y \quad (x, y) \in T,$$

$[(x, y_1) \in T \wedge (x, y_2) \in T] \Rightarrow (y_1 = y_2)$, to znaczy relacja T jest prawostronnie jednoznaczna.

Relację o tych własnościach nazywamy **funkcją określoną** w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y albo **odwzorowaniem** lub **przekształceniem** zbioru X w zbiór Y .

Innymi słowy: funkcja f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y jest takim odwzorowaniem, które każdemu $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $y \in Y$.

Terminu „funkcja” używamy zawsze, gdy $X \subset \mathbb{R}^n$ dla $n \geq 1$, a $Y \subset \mathbb{R}$. Jeśli X i Y są zbiorami w $\mathbb{R}^2$, to używamy zwykle terminu „odwzorowanie”.

Jeżeli $X = \mathbb{N}$, to mówimy o ciągach. W zależności od struktury zbioru Y mogą to być różne ciągi. Na przykład: odwzorowanie $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ określa ciąg liczbowy, odwzorowanie $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ może być ciągiem punktów bądź ciągiem wektorów, gdy zaś Y jest zbiorem funkcji, wówczas mając odwzorowanie $\mathbb{N} \rightarrow Y$, mówimy o ciągu funkcyjnym.

W przypadkach, gdy X i Y są innymi zbiorami niż wymienione, to mówiąc o relacji określonej Definicją 1.5.6, wprowadza się często nowe nazwy. Na przykład, gdy X jest zbiorem pewnych funkcji, a Y zbiorem liczbowym, to relację T nazywamy **funkcjonałem**, gdy zaś X i Y są zbiorami funkcji, mówimy o **operatorach**.

Dalsza nauka matematyki będzie właściwie poznawaniem kolejnych przykładów różnych rodzajów funkcyjnych zależności.

Niech będą dane dwa zbiory X i Y . Jeżeli (x, y) jest parą zestawioną w myśl Definicji 1.5.6, to piszemy $y = f(x)$ i y nazywamy wartością funkcji f dla elementu x lub w punkcie x . Zestawiając takie pary, nie musimy wyczerpać całego zbioru Y , więc zbiór wartości funkcji jest na ogół podzbiorem zbioru Y .

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f , często piszemy D_f . Zbiór wartości funkcji, to znaczy zbiór $\{y = f(x) : x \in X\}$, nazywamy **obrazem zbioru X** poprzez funkcję f i oznaczamy go $f(X)$. Podobnie możemy mówić o obrazie dowolnego zbioru $A \subset X$, kładąc

$$f(A) := \{y = f(x) : x \in A\}.$$

Przeciwbrazem dowolnego zbioru $B \subset f(X)$ przy zadanej funkcji f , oznaczanym $f^{-1}(B)$, nazywamy zbiór

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Obraz dziedziny danej funkcji nazywamy **przeciwdziedziną** danej funkcji i oznaczamy D_f^{-1} , to znaczy

$$D_f^{-1} := \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Dla zapisu funkcji stosuje się oznaczenia:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{lub} \quad x \rightarrow f(x).$$

W praktyce często tym samym symbolem $f(x)$ wyrażamy funkcję f określoną na zbiorze o argumentach x oraz wartość tej funkcji dla ustalonego argumentu x .

Zbiór

$$W_f := \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}$$

nazywamy **wykresem** funkcji f .

Oczywiście, $W_f \subset X \times Y$, ale nie każdy podzbiór produktu $X \times Y$ jest wykresem funkcji.

Często funkcja jest dana konkretnym wzorem. Jeżeli w takim przypadku nie jest wskazana dziedzina funkcji, to rozumiemy, że wzór należy stosować do najobszerniejszego zbioru elementów, w którym jest on sensowny. Zbiór taki nazywa się **dziedziną naturalną** funkcji.

Jeżeli jest dana funkcja $f : X \rightarrow Y$ i zbiór $A \subset X$, to rozpatrując funkcję $g : A \rightarrow Y$ o tej własności, że dla $x \in A$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$, mówimy, że g jest **zawężeniem** lub **obcięciem** funkcji f do zbioru A .

Przykład 1.5.8 Określić dziedzinę naturalną funkcji danych wzorami:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow f(x) = \frac{1}{\log(x-3)}, \\ (x, y) &\rightarrow g(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Dla funkcji f dziedzinę naturalną określa układ warunków: $x - 3 > 0$ i $\log(x-3) \neq 0$, skąd otrzymujemy

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \wedge x \neq 4\}.$$

Dla funkcji g dziedziną naturalną jest zbiór

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0\},$$

to znaczy koło domknięte zawarte w dwuwymiarowej płaszczyźnie. Obrazem dziedziny, to znaczy zbiorem wartości funkcji g , jest przedział $(0, 2]$.

Definicja 1.5.7 Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **surjekcją**, jeśli $f(X) = Y$, to znaczy:

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad y = f(x).$$

Piszemy wtedy $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$.

Definicja 1.5.8 *Owzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **injekcją** lub **odwzorowaniem różnowartościowym**, jeżeli*

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad [f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

lub równoważnie

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow [f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Injekcja jest więc relacją jednocześnie prawo- i lewostronnie jednoznaczną.

Definicja 1.5.9 *Owzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **bijekcją** lub **odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym**, jeżeli jest surjekcją i injekcją, to znaczy:*

$$\forall y \in Y \exists \text{ dokładnie jeden } x \in X \quad y = f(x).$$

Przykład 1.5.9 *Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem*

$$f(x) = x^2.$$

Określić, czy jest bijekcją.

Dana funkcja nie jest surjekcją, ponieważ dla pewnych y , np. $y = -4$, zdanie $\exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$ jest fałszywe.

Dana funkcja nie jest injekcją, ponieważ $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, np. $x_1 = 2, x_2 = -2$, co przeczy definicji injekcji. Nie może być zatem bijekcją.

Przykład 1.5.10 *Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ określona wzorem $f(x) = 2^x$. Zbadaj, czy jest bijekcją.*

Z wiadomości szkolnych wiadomo, że:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = 2^x \text{ - funkcja } f \text{ jest więc surjekcją.}$$

$$2^{x_1} = 2^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ - funkcja } f \text{ jest więc injekcją, funkcją różnowartościową.}$$

Zatem jest również bijekcją.

Definicja 1.5.10 *Jeżeli są dane odwzorowania $f : X \rightarrow Z$ i $g : Z' \rightarrow Y$ i $Z \subset Z'$, to odwzorowanie $h : X \rightarrow Y$ takie, że $h(x) = g(f(x))$, nazywamy **złożeniem odwzorowań f i g** albo **funkcją złożoną** lub **superpozycją funkcji f i g** , i oznaczamy $g \circ f$. Tak więc:*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

*Funkcję f nazywa się **funkcją wewnętrzną**, g nazywa się **funkcją zewnętrzną**.*

Przykład 1.5.11 *Dane są funkcje*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 9, & x \in \mathbb{R}, \\ g(x) &= \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{aligned}$$

Określić funkcje złożone $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.

Dla funkcji f i g mamy

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R}, & f(D_f) &= \langle -9, +\infty \rangle, \\ D_g &= \langle 0, +\infty \rangle, & g(D_g) &= \langle 0, +\infty \rangle. \end{aligned}$$

Dla określoności złożenia $f \circ g$, zgodnie z definicją, powinno być $g(D_g) \subset D_f$, co jest spełnione. Zatem funkcja złożona $f \circ g$ istnieje dla wszystkich argumentów funkcji g , to znaczy

$$(f \circ g)(x) = x - 9 \text{ dla } x \geq 0.$$

Dla określoności złożenia $g \circ f$ powinno być $f(D_f) \subset D_g$. Relacja ta będzie prawdziwa jedynie dla tych x , dla których $x^2 - 9 \geq 0$, to znaczy gdy $|x| \geq 3$. Zatem

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 9} \text{ dla } |x| \geq 3.$$

Operacja składania odwzorowań może być stosowana wielokrotnie, np.

$$(f \circ g \circ h)(x) := f[g(h(x))].$$

Warto zauważyć, że działanie to nie jest działaniem przemennym, ale jest działaniem łącznym (jeżeli wszystkie występujące złożenia są określone), to znaczy

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Uzasadnienie: Ustalmy dowolne $x \in \mathbb{R}$, dla którego wszystkie opisane złożenia są określone. Wtedy

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f[g(h(x))]$$

oraz

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] = f[g(h(x))],$$

co dowodzi łączności superpozycji.

Definicja 1.5.11 *Odwzorowanie $\text{Id} : X \rightarrow X$ takie, że*

$$\forall x \in X \quad \text{Id}(x) = x$$

nazywa się odwzorowaniem tożsamościowym lub odwzorowaniem identycznościowym. Odwzorowanie to jest bijekcją.

Definicja 1.5.12 *Niech dana będzie bijekcja $f : X \rightarrow Y$. Odwzorowanie $g : Y \rightarrow X$ takie, że $\forall x \in X \quad (g \circ f)(x) = x$ nazywamy odwzorowaniem odwrotnym (funkcją odwrotną) do f i oznaczamy f^{-1} . Oznacza to, że*

$$\forall x \in X \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x, \tag{1.5.1}$$

$$\forall y \in Y \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Ponadto $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

Warto zauważyć, że dla każdej funkcji f

$$(f \circ \text{Id})(x) = (\text{Id} \circ f)(x) = f(x).$$

Przykład 1.5.12 *Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ określona wzorem $x \mapsto f(x) = 2^x$. Zbudować jej funkcję odwrotną.*

Dana funkcja f jest bijekcją, patrz Przykład 1.5.10. Oznaczając wartości funkcji f przez y , możemy zapisać: $y = 2^x$. Jeżeli przekształcimy tę równość, to otrzymamy $x = \log_2 y$. Jest to wzór funkcji $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, mianowicie: $g(x) = \log_2 x$. Dla tych funkcji zachodzą związki:

$$(g \circ f)(x) = \log_2(2^x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$(f \circ g)(x) = 2^{\log_2 x} = x \quad \text{dla } x > 0.$$

Zauważmy ponadto, że $D_f = D_g^{-1}$ oraz $D_g = D_f^{-1}$. Zatem poszukiwaną funkcją odwrotną funkcji f jest funkcja

$$g(x) = f^{-1}(x) = \log_2 x.$$

Przykład 1.5.13 *Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ określona wzorem $f(x) = x^2$. Wyznacz jej funkcję odwrotną.*

Funkcja ta nie jest bijekcją, patrz Przykład 1.5.9. Określimy zawężenia funkcji f , tak, by były one różnowartościowe i by suma ich dziedzin pokrywała D_f . Tworzymy

zatem funkcje:

$$f_1(x) = x^2 \text{ dla } 0 < x, \quad D_{f_1} = (-\infty, 0), \quad D_{f_1}^{-1} = (0, \infty);$$

$$f_2(x) = x^2 \text{ dla } x \geq 0, \quad D_{f_2} = \langle 0, \infty \rangle, \quad D_{f_2}^{-1} = \langle 0, \infty \rangle.$$

Funkcje f_1, f_2 są różnowartościowe, mają funkcje odwrotne:

$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \quad D_{f_1^{-1}} = (0, \infty), \quad D_{f_1^{-1}}^{-1} = (-\infty, 0);$$

$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad D_{f_2^{-1}} = \langle 0, \infty \rangle, \quad D_{f_2^{-1}}^{-1} = \langle 0, \infty \rangle.$$

Funkcja f nie ma funkcji odwrotnej, natomiast istnieją jej zawężenia, które mają funkcje odwrotne.

Przykład 1.5.14 Dana jest funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określona wzorem

$$(x, y) = f(u, v) := (3u + v, u - v).$$

Wykazać, że jest bijekcją. Wyznaczyć funkcję odwrotną $f^{-1}(x, y)$.

W celu uzupełnienia informacji o tej funkcji przytoczymy określenie:

$$k_1 \cdot (a, b) + k_2 \cdot (c, d) := (k_1 a + k_2 c, k_1 b + k_2 d).$$

Jeżeli $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, to również $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdzie

$$\begin{cases} x = 3u + v \\ y = u - v \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Zatem f jest surjekcją.

Wykażemy, że f jest injekcją. Niech $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$, to znaczy $u_2 - u_1 \neq 0$ i $v_2 - v_1 \neq 0$. Pokażemy, że

$$[f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) = 0] \Leftrightarrow [(u_1, v_1) = (u_2, v_2)].$$

Jeżeli

$$f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) = (3(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1), (u_2 - u_1) - (v_2 - v_1)) = (0, 0), \text{ to}$$

$$\begin{cases} 3(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1) = 0 \\ (u_2 - u_1) - (v_2 - v_1) = 0 \end{cases},$$

skąd otrzymujemy: $u_2 - u_1 = 0$ i $v_2 - v_1 = 0$. Zatem f jest odwzorowaniem różnowartościowym, injekcją, jest więc również bijekcją.

W celu wyznaczenia funkcji odwrotnej z układu równań (1.5.2) wyliczymy u, v . Otrzymujemy: $u = \frac{x+y}{4}$, $v = \frac{x-3y}{4}$. Oznacza to, że funkcja odwrotna jest opisana wzorem

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-3y}{4} \right).$$

1.6 Zadania

Udowodnić tautologie (Zad. 1.1-1.5)

1.1. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.

1.2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ – prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

1.3. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

1.4. $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

1.5. $[(p \wedge r) \vee (q \wedge s)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (r \vee s)]$.

Sprawdzić, czy schematy zdaniowe są tautologiami (Zad. 1.6-1.13)

1.6. $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$.

1.7. $[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)]$.

1.8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

1.9. $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

1.10. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

1.11. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

1.12. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow [p \vee r \Rightarrow q \vee s]$.

1.13. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

1.14. Zdanie $p \wr q$ nazywamy **dysjunkcją**, jest one prawdziwe tylko wtedy, gdy dokładnie jedno ze zdań p , q jest prawdziwe. Natomiast zdanie $p \downarrow q$ nazywamy **łączną negacją**, jest ono prawdziwe tylko wtedy, gdy oba zdania p , q są fałszywe. Określić dysjunkcję oraz łączną negację, używając koniunkcji, alternatywy, negacji.

Wypowiedzieć twierdzenie odwrotne i przeciwstawne do danego twierdzenia. Określić prawdziwość poszczególnych twierdzeń. Wypowiedzieć wszystkie powstałe prawdziwe twierdzenia, korzystając ze sformułowań: warunek konieczny (WK), warunek wystarczający (WW) lub warunek konieczny i wystarczający (WKW) (Zad. 1.15-1.20)

1.15. Jeżeli dwa kąty w trójkącie są równe, to trójkąt jest równoramienny.

1.16. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

1.17. Liczba naturalna jest liczbą nieujemną.

1.18. Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 2 i 5, to jest podzielna przez 10.

1.19. Jeżeli liczba całkowita jest podzielna przez 5 i 9, to jest podzielna przez 10.

1.20. Każda liczba rzeczywista jest pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego.

Określić dla jakich $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest forma zdaniowa
(Zad. 1.21-1.30)

1.21. $2x = 2 \sin x$.

1.22. $\sqrt{x^2} = |x|$.

1.23. $|x| \leq 0$.

1.24. $x > x + 1 \Rightarrow 2 < 3$.

1.25. $x < 0 \Rightarrow x < 2$.

1.26. $\forall y \in \mathbb{R} \log_2 x = y \Leftrightarrow x^y = 2$.

1.27. $x^2 > x$.

1.28. $|x + 1| + |x + 2| = 1$.

1.29. $\exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 = 1$.

1.30. $\forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \geq x$.

Korzystając z funktorów i kwantyfikatorów, zapisać podane zdania, ocenić, czy są to zdania prawdziwe, a następnie zapisać ich zaprzeczenia
(Zad. 1.31-1.41)

1.31. Dla dowolnego m równanie $x^2 + mx - 2m^2 = 0$ ma rozwiązanie.1.32. Nie dla każdej liczby x jej kwadrat jest większy od niej.1.33. Dla dowolnej liczby x jej wartość bezwzględna jest nieujemna.

1.34. Każda liczba podzielna przez 10 jest parzysta.

1.35. Każda liczba nieparzysta jest podzielna przez 3.

1.36. Każdy wielomian stopnia trzeciego ma co najmniej jeden pierwiastek.

1.37. Każda liczba naturalna jest mniejsza od swojego kwadratu.

1.38. Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba większa od niej.

1.39. Istnieje liczba całkowita m , taka że każda liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 + 2mx \geq 0$.1.40. Nie dla każdej liczby całkowitej x , takiej że $|x - 2| > 2$, istnieje liczba naturalna y , taka że $x + y = 0$.1.41. Istnieje liczba rzeczywista m , od której nie jest mniejszy kwadrat dowolnej liczby.

Jakim prawom z rachunku zdań odpowiadają prawa z rachunku zbiorów
(Zad. 1.42-1.45)

1.42. $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$.

1.43. $(B \cap C) \cup (C \setminus A) = C \setminus (A \setminus B)$.

1.44. $(A \cup B) \cap B = B$.

1.45. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$.

1.46. Jakim prawom rachunku zbiorów odpowiadają tautologie z Zadań 1.1-1.5.

1.47. Jakiemu funktorowi odpowiada różnica symetryczna zbiorów?

Podać interpretację geometryczną w układzie współrzędnych zbiorów $A \times B$ (Zad. 1.48-1.58)

- 1.48. $A = \langle 1, 2 \rangle$, $B = \langle -1, 3 \rangle$.
 1.49. $A = \{x : |x| > 2\}$, $B = \{x : |x+1| \leq 3\}$.
 1.50. $A = \{2, 3\}$, $B = \{1\} \cup (2, 3)$.
 1.51. $A = \{a : a = 1, 2, \dots\}$ $B = \{0, 1\}$.
 1.52. $A = \{a : a = 1, 2, \dots\}$ $B = \mathbb{R}$.
 1.53. $A = \{x : x \leq 2\}$, $B = \{b : b > 2\}$.
 1.54. $A = \{x : 0 \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 3\}$, $B = \{x : 1 < x < 2 \vee 3 < x \leq 4\}$.
 1.55. $A = \{x : 2x^2 + x - 3 < 0\}$, $B = \{x : 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq 0\}$.
 1.56. $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$, $B = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$.
 1.57. $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{x : |x| \leq 1\}$.
 1.58. $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{x : x \leq 0\}$.

Wyznaczyć sumę i iloczyn mnogościowy dla rodzin zbiorów (Zad. 1.59-1.69)

- 1.59. $A_n = \{x : 5 - \frac{1}{n} < x < 8 + \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$.
 1.60. $B_n = \{x : x \in (1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})\}$, $n \in \mathbb{N}$.
 1.61. $C_n = (1, 2 + \frac{1}{n}) \times (1 - \frac{1}{n}, 3)$, $n \in \mathbb{N}$.
 1.62. $A_t = \{2^t\}$, $t \in \mathbb{R}$.
 1.63. $B_t = \{x : x = \sin(t\pi/2)\}$, $t \in (1, 10)$.
 1.64. $C_t = \{x : -t < x < \log t\}$, $t \in (1, 10)$.
 1.65. $D_t = \{(x, y) : y = tx\}$, $t \in (0, 1)$.
 1.66. $A_t = \{(x, y) : y = x + t\}$, $t \in (0, 1)$.
 1.67. $B_t = \{(x, y) : (x-t)^2 + y^2 \leq t^2\}$, $t \in (1, 2)$.
 1.68. $C_t = \{(x, y) : (x-t)^2 + y^2 \leq 4\}$, $t \in (-1, 1)$.
 1.69. $D_t = (1, 2 + \frac{1}{t}) \times (1 + \frac{1}{t}, 3)$, $t \geq 1$.

Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \div B$ (Zad. 1.70-1.75)

- 1.70. $A = \{(x, y) : |x| < |y|\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 1.71. $A = \{(x, y) : x \leq y \wedge x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$, $B = \{(x, y) : x \geq y \wedge x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$.
 1.72. $A = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 16\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 1.73. $A = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$, $B = \{(x, y) : x \leq y + 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0\}$.
 1.74. $A = \{(x, y) : \sin(x - y) = 0\}$, $B = \{(x, y) : \operatorname{tg} y = 0\}$.
 1.75. $A = \{(x, y) : \cos x = 0\}$, $B = \{(x, y) : \operatorname{tg}(x + y) = 0\}$.

Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory $A \cup B \cup C$, $A \cap (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$
(Zad. 1.76-1.78)

1.76. $A = \{(x, y) : |x| < |y|\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $C = \{(x, y) : x \leq 0\}$.

1.77. $A = \{(x, y) : x \leq y \wedge x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$, $B = \{(x, y) : x \geq y \wedge x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$,
 $C = \{(x, y) : y = x, x \in \langle 0, 1 \rangle\}$.

1.78. $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) : y \geq x^2\}$, $C = \{(x, y) : x \geq y^2\}$.

Wykazać, że zbiory A i B są równej mocy (Zad. 1.79-1.80)

1.79. $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 3n + 2 = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 = 0\}$.

1.80. $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2 < |x| < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4 = 0 \vee 8 \leq x^2 \leq 64\}$.

Wykazać, że podane zbiory mają moc $\aleph_0$ (alef zero), to znaczy są przeliczalne (Zad. 1.81-1.82)

1.81. A - zbiór odwrotności liczb naturalnych.

1.82. $A \times B$, jeżeli A i B są zbiorami przeliczalnymi.

Wykazać, że podane zbiory mają moc kontinuum (Zad. 1.83-1.85)

1.83. $A = \{x : 0 < x\}$.

1.84. $A = \{x : 0 < x < 1\}$.

1.85. $A = \{m \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \ x^2 + mx + 1 = 0\}$.

Wyznaczyć kres dolny i kres górny podanego zbioru liczbowego (Zad. 1.86-1.90)

1.86. $A = \left\{a : a = \frac{n-1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$. 1.87. $A = \left\{a : a = \left(-\frac{4}{5}\right)^n \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.88. $A = \left\{y : y = \operatorname{tg} x \wedge -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$. 1.89. $A = \left\{x : x > 0 \wedge \sin \frac{1}{x} = 0\right\}$.

1.90. $A = \left\{y : y = 1 - \frac{2}{x^2} \wedge x \geq 1\right\}$.

Zbadać ograniczoność zbioru i wyznaczyć jego kresy (Zad. 1.91-1.94)

1.91. $A = \left\{a : a = \frac{n}{n+3} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.92. $A = \left\{a : a = 3 + \frac{(-1)^n 6}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.93. $A = \{y : y = \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x \wedge x \in \mathbb{R}\}$.

1.94. $A = \left\{y : y = \frac{x}{x^2 + 1} \wedge x \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Znaleźć kresy zbioru liczbowego $X := \{d(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, gdzie liczba $d(a, b)$ oznacza odległość punktu a od punktu b . Punkty a i b są dowolnymi punktami zbiorów (Zad. 1.95-1.98)

- 1.95. $A = \{(x, y) : x + y = 4\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$.
 1.96. $A = \{(x, y) : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25\}$.
 1.97. $A = \{(x, y) : (x - 4)^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.
 1.98. $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + 6x - 5\}$, $B = \{(x, y) : y = 10\}$.

Wykazać, że dane relacje w zbiorze liczb naturalnych są równoważnościami (Zad. 1.99-1.100)

1.99. $aRb \Leftrightarrow a$ ma tyle samo cyfr co b . Podziel zbiór $\mathbb{N}$ na klasy abstrakcji (klasy równoważności) tej relacji.

1.100. $mRn \Leftrightarrow (m = n \pmod{l})$. Relację tę nazywa się **kongruencją** lub **przystawaniem modulo l** , i definiujemy ją następująco:

$$(m = n \pmod{l}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \quad m - n = kl).$$

1.101. Dla relacji $(m = n \pmod{l})$, którą zapisujemy w skrócie: $l \mid (m - n)$, wyznaczyć klasy równoważności, gdy $l = 2$, $l = 3$.

1.102. Dla relacji $3 \mid (m - n)$ podać klasy abstrakcji wyznaczone elementami: 5, 7, 12.

Zbadać relacje $\mathcal{R}$ określone w zbiorze $\mathbb{R}^2$. Dla relacji równoważnościowych wyznaczyć klasy abstrakcji, podać ich interpretację geometryczną. Relację $\mathcal{R}$ określamy dla dowolnych elementów $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ (Zad. 1.103-1.107)

$$1.103. a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

$$1.104. a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$1.105. a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

$$1.106. a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2,$$

$$1.107. a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Dane jest odwzorowanie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone wzorem $f(x, y)$;

a) sprawdzić, czy jest bijekcją,

b) wyznaczyć funkcję odwrotną (jeżeli istnieje),

c) wyznaczyć zbiory $f(A)$, $f^{-1}(B)$,

d) wyznaczyć zbiory $f(C)$, $f^{-1}(D)$ (Zad. 1.108-1.109)

1.108. $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$. $A = \{(0, 0), (1, 1), (-2, 4)\}$, $B = \{(3, 0), (1, 1)\}$, C – prosta o równaniu $y = 2x$, D – prosta $y = x + 1$.

1.109. $f(x, y) = (x + 2y, x - y)$. $A = \{(2, 0), (3, 1), (2, -1)\}$, $B = \{(0, 0), (2, 1)\}$, C – prosta o równaniu $y = 2x + 1$, D – parabola $y = x^2 + 1$.

Określić jakie przekształcenie płaszczyzny określa odwzorowanie T (Zad. 1.110-1.116)

$$1.110. T(x, y) = (x + 1, y - 2).$$

$$1.111. T(x, y) = (-x, y).$$

$$1.112. T(x, y) = (x, -y).$$

$$1.113. T(x, y) = (-x, -y).$$

$$1.114. T(x, y) = (y, x).$$

$$1.115. T(x, y) = (-x + 2, y - 3).$$

$$1.116. T(x, y) = (-2x, y).$$

Podać odwzorowanie T , które jest wyznaczone przez określone przekształcenie płaszczyzny (Zad. 1.117-1.120)

1.117. Symetria środkowa względem punktu $(1, 1)$.

1.118. Symetria względem prostej $x = 1$.

1.119. Symetria względem prostej $y = -1$.

1.120. Jednokładność o skali 2 i środku w (a, b) , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Dane jest odwzorowanie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone podanymi wzorami,

a) podać interpretację geometryczną odwzorowania T ,

b) podać odwzorowanie odwrotne T^{-1} ,

c) podać obrazy $T(\overline{AB})$, $T(K)$, gdzie $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $K = K(S, r)$ jest kołem o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 6$,

d) podać przeciwobraz $T^{-1}(\overline{MN})$, gdzie $M = (0, 2)$, $N = (2, -4)$ (Zad. 1.121-1.125)

$$1.121. T : (u, v) \rightarrow (x, y), \quad x = u + a, y = v + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ są ustalone.}$$

$$1.122. T : (u, v) \rightarrow (x, y), \quad x = u, y = 2v.$$

$$1.123. T : (u, v) \rightarrow (x, y), \quad x = 3u, y = v.$$

$$1.124. T : (u, v) \rightarrow (x, y), \quad x = -2u, y = -2v.$$

$$1.125. T : (u, v) \rightarrow (x, y), \quad x = \frac{1}{2}u, y = \frac{1}{2}v.$$

Rozdział 2

Funkcje zmiennej rzeczywistej

2.1 Uwagi ogólne

Niech X i Y będą podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$.

Przyporządkowanie funkcyjne $f : X \rightarrow Y$ może być podane na wiele sposobów, np.

- za pomocą umowy słownej,
- za pomocą tabelki, diagramów,
- za pomocą wzoru.

W matematyce najczęściej mamy do czynienia z funkcjami określonymi wzorem, główną ich grupę tworzą tak zwane **podstawowe funkcje elementarne**:

$x \rightarrow f(x) = c$, c ustalone, $c \in \mathbb{R}$	– funkcja stała,
$x \rightarrow f(x) = x$,	– funkcja liniowa,
$x \rightarrow f(x) = a^x$, a ustalone, $a \in \mathbb{R}_+$	– funkcja wykładnicza,
$x \rightarrow f(x) = \sin x$	– funkcja trygonometryczna.

Jeżeli do wymienionych funkcji zastosujemy działania:

- dodawanie,
- odejmowanie,
- mnożenie,
- dzielenie funkcji,

to otrzymamy szeroką rodzinę funkcji, w której mieszczą się np. wielomian i funkcja wymierna.

Jeżeli ponadto w przypadkach, gdzie jest to możliwe, utworzymy funkcje odwrotne, to rodzina funkcji poszerzy się o nowe przykłady, np. otrzymamy funkcję logarytmiczną jako odwrotną do wykładniczej.

Jeżeli do tworzenia nowych funkcji dołączymy operacje:

- składania (superpozycji) funkcji,
- tworzenia funkcji odwrotnej,

to okaże się, że większość funkcji można uzyskać z podstawowych funkcji elementarnych, korzystając z opisanych sposobów. Otrzymane w ten sposób funkcje nazywamy **funkcjami elementarnymi**.

Na przykład: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ – złożenie funkcji sinus i funkcji liniowej.

Wypada zwrócić uwagę, że wymieniona jako elementarna funkcja $\sin x$ jest przykładem funkcji, którą określa się za pomocą umowy słownej. Mianowicie: rozpatrzmy zbiór trójkątów prostokątnych o zadanym kącie α . Stosunek długości przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej c nazywamy **sinusem kąta** α ;

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Oddzielną grupę stanowią tzw. funkcje sklejane, to znaczy określone różnymi wzorami w różnych częściach dziedziny, np.:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \leq 2 \\ x^2 & \text{dla } 2 < x < 4 \\ 5 & \text{dla } 4 \leq x \end{cases}.$$

Przystępując do przeglądu funkcji znanych z programu szkolnego, przypomnimy określenia niektórych własności funkcji.

Definicja 2.1.1 Funkcję $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją ograniczoną**, jeżeli zbiór jej wartości jest ograniczony (patrz Definicja 1.3.2), to znaczy

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq m.$$

Zaprzeczeniem tej definicji będzie zdanie

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in X \quad |f(x)| > m,$$

które określa **funkcję nieograniczoną**.

Definicja 2.1.2 Funkcję $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją okresową o okresie** $T \neq 0$, jeżeli

$$\forall x \in X \quad (x+T) \in X \wedge f(x+T) = f(x).$$

Jeżeli $T > 0$ jest okresem funkcji, to również liczba nT dla każdego naturalnego n jest okresem tej funkcji. Jeżeli dla danej funkcji istnieje cała rodzina okresów, to najmniejszy dodatni okres nazywamy **okresem podstawowym** danej funkcji na zbiorze X .

Definicja 2.1.3 Funkcję $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją parzystą**, jeżeli

$$\forall x \in X \quad (-x) \in X \wedge f(x) = f(-x). \quad (2.1.1)$$

Jeżeli

$$\forall x \in X \quad (-x) \in X \wedge f(x) = -f(-x), \quad (2.1.2)$$

to funkcję f nazywamy **funkcją nieparzystą**.

Zauważmy, że pierwszy człon koniunkcji (2.1.1) i (2.1.2) oznacza, iż dziedziną funkcji parzystej lub nieparzystej jest zbiór $X \subset \mathbb{R}$ symetryczny względem punktu $x = 0$. Drugi człon koniunkcji (2.1.1) oznacza, że jeżeli punkt (x, y) należy do wykresu funkcji, to również punkt $(-x, y)$ należy do tego wykresu, a to oznacza, że wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY . Analogicznie warunek (2.1.2) informuje o tym, że wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu.

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste nie wyczerpują wszystkich przykładów funkcji; większość z nich nie ma żadnej z tych własności.

Definicja 2.1.4 Jeżeli dla funkcji $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniona jest implikacja

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad (2.1.3)$$

to f nazywamy **funkcją rosnącą** w zbiorze X .

Jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad (2.1.4)$$

to f nazywamy **funkcją malejącą** w zbiorze X .

Łatwo zauważyć, że funkcja, która jest rosnąca w X lub malejąca w X , jest w X różnowartościowa.

O funkcjach, które są rosnące lub malejące, mówimy, że są **monotoniczne** (lub równoważnie **ściśle monotoniczne**, w celu podkreślenia, że są monotoniczne w całej swojej dziedzinie).

Często mamy do czynienia z funkcjami, które nie są ściśle monotoniczne, ale można dziedzinę podzielić na przedziały, w których funkcja jest monotoniczna. Mówimy wtedy, że f jest **przedziałami monotoniczna**.

Przykład 2.1.1 Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest funkcją przedziałami rosnącą. Natomiast funkcja $f(x) = x^2$ jest funkcją przedziałami monotoniczną; dokładniej malejąca dla $x < 0$ oraz rosnąca dla $x \geq 0$.

Jeżeli w nierównościach (2.1.3) i (2.1.4) dopuścimy równość, to mówić będziemy o funkcjach, odpowiednio, **niemalejących** (inaczej słabo rosnących) lub **nierosnących** (inaczej słabo malejących), opatrzonych wspólną nazwą funkcji **słabo monotonicznych**.

Definicja 2.1.5 Miejscem zerowym funkcji $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy taki element $x_0 \in X$, dla którego zachodzi równość $f(x_0) = 0$.

Z definicji tej wynika, że zbiór miejsc zerowych funkcji f rozpatrywanej w jej dziedzinie naturalnej pokrywa się ze zbiorem rozwiązań równania $f(x) = 0$. Ponieważ rozwiązania równania potocznie są nazywane również **pierwiastkami równania**, więc określenia: miejsce zerowe, rozwiązanie równania, pierwiastek równania można uznać za synonimy.

Ilustracją geometryczną miejsca zerowego funkcji jest punkt przecięcia się wykresu tej funkcji z osią OX .

Definicja 2.1.6 Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga ekstremum lokalne właściwe w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad f(x) - f(x_0) \text{ ma ustalony znak.}$$

Jeżeli $f(x) > f(x_0)$, to f ma **maksimum lokalne** w punkcie x_0 ,
jeżeli $f(x) < f(x_0)$, to f ma **minimum lokalne** w punkcie x_0 .

Należy wspomnieć o geometrycznych własnościach funkcji odwrotnych.

Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$, która jest bijekcją, jest określona wzorem $y = f(x)$, to istnieje funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$, $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Wykresy tak zapisanych funkcji odwrotnych w układzie współrzędnych OXY są tą samą linią. Jeżeli jednak chcemy obie funkcje zapisać zgodnie z regułą, że dziedziną jest zbiór osi OX , wartością zaś należącą do osi OY , to w wyznaczonej funkcji odwrotnej dokonujemy zmiany nazw zmiennych, pisząc $y = f^{-1}(x)$. Czynność ta oznacza, że punkt $M = (x, y)$ został zastąpiony punktem $M_1 = (y, x)$, a to oznacza symetrię względem prostej $y = x$.

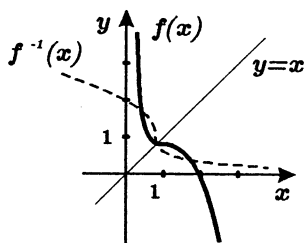
Zatem wykresy funkcji

$$y = f(x)$$

i odwrotnej do niej

$$y = f^{-1}(x)$$

są liniami symetrycznymi względem prostej $y = x$, patrz



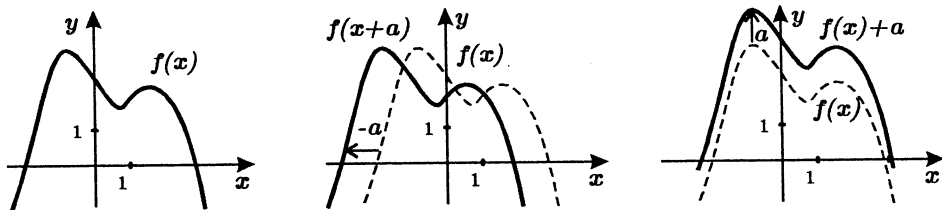
Rys. 2.1.1.

Rys. 2.1.1

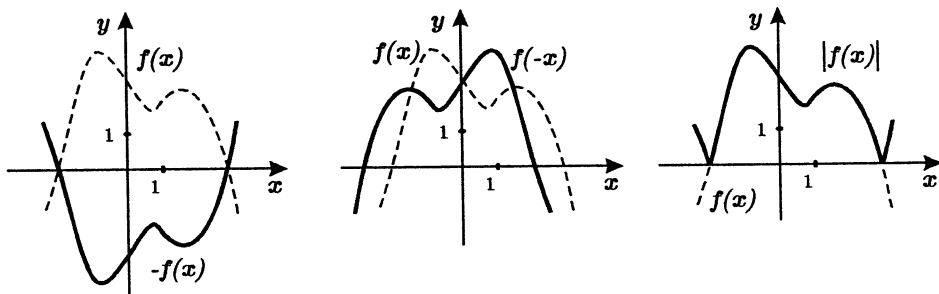
Jeżeli mamy dany (potrafimy narysować) wykres pewnej funkcji $f(x)$, to możemy również narysować wykresy innych funkcji ściśle związanych z funkcją $f(x)$, tak jak przedstawia to następujące zestawienie:

1. Wykres funkcji $g_1(x) = f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$, powstaje jako przesunięcie wykresu $y = f(x)$ o wektor $(-a, 0)$.
2. Wykres funkcji $g_2(x) = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$, powstaje jako przesunięcie wykresu $y = f(x)$ o wektor $(0, a)$.
3. Wykres funkcji $g_3(x) = -f(x)$ powstaje jako odbicie symetryczne względem osi OX .
4. Wykres funkcji $g_4(x) = f(-x)$ powstaje jako odbicie symetryczne względem osi OY .
5. Wykres funkcji $g_5(x) = |f(x)|$ otrzymamy, odbijając symetrycznie względem osi OX część wykresu leżącą poniżej osi OX .
6. Wykres funkcji $g_6(x) = f(|x|)$ otrzymamy, zastępując część wykresu leżącą na lewo od OY odbiciem symetrycznym (względem osi OY) pozostałej części wykresu.
7. Wykres funkcji $g_7(x) = f(ax)$ otrzymamy jako obraz wykresu $y = f(x)$ w powinowactwie osiowym o skali $1/a$ względem osi OY .
8. Wykres funkcji $g_8(x) = af(x)$ otrzymamy jako obraz wykresu $y = f(x)$ w powinowactwie osiowym o skali a względem osi OX .

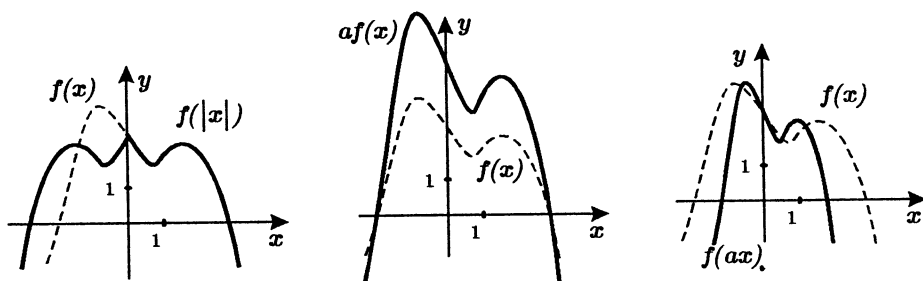
Przykłady tych transformacji są przedstawione na Rys. 2.1.2-2.1.4, przy założeniu $a > 0$.



Rys. 2.1.2



Rys. 2.1.3



Rys. 2.1.4

2.2 Przegląd funkcji elementarnych

2.2.1 Funkcja stała

Wykresem funkcji stałej o równaniu $f(x) = c$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie c jest ustaloną, dowolną wartością rzeczywistą, jest linia prosta równoległa do osi OX , mająca z osią OY wspólny punkt o współrzędnych $(0, c)$, patrz Rys. 2.2.1a).

Funkcja stała jest funkcją ograniczoną, parzystą, nierosnącą, niemalejącą, okresową – nie ma okresu podstawowego.

2.2.2 Funkcja potęgowa

Przebieg funkcji potęgowej o równaniu $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jest uzależniony od wykładnika potęgi, od n . Rozpatrzmy przypadki:

I. n jest liczbą nieparzystą, to znaczy

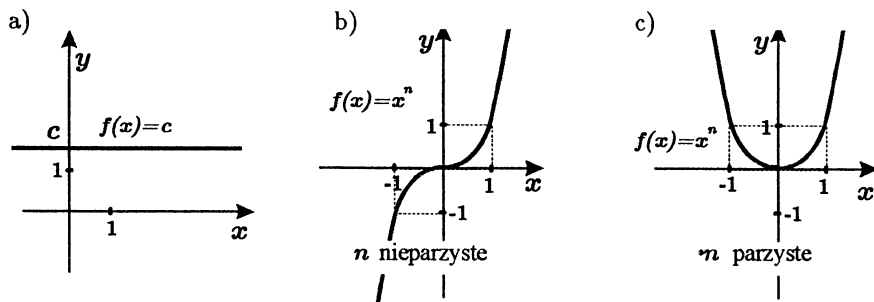
$$f(x) = x^n, \quad n = 2k - 1 \wedge k \in \mathbb{N}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R}.$$

Jest to funkcja rosnąca, nieograniczona, nieparzysta. Istnieją trzy punkty stałe, należące do wykresu przy każdym n . Są to: $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, patrz Rys. 2.2.1b).

II. n jest liczbą parzystą, to znaczy

$$f(x) = x^n, \quad n = 2k \wedge k \in \mathbb{N}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad D_f^{-1} = (0, +\infty).$$

Funkcja jest funkcją malejącą dla $x < 0$ i rosnącą dla $x \geq 0$. Jest ograniczona od dołu, osiąga minimum lokalne dla $x = 0$. Jest funkcją parzystą. Istnieją trzy punkty stałe należące do wykresu funkcji przy każdym n . Są to: $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, Rys. 2.2.1c).

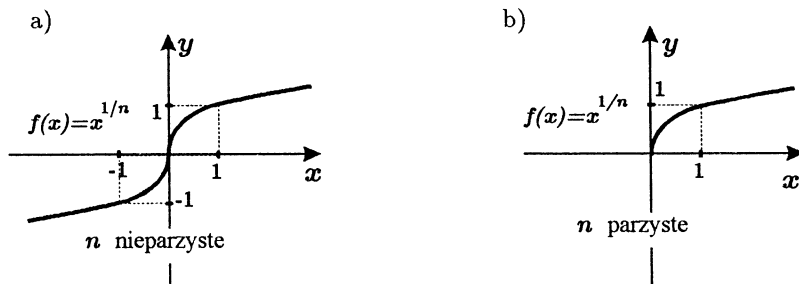


Rys. 2.2.1

III. Jeżeli dla funkcji potęgowej $f(x) = x^n$ wyznaczmy jej funkcję odwrotną $g(x) = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$, to otrzymamy funkcję, która również jest funkcją potęgową, ale funkcją potęgową niewymierną.

Dla n nieparzystych wyrażenie $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ jest określone w całym zbiorze liczb rzeczywistych, Rys. 2.2.2a), zaś dla n parzystych funkcja $g(x)$ jest funkcją odwrotną względem funkcji f zawężonej do przedziału $(0, +\infty)$ i dlatego w tym

przypadku dziedziną oraz przeciwdziedziną funkcji $g(x) = \sqrt[n]{x}$ jest przedział $(0, +\infty)$, Rys. 2.2.2b).



Rys. 2.2.2

Funkcja postaci $h(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, utworzona jako złożenie funkcji potęgowej $f(x) = x^m$ i funkcji potęgowej niewymiernej $g(x) = \sqrt[n]{x}$, jest również funkcją potęgową, funkcją potęgową niewymierną, jeżeli m nie jest wielokrotnością n .

2.2.3 Funkcja wielomianowa

Wielomianem, albo funkcją wielomianową, nazywamy wyrażenie

$$w_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=1}^{k=n} a_kx^k,$$

gdzie liczby a_k , nazywane **współczynnikami wielomianu**, są ustalonymi wartościami, dziedziną zaś jest zbiór $\mathbb{R}$.

Jeżeli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy **stopniem wielomianu**.

Funkcja wielomianowa jest sumą funkcji potęgowych z odpowiednimi współczynnikami liczbowymi, to znaczy, że wielomian jest **kombinacją liniową** funkcji potęgowych.

Do podstawowych badań wielomianu należy poszukiwanie jego miejsc zerowych. Przypomnimy kilka twierdzeń dotyczących tego zagadnienia.

Twierdzenie 2.2.1 *Liczba x_0 jest wtedy i tylko wtedy miejscem zerowym wielomianu $w_n(x)$, gdy można go przedstawić w postaci iloczynu $(x - x_0)w_{n-1}(x)$, (lub równoważnie, gdy $w_n(x)$ dzieli się bez reszty przez $x - x_0$).*

Twierdzenie 2.2.2 *Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n miejsc zerowych.*

Twierdzenie 2.2.3 *Każdy wielomian można przedstawić jako iloczyn wielomianów stopni co najwyżej równych 2.*

Twierdzenie 2.2.4 *Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jedno miejsce zerowe.*

Z badaniem miejsc zerowych wielomianu wiąże się również badanie ustalające punkty ekstremalne wielomianów. Jednak to zagadnienie wygodnie jest rozwiązywać na podstawie analizy różniczkowej (za pomocą pochodnych) i dlatego pominiemy je w tym miejscu.

Dobrze znanym przykładem wielomianu jest trójmian kwadratowy, czyli wielomian drugiego stopnia.

2.2.4 Funkcja wymierna

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci

$$w(x) = \frac{w_m(x)}{w_n(x)},$$

to znaczy iloraz dwóch wielomianów. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $\mathbb{R}$ pomniejszony o zbiór miejsc zerowych mianownika, czyli wielomianu $w_n(x)$.

Najprostszą funkcją wymierną jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Jest to jednocześnie najprostszy przykład szerokiej rodziny funkcji wymiernych określanych mianem **homografii**, to znaczy funkcji ułamkowo liniowych postaci

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Funkcja określona tym wzorem jest istotnie homografią, a nie funkcją liniową, jeżeli jej współczynniki spełniają warunki $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

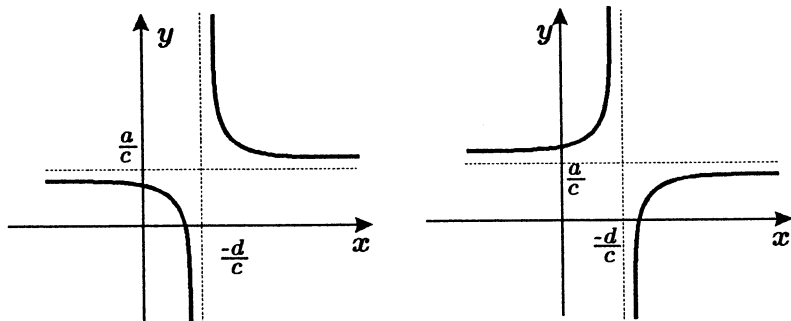
Wykresem homografii jest **hiperbola**, mająca dwie asymptoty o równaniach

$$y = \frac{a}{c} \quad \text{ i } \quad x = -\frac{d}{c}.$$

Jest przedziałami rosnąca lub przedziałami malejąca, patrz Rys. 2.2.3.

Innym, znanym przykładem funkcji wymiernych są tak zwane **ułamki proste**, to znaczy funkcje postaci:

$$\text{I. } \frac{1}{(ax + b)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$



Rys. 2.2.3

II. $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i $b^2 - 4ac < 0$, $A^2 + B^2 > 0$.

Jeżeli w funkcji wymiernej stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, to $w(x)$ nazywamy **funkcją wymierną właściwą**, w przeciwnym wypadku – funkcją wymierną niewłaściwą.

Twierdzenie 2.2.5 *Funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamka właściwego, to znaczy:*

$$\frac{w_m(x)}{w_n(x)} = w_k(x) + \frac{w_p(x)}{w_n(x)}, \text{ gdzie } m = n + k, p < n.$$

Twierdzenie 2.2.6 *Każdą funkcję wymierną właściwą można w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.*

Przykład 2.2.1 *Rozłożyć funkcję $f(x)$ wymierną na sumę wielomianu i ułamków prostych, gdzie*

$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^3 + 4x - 8}{x^4 + 4x^2}.$$

W podanym przykładzie stopień licznika jest wyższy od stopnia mianownika. Wydzielimy najpierw część wielomianową funkcji, dokonując dzielenia licznika przez mianownik:

$$\begin{array}{l} - \left| \begin{array}{l} (x^5 + 5x^3 + 4x - 8) : (x^4 + 4x^2) = x + \frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 + 4x^2} \\ \underline{x^5 + 4x^3} \\ \hline x^3 + 4x - 8 \end{array} \right. \end{array}$$

Reszta dzielenia jest licznikiem funkcji wymiernej, która jest już funkcją wymierną właściwą.

Mianownik, po rozłożeniu na czynniki, ma postać: $x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4)$. Dlatego przewidujemy następujący rozkład na ułamki proste:

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}. \quad (2.2.1)$$

W sumie tej zostały wypisane wszystkie ułamki proste, których suma nie zmienia mianownika. Liczniki ułamków prostych są wyrażone za pomocą niewiadomych współczynników liczbowych, dlatego ilustrowana metoda postępowania nosi nazwę metody **czynników nieoznaczonych**.

W celu wyznaczenia niewiadomych A, B, C, D przeprowadzamy następujące operacje:

- równość (2.2.1) obustronnie mnożymy przez wspólny mianownik,
- prawą stronę porządkujemy, tworząc wielomian (wielomiany występujące po obu stronach równości powinny być równoważne, muszą mieć równe odpowiednie współczynniki),
- otrzymujemy układ równań,
- rozwiązujemy otrzymany układ równań.

W naszym przykładzie:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x - 8 &= Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)x^2 = \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 4Ax + 4B, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 0 \\ 4A = 4 \\ 4B = -8 \end{cases}.$$

Z układu równań otrzymujemy: $A = 1, B = -2, C = 0, D = 2$, co ostatecznie prowadzi nas do odpowiedzi:

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 + 4x^2} = x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2 + 4}.$$

Wykres dowolnej funkcji wymiernej w istotny sposób zależy od liczby miejsc zerowych mianownika. Jeżeli mianownik nie ma miejsc zerowych, to wykres odpowiedniej funkcji wymiernej jest linią ciągłą. Jeżeli istnieją miejsca zerowe mianownika nie będące jednocześnie miejscami zerowymi licznika, to istnieją również asymptoty pionowe. Szczegółowe badanie funkcji wymiernych przeprowadzimy za pomocą pochodnych.

2.2.5 Funkcja wykładnicza

Dziedziną funkcji $f(x) = a^x$, gdzie a jest dowolną ustaloną liczbą dodatnią, jest zbiór $\mathbb{R}$. Wartości funkcji tworzą zbiór $\mathbb{R}_+$, jest więc funkcją ograniczoną od dołu.

- Jeżeli $a = 1$, to funkcja wykładnicza staje się funkcją stałą, $f(x) = 1$.
- Jeżeli $a > 1$, to $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, to znaczy, że f jest rosnąca.
- Jeżeli $a \in (0, 1)$, to $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, co świadczy, że f jest malejąca.
- Ponadto $\forall a > 0 \quad a^0 = 1$, więc punkt $(0, 1)$ jest punktem stałym w rodzinie funkcji wykładniczych.

Zwróćmy uwagę na jeden szczególny przypadek funkcji wykładniczej, występujący najczęściej w problemach matematyki, mianowicie funkcję

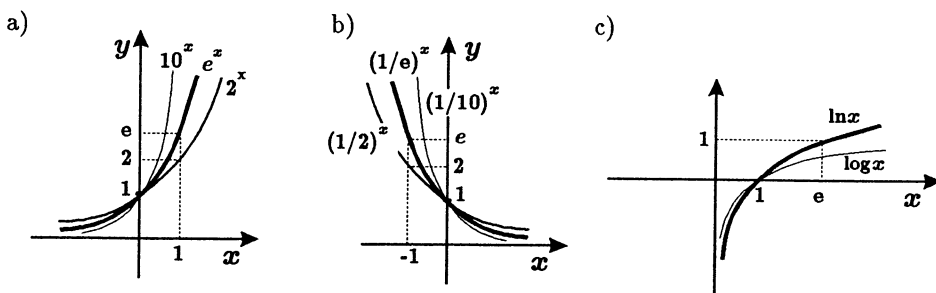
$$f(x) = \exp x := e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ (skrót exp czytaj: eksponens).}$$

Liczba e , będąca w tym przypadku podstawą funkcji potęgowej, jest liczbą niewymierną, przyjmujemy jej przybliżoną wartość $e \simeq 2,7183$. Pojawiała się ona w matematyce jako granica nieskończonego zbieżnego ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Zatem

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2,7183. \quad (2.2.2)$$

Badanie zbieżności tego ciągu i metody ustalenia przybliżonej wartości liczby e będą omawiane przy okazji ciągów i szeregów liczbowych.

Wykresy funkcji $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 10^x$ są pokazane na Rys. 2.2.4a) oraz wykresy funkcji $y = (1/2)^x$, $y = (1/e)^x$, $y = (1/10)^x$ na Rys. 2.2.4b)



Rys. 2.2.4

2.2.6 Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej $x = a^y$,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Stąd otrzymujemy, że dziedziną funkcji logarytmicznej jest $\mathbb{R}_+$, zaś zbiór wartości pokrywa $\mathbb{R}$. Ponieważ dla $a = 1$ funkcja wykładnicza jest funkcją stałą, więc dla $a = 1$ nie istnieje jej funkcja odwrotna.

Mamy więc:

$$f(x) = \lg_a x, \quad D_f = \mathbb{R}_+, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R}, \quad a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \quad a \text{ jest ustalone.}$$

Funkcja logarytmiczna jest nieograniczona, ściśle monotoniczna, rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a \in (0, 1)$. Wykres funkcji dla dowolnego $a > 0$, $a \neq 1$, przechodzi przez punkt $(1, 0)$, skąd $\log_a 1 = 0$.

W zastosowaniach najczęściej mamy do czynienia z dwoma funkcjami logarytmicznymi:

- logarytm dziesiętny, to znaczy $\log x := \log_{10} x$,
- logarytm naturalny, to znaczy $\ln x := \log_e x$.

Logarytm dziesiętny odgrywa pomocniczą rolę w wielu obliczeniach pochodzących z rozwiązywania problemów techniki. Wartości funkcji $\log x$ są stabilizowane. Rozwój komputeryzacji spowodował, że użytkownik nie odczuwa teraz konieczności bezpośredniego posługiwania się tymi logarytmami.

Logarytm naturalny, czyli logarytm o podstawie e , jest podstawowym przykładem funkcji logarytmicznej w różnych problemach matematyki, jest utożsamiany z funkcją logarytmiczną. Wartości $\ln x$ są również stabilizowane.

Na Rys. 2.2.4c) są przedstawione wykresy $y = \log x$, $y = \ln x$.

2.2.7 Funkcje trygonometryczne

Niech będzie dany na płaszczyźnie OXY dowolny kąt skierowany o mierze α , to znaczy $\alpha = \angle XOM$, patrz Rys. 2.2.5a).

Umawiamy się, że wielkość kąta wyrażać będziemy w mierze łukowej, przyjmując, że kąt pełny wynosi 2π .

Oznaczając przez a, b współrzędne punktu M , $M = (a, b)$, a długość odcinka OM przez r , przyjmujemy następujące określenia funkcji trygonometrycznych kąta α , gdzie

α może przyjmować dowolne wartości:

$$\sin \alpha = \frac{b}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Wartości funkcji trygonometrycznych zmieniają się wraz ze zmianą kąta α . Omówimy to dokładniej na przykładzie funkcji $\sin \alpha$, gdy punkt M znajduje się na okręgu o stałym promieniu r :

- $\alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{b}{r} = 0$,
- $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ sinus rośnie od 0 do 1,
- $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \Rightarrow$ sinus maleje od 1 do 0,
- $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ sinus maleje od 0 do -1 ,
- $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow$ sinus rośnie od -1 do 0,
- $\alpha = 2\pi \Rightarrow \sin 2\pi = \sin 0 = 0$.

Dalsze zwiększanie kąta od 2π do 4π powoduje powtarzanie się wartości, skąd wniosek o okresie funkcji sinus:

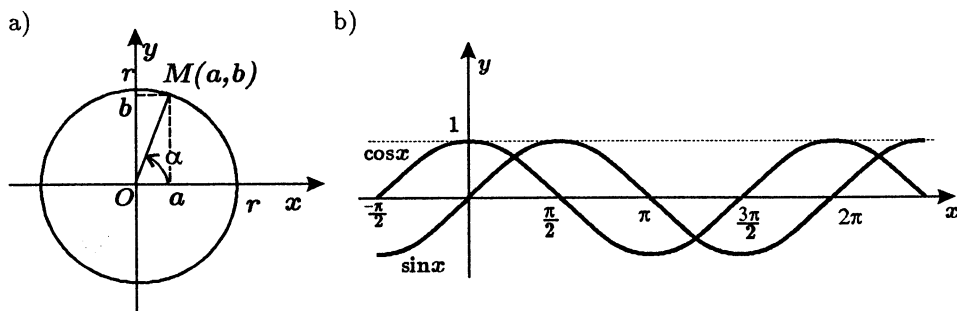
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sin \alpha = \sin (\alpha + 2\pi).$$

Tradycyjnie funkcje trygonometryczne rozpatrywane dla dowolnych kątów są zapisywane $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Wykres funkcji $\cos x$ otrzymamy, uwzględniając, że $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Oznacza to, że podstawowy fragment wykresu cosinusa dla $x \in (0, 2\pi)$ jest przesunięciem wykresu sinusa nad przedziałem $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Rys. 2.2.5b) przedstawia wykres funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$.



Rys. 2.2.5

Własności funkcji $\sin x$ i $\cos x$:

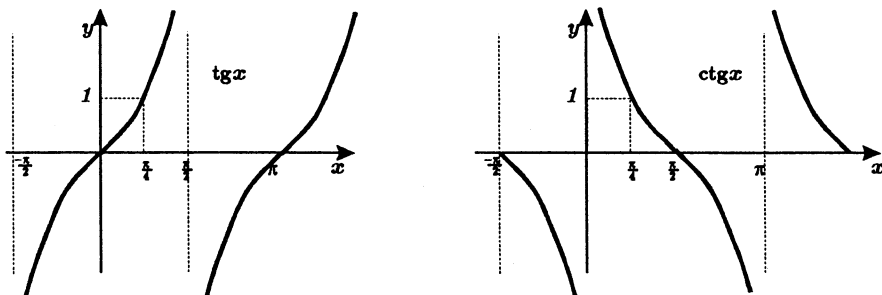
- dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$, wartości pokrywają przedział $(-1, 1)$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ - ograniczoność,
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(2\pi + x) = \sin x, \cos(2\pi + x) = \cos x$ - okresowość, podstawowy okres $T = 2\pi$.
- funkcje są przedziałami monotoniczne,
- $\sin(-x) = -\sin x$ - sinus jest funkcją nieparzystą,
- $\cos(-x) = \cos x$ - cosinus jest funkcją parzystą.

Wykres funkcji $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ otrzymamy, analizując przebieg zmian ilorazu $\frac{b}{a}$, gdy punkt $M = (b, a)$ przemieszcza się na okręgu o stałym promieniu r , $\alpha = \angle XOM$:

- $\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0$,
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ w ilorazie $\frac{b}{a}$ mianownik maleje od r do 0, licznik zaś rośnie od 0 do r , iloraz rośnie od 0 do $+\infty$,
- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ jest nieokreślony,
- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow$ w ilorazie $\frac{b}{a}$ mianownik jest ujemny o wartościach bezwzględnych rosnących od 0 do r , licznik dodatni $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ rośnie od $-\infty$ do 0,
- $\alpha = \pi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0$,
- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$, ponieważ $x < 0$ i $y < 0$; $|a|$ i $|b|$ zachowują się jak dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, co powoduje, że $\operatorname{tg} \alpha$ w tym przedziale przyjmuje wartości jak w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
- $\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ nieokreślony,
- $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow$ wykres jak w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Wynika stąd, że okresem funkcji tangens jest $T = \pi$.

Wykres funkcji $\operatorname{ctg} x$ można uzyskać, przeprowadzając analogiczną analizę lub korzystając z zależności $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(\pi/2 - x)$. Zatem aby uzyskać wykres $y = \operatorname{ctg} x$, odbijamy symetrycznie, względem osi OX , wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$, a następnie przesuwamy go o $-\pi/2$ wzdłuż osi OX . Rys. 2.2.6 przedstawia oba wykresy.



Rys. 2.2.6

Własności funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$:

- funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$,
- funkcja $f(x) = \operatorname{ctg} x$ jest określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$,
- są nieograniczone,
- są okresowe, podstawowym okresem jest $T = \pi$, to znaczy $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$,
- są nieparzyste, to znaczy $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,
- funkcja $\operatorname{tg} x$ jest przedziałami rosnąca,
- funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest przedziałami malejąca.

Podane informacje o funkcjach trygonometrycznych są jedynie sygnalizacją, podsumowaniem tego, o czym uczeń dowiaduje się w trakcie nauki szkolnej. Wiadomo, że funkcje te są stabilizowane, to znaczy istnieją tablice wartości funkcji dla kątów z przedziału $(0, \pi/2)$ oraz wzory zezwalające na podanie wartości funkcji dla dowolnego kąta za pomocą wartości podanych w tabelach (okresowość funkcji i wzory redukcyjne). Czytelnik w dowolnym zbiorze wzorów znajdzie brakujące mu informacje. Przytoczymy jedynie podstawowe tożsamości, to jest związki, jakie spełniają funkcje tego samego, dowolnego kąta α (pierwszy z nich nazywamy "jedyneką trygonometryczną"):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

2.3 Funkcje kołowe (cyklometryczne)

Funkcjami kołowymi nazywamy funkcje odwrotne do odpowiednio zawężonych funkcji trygonometrycznych.

Wiadomo, że funkcje trygonometryczne rozpatrywane w swoich naturalnych dziedzinach nie są różnowartościowe. Jednak ze względu na okresowość funkcji trygonometrycznych jest możliwe utworzenie takich zawężeń funkcji, że obraz przyjętej dziedziny zawężenia pokrywa się z obrazem dziedziny pełnej funkcji i że będą one bijekcjami.

Rozpatrujemy więc funkcje:

$$\begin{aligned} f_1 : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle &\rightarrow \langle -1, 1 \rangle, & f_1(x) &= \sin x, \\ f_2 : \langle 0, \pi \rangle &\rightarrow \langle -1, 1 \rangle, & f_2(x) &= \cos x, \\ f_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) &= \operatorname{tg} x, \\ f_4 : (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}, & f_4(x) &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Dla tych funkcji są określone funkcje odwrotne:

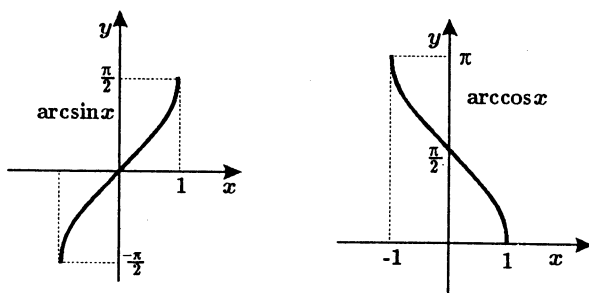
$$\arcsin x := f_1^{-1}(x) : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad (2.3.1)$$

$$\arccos x := f_2^{-1}(x) : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle, \quad (2.3.2)$$

$$\operatorname{arctg} x := f_3^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.3.3)$$

$$\operatorname{arcctg} x := f_4^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi). \quad (2.3.4)$$

Funkcje te nazywamy **funkcjami kołowymi**, odpowiednio: arcus sinus ($\arcsin$), arcus cosinus ($\arccos$), arcus tangens (arctg), arcus cotangens (arcctg). Wykresy tych funkcji są łukami symetrycznymi do wykresów funkcji odpowiednio f_1 , f_2 , f_3 , f_4 względem prostej o równaniu $y = x$. Wykresy funkcji kołowych znajdują się na Rys. 2.3.1 i Rys. 2.3.2.

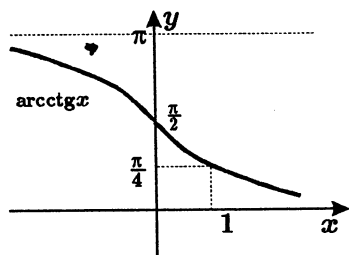
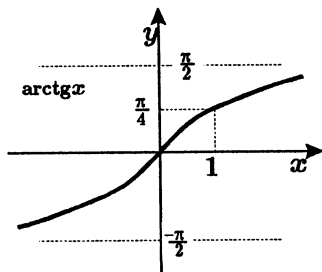


Rys. 2.3.1

Z własności funkcji odwrotnych, patrz (1.5.1), wynikają następujące związki, spełnione dla odpowiednich x :

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x, \\ \cos(\arccos x) &= x, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x, \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= x, \\ \arccos(\cos x) &= x, \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x, \\ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) &= x.\end{aligned}$$



Rys. 2.3.2

Przykład 2.3.1 Wykazać tożsamość:

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Jeżeli do znanego związku $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ podstawimy $\alpha := \arcsin x$, gdzie $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, to $\cos \alpha \geq 0$. Stąd

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

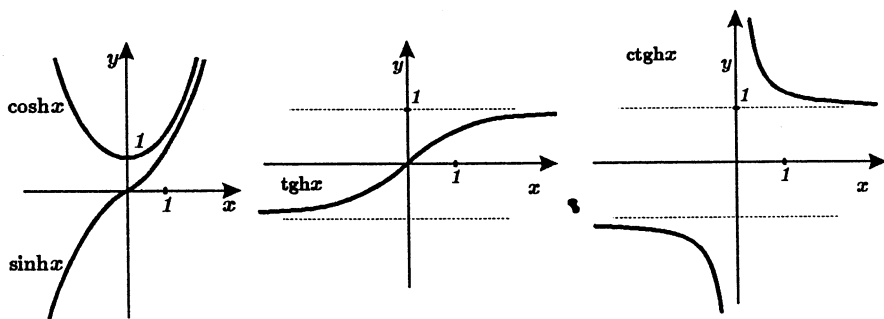
2.4 Funkcje hiperboliczne

Funkcja wykładnicza o podstawie e posłużyła do utworzenia funkcji zwanych **funkcjami hiperbolicznymi**. Mianowicie:

$$\begin{aligned}\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{sinus hiperboliczny,} \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{cosinus hiperboliczny.}\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Łatwo zauważyć, że dziedziną obu tych funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$, natomiast $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, a $\cosh(\mathbb{R}) = (1, \infty)$. Dokładne badanie przebiegu zmienności tych funkcji odłożymy

do czasu możliwości zastosowania metod analizy różniczkowej. Wykresy ilustrujące przebieg tych funkcji przedstawia Rys. 2.4.1.



Rys. 2.4.1

Wykres funkcji $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $a > 0$, nazywamy **linią łańcuchową**, ponieważ ma kształt, jaki przyjmuje pod wpływem siły ciężkości łańcuch (linia) zawieszony swobodnie w dwóch punktach, np. przewody elektryczne zwisające swobodnie między masztami.

Wprowadzone funkcje spełniają wiele tożsamości analogicznych do znanych tożsamości trygonometrycznych i to uzasadnia użycie nazwy opartej na funkcjach trygonometrycznych.

Analogicznie jak w trygonometrii wprowadza się również tangens hiperboliczny ($\operatorname{tgh} x$) i cotangens hiperboliczny ($\operatorname{ctgh} x$), mianowicie:

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{ctgh} x &:= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Dziedziną funkcji $\operatorname{tgh} x$ jest zbiór $\mathbb{R}$, przeciwdziedziną przedział $(-1, 1)$, natomiast dziedziną funkcji $\operatorname{ctgh} x$ jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, przeciwdziedziną zaś suma niewłaściwych przedziałów $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, patrz Rys. 2.4.1.

Przyjmując następującą umowę co do zapisu działań: $(\cosh x)^2 = \cosh^2 x$, $\cosh(2x) = \cosh 2x$, zapiszemy podstawowe tożsamości dla funkcji hiperbolicznych, to znaczy związki prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (ewentualnie z wyjątkiem zera dla $\operatorname{ctgh} x$):

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\
\sinh(-x) &= -\sinh x, \\
\cosh(-x) &= \cosh x, \\
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cdot \cosh x, \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y, \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y, \\
\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{ctgh} x &= 1.
\end{aligned}$$

Dla przykładu sprawdzimy jedną z nich, np.:

$$\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y = \sinh(x+y).$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\
&= \frac{1}{4} (e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) = \\
&= \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y) = P.
\end{aligned}$$

Wartości funkcji hiperbolicznych są stabilizowane, podobnie jak funkcje trygonometryczne czy funkcje logarytmiczne.

Przykład 2.4.1 Wykazać monotoniczność funkcji $f(x) = \sinh x$.

Skorzystamy z faktu, że funkcja e^x jest funkcją rosnącą, to znaczy dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 < x_2$ mamy:

$$e^{x_1} < e^{x_2} \quad \text{i} \quad e^{-x_2} < e^{-x_1}.$$

Dlatego dla funkcji $\sinh x$ zachodzi:

$$\sinh x_1 - \sinh x_2 = \frac{1}{2} (e^{x_1} - e^{x_2}) + \frac{1}{2} (e^{-x_2} - e^{-x_1}) > 0,$$

co oznacza, że funkcja $\sinh x$ jest rosnąca.

Funkcja $\sinh x$ jest bijekcją, ma więc jednoznaczną funkcję odwrotną, którą nazywa się **area sinus hiperboliczny** i którą zapisujemy $\operatorname{arsinh} x$. W definicji funkcji $\sinh x$ występuje funkcja wykładnicza e^x , zatem jej funkcja odwrotna jest określona za pomocą logarytmu naturalnego, to znaczy logarytmu o podstawie e ; mianowicie, korzystając z definicji funkcji $\sinh x$, wyznaczamy

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analogicznie można określić funkcję $\operatorname{arcosh} x$ jako odwrotną do funkcji $\cosh x$ zawężonej do przedziału $(1, \infty)$ bądź funkcję $\operatorname{artgh} x$ jako odwrotną do $\operatorname{tgh} x$ lub funkcję $\operatorname{arctgh} x$ jako odwrotną do $\operatorname{ctgh} x$ dla przedziału $(-\infty, -1)$ lub $(1, \infty)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \geq 1, \\ \operatorname{artgh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \\ \operatorname{arctgh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.\end{aligned}$$

2.5 Inne przykłady funkcji

I. Funkcje określone parametrycznie

Weźmy dwie funkcje x i y argumentu t określone na przedziale T ,

$$\left. \begin{aligned} x &= \Phi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned} \right\}, \quad t \in T. \quad (2.5.1)$$

Załóżmy, że funkcja $\Phi(t)$ jest różnowartościowa na przedziale T i że zbiorem jej wartości jest zbiór X . Wynika stąd, że istnieje funkcja odwrotna $t = \Phi^{-1}(x)$. Jeżeli w funkcji $y = \Psi(t)$ podstawimy $t = \Phi^{-1}(x)$, to mówimy, że na zbiorze X została określona funkcja złożona

$$f(x) = \Psi(\Phi^{-1}(x)). \quad (2.5.2)$$

Funkcje określone wzorami (2.5.1) i (2.5.2) są równoważne; pierwszą z nich nazywamy funkcją o przedstawieniu parametrycznym lub funkcją parametryczną.

Przykład 2.5.1 Dany jest układ funkcji parametru t :

$$\left. \begin{aligned} x &= t + t^3 \\ y &= t^2 \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5.3)$$

Czy istnieje funkcja $f(x)$ opisana równaniami (2.5.3)?

Zbadamy przede wszystkim funkcję $x(t)$, to jest pierwszą z funkcji układu (2.5.3).

Weźmy dwa dowolne argumenty t_1, t_2 spełniające nierówność $t_1 < t_2$ i rozpatrzmy różnicę $x_2 - x_1$:

$$x_2 - x_1 = t_2 + t_2^3 - t_1 - t_1^3 = (t_2 - t_1)(t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2 + 1).$$

W iloczynie występującym po prawej stronie pierwszy czynnik jest dodatni wobec przyjętego założenia, zaś dodatni znak drugiego czynnika wynika np. z badania tego wyrażenia jako trójkianu kwadratowego względem t_2 ; wtedy $\Delta = t_1^2 - 4(t_1^2 + 1) < 0$ dla każdego t_1 , zatem trójkian przyjmuje wartości dodatnie dla każdego t_2 . Ponieważ jest spełniona implikacja

$$t_1 < t_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

więc funkcja $x(t)$ jest ściśle rosnąca, jest więc różnowartościowa i istnieje funkcja odwrotna $t = \Phi(x)$. Złożenie funkcji $y(t)$ z funkcją $t = \Phi(x)$ jest szukaną funkcją opisaną parametrycznie.

Niestety, funkcji $\Phi^{-1}(x)$ nie potrafimy rachunkowo wyznaczyć, zatem o funkcji $f(x)$ wiemy, że istnieje, jednak znamy jedynie jej przedstawienie parametryczne.

Jeżeli w układzie funkcji parametrycznych postaci (2.5.1) nie mamy pewności, że $x = \Phi(t)$ ma funkcję odwrotną, natomiast wiemy, że funkcja $y = \Psi(t)$ ma funkcję odwrotną, to możemy ten układ utożsamiać z funkcją $f(y) = \Phi(\Psi^{-1}(y))$.

Jeżeli natomiast żadna z funkcji Φ, Ψ nie ma jednoznacznej funkcji odwrotnej, to układ równań (2.5.1) opisuje pewną krzywą, która nie musi być wykresem jednej funkcji.

II. Funkcja "znak x "

Jak już zostało wspomniane, w matematyce posługujemy się często funkcjami sklejanymi, niektóre z nich otrzymały własne nazwy, i tak

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Użyty skrót $\operatorname{sgn} x$, czytaj - signum x , oznacza w języku polskim - znak x , jest wygodnym zapisem używanym w czasie badania znaku pewnych wyrażeń, patrz Rys. 2.5.1a).

III. Cecha i mantysa liczby

Funkcja

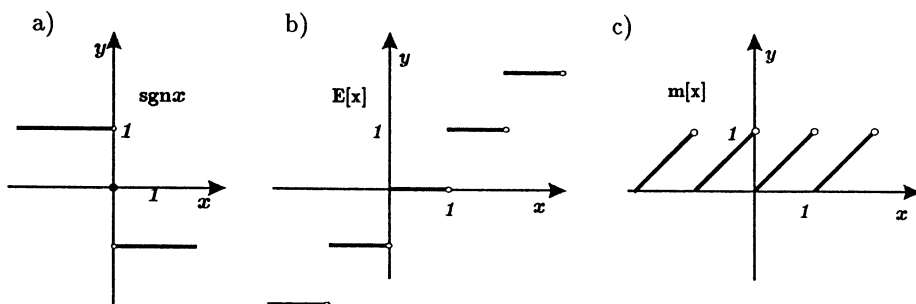
$$E[x] := k \text{ dla } x \in (k, k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.5)$$

określa największą liczbę całkowitą nie większą od x . Funkcję tę często nazywamy **całością** z x lub **cechą**, ponieważ jest ona użyta przy konstrukcji wartości logarytmów i w logarytmach występuje pod taką nazwą, patrz Rys. 2.5.1b).

Funkcja

$$m[x] := x - E[x] \text{ dla } x \in \mathbb{R} \quad (2.5.6)$$

określa "część niecałkowitą" liczby i jest nazywana **mantysą** liczby x . Podobnie jak funkcja $E[x]$ jest używana przy konstrukcji wartości logarytmów, patrz Rys. 2.5.1c).



Rys. 2.5.1

Ciekawe są przykłady funkcji, w których występują złożenia funkcji $\operatorname{sgn} x$ bądź $E[x]$ z innymi funkcjami.

Przykład 2.5.2 Sporządzić wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) + E[\sin x]$.

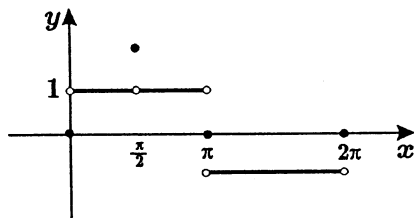
Dziedzina $D_f = \mathbb{R}$. Funkcja jest sumą dwóch składników, w obu $\sin x$ jest funkcją wewnętrzną. Ze względu na okresowość funkcji $\sin x$ również $f(x)$ jest okresowa, okresem podstawowym jest $T = 2\pi$. Funkcje zewnętrzne są funkcjami przedziałami stałymi, przedziały stałości funkcji ustalimy, analizując funkcję wewnętrzną. Analiza będzie przeprowadzona dla $x \in (0, 2\pi)$:

$$\operatorname{sgn}(\sin x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \\ 0 & \text{dla } x \in \{0, \pi, 2\pi\} \\ 1 & \text{dla } x \in (0, \pi) \end{cases}.$$

$$E[\sin x] = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \\ 0 & \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \{2\pi\} \\ 1 & \text{dla } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Stąd

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \{0, \pi, 2\pi\} \\ 1 & \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 2 & \text{dla } x = \frac{\pi}{2} \\ -2 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}.$$



Wykres funkcji przedstawia Rys. 2.5.2.

Rys. 2.5.2

IV. Funkcja Dirichleta

Na koniec przytoczymy funkcję o bardzo nietypowej konstrukcji. Mianowicie:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Podaną funkcję nazywamy **funkcją Dirichleta** lub **funkcją charakterystyczną** zbioru liczb wymiernych.

Można analizować, które z przytoczonych własności ma ona, jednak nie mamy możliwości ilustracji geometrycznej. Zauważamy, że jest to funkcja ograniczona, parzysta, okresowa – okresem może być każda dodatnia liczba wymierna, nie ma okresu podstawowego, nie jest też funkcją przedziałami monotoniczną.

2.6 Zadania

Wyznaczyć dziedzinę (naturalną) funkcji określonych wzorami (Zad. 2.1-2.6)

2.1. $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x^2+1}.$

2.3. $y = \log_{x+3}(5-x).$

2.5. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}.$

2.2. $f(x) = (x-3)^{2/3} + (3-x)^{3/2}.$

2.4. $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}}.$

2.6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}.$

Wyznaczyć dziedzinę (naturalną) i przeciwdziedzinę funkcji określonych wzorami (Zad. 2.7-2.10)

2.7. $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}.$

2.8. $f(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2-4}\right)^{1/3} + x^3.$

2.9. $f(x) = \sqrt{x^3+2x^2-5x-6}.$

2.10. $f(x) = \sqrt{\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^3-3x^2+x-3}}.$

Wyznaczyć dziedzinę (naturalną) i przeciwdziedzinę funkcji logarytmicznych i wykładniczych określonych wzorami (Zad 2.11-2.14)

$$2.11. y = \frac{1}{\log(x^2 - 6x + 5)}. \quad 2.12. y = \log_2(x - 2) + \log_3(x - 3) + \log_4(x - 4).$$

$$2.13. f(x) = 2^{\log_3(x+2)}. \quad 2.14. f(x) = \sqrt{3^x - 9^x}.$$

Wyznaczyć dziedzinę (naturalną) i przeciwdziedzinę funkcji trygonometrycznych i kołowych określonych wzorami (Zad. 2.15-2.23)

$$2.15. y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$2.16. y = \arccos(2x^2 - 1).$$

$$2.17. y = \arcsin \frac{x+1}{x-1}.$$

$$2.18. y = \arctg(x^4 + x^2 - 2).$$

$$2.19. y = \sin(2 \arccos x).$$

$$2.20. y = \arccos(2 \sin x).$$

$$2.21. f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right).$$

$$2.22. f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$2.23. f(x) = \arccos(\arccos x).$$

Wyznaczyć dziedzinę (naturalną) i przeciwdziedzinę funkcji hiperbolicznych i area określonych wzorami (Zad. 2.24-2.28)

$$2.24. y = \cosh(4 - x^2). \quad 2.25. y = \operatorname{arctgh} \frac{1}{x^2 + 1}. \quad 2.26. y = \operatorname{ctgh}(3x - 2).$$

$$2.27. y = \sinh \sqrt{x^2 - 4}. \quad 2.28. f(x) = \operatorname{arcosh} \frac{1-x}{x+1}.$$

Sporządzić wykresy funkcji (Zad. 2.29-2.42)

$$2.29. f(x) = |x + 1|.$$

$$2.30. f(x) = |1 - 2x| + 2|x + 2|.$$

$$2.31. f(x) = 2^{|x+1|}.$$

$$2.32. f(x) = |x^2 - 6x + 5|.$$

$$2.33. f(x) = |\log_2 x| + 2.$$

$$2.34. f(x) = \log_2(|x| - 2).$$

$$2.35. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos 2x).$$

$$2.36. f(x) = x \operatorname{sgn}(x^2 - 4).$$

$$2.37. f(x) = E[x^2].$$

$$2.38. f(x) = E[\operatorname{tg} x].$$

$$2.39. f(x) = \operatorname{tg} E[x].$$

$$2.40. f(x) = \cosh(|x| - 1) - \cosh 1.$$

$$2.41. f(x) = 2 \left| \operatorname{ctgh} \frac{x}{2} \right|.$$

$$2.42. f(x) = \frac{x+3}{x-2}.$$

Zbadać (z definicji) monotoniczność funkcji, określić rodzaj monotoniczności, a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (Zad 2.43-2.48)

$$2.43. f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$2.44. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$2.45. f(x) = \frac{x+a}{x+b}.$$

$$2.46. f(x) = a + \frac{b}{x}.$$

$$2.47. f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

$$2.48. f(x) = m[x] + 3.$$

$$2.49. f(x) = \frac{1}{m[x] + 1}.$$

Zbadać (z definicji) parzystość bądź nieparzystość funkcji
(Zad. 2.50-2.60)

$$2.50. f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x(x^3 + x)}.$$

$$2.51. f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 4}{x(x^2 + 1)}.$$

$$2.52. f(x) = \sin\left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}\right).$$

$$2.53. f(x) = \cos(x^3 - x).$$

$$2.54. f(x) = \cosh 2x.$$

$$2.55. f(x) = \sinh x \cdot \cosh 3x.$$

$$2.56. f(x) = \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{ctgh} x.$$

$$2.57. f(x) = \operatorname{lh} \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$2.58. f(x) = \log_3 2^{-x}.$$

$$2.59. f(x) = xe^{x^2+1}.$$

$$2.60. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Zbadać (z definicji) okresowość funkcji, wyznaczyć okres podstawowy
(Zad. 2.61-2.72)

$$2.61. f(x) = \sin \frac{x}{10}.$$

$$2.62. f(x) = \sin(ax + b).$$

$$2.63. f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

$$2.64. f(x) = x \sin x.$$

$$2.65. f(x) = \sin 2x + \cos 3x.$$

$$2.66. f(x) = \sin x + \operatorname{ctg}(2 - x).$$

$$2.67. f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

$$2.68. f(x) = m[3x + 2].$$

$$2.69. f(x) = m[3x^2 + 2].$$

$$2.70. f(x) = \operatorname{sgn}[\operatorname{tg} x].$$

$$2.71. f(x) = E[\operatorname{tg} x].$$

$$2.72. f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}.$$

Podać ograniczenia górne i dolne funkcji (Zad. 2.73-2.78)

$$2.73. f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$2.74. f(x) = E[\pi \sin x].$$

$$2.75. f(x) = \frac{1}{3 + \sin x}.$$

$$2.76. f(x) = \sin x + \cos x.$$

$$2.77. f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x+7}{x+3} & \text{dla } x > 1 \end{cases} . \quad 2.78. f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leq 1 \\ \ln x & \text{dla } 1 < x \leq e^2 \\ e^{-x} & \text{dla } x > e^2 \end{cases} .$$

2.79. Podać przykłady funkcji przedziałami rosnących, okresowych, nieograniczonych.

2.80. Podać przykłady funkcji przedziałami malejących, okresowych, nieograniczonych.

2.81. Podać przykłady funkcji przedziałami rosnących, okresowych, ograniczonych.

2.82. Podać przykłady funkcji przedziałami malejących, okresowych, ograniczonych.

2.83. Podać przykłady funkcji niemalejących (słabo rosnących), które nie są ściśle rosnące.

2.84. Podaj przykłady funkcji nierosnących (słabo malejących), które nie są ściśle malejące.

Sporządzić wykresy podanych funkcji sklepanych (Zad. 2.85-2.90)

$$2.85. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x+5}{2x+4}, & x > 1 \end{cases} \quad 2.86. f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1 \\ 2x-3, & x > 1 \end{cases}$$

$$2.87. f(x) = \begin{cases} \cosh x, & x \leq 0 \\ \sinh x + 1, & x > 0 \end{cases} \quad 2.88. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\rangle \\ 1, & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$2.89. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 2x^2+1, & 0 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases} \quad 2.90. f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$$

Wyznaczyć funkcję odwrotną funkcji f (Zad. 2.91-2.98)

$$2.91. f(x) = \ln(x^3 + 1), x > -1. \quad 2.92. f(x) = 3 \sin 2x + 4, x \in (0, \pi/2).$$

$$2.93. f(x) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right), x > 0. \quad 2.94. f(x) = 2 \operatorname{arctg}(2x+3), x \in \mathbb{R}.$$

$$2.95. f(x) = \frac{3x-6}{2x+5}, x \neq -5/2. \quad 2.96. f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}, x \leq -1.$$

$$2.97. f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, x \in \mathbb{R}. \quad 2.98. f(x) = 2 + \exp(x^2 - 1), x \geq 0.$$

Zbadać lub określić, posługując się wykresem, różnowartościowość podanych funkcji. W możliwych przypadkach wyznaczyć funkcję odwrotną (Zad. 2.99-2.108)

$$2.99. f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x). \quad 2.100. f(x) = x + E[x] \text{ dla } x \in (-2, 2).$$

$$2.101. f(x) = 3 + 2^{x-1}. \quad 2.102. f(x) = \cosh(2x^2 + 1).$$

$$2.103. f(x) = \log(x-2). \quad 2.104. f(x) = (x+2)^3.$$

$$2.105. f(x) = x \sin x. \quad 2.106. f(x) = 1 + \frac{2x-3}{3x+5}.$$

$$2.107. f(x) = \log_x 2. \quad 2.108. f(x) = \sqrt[5]{x^2+2x-1}.$$

Sporządzić wykres podanej funkcji. Dla każdej z nich podać takie obcięcie (zawężenia), które mają funkcję odwrotną. Wyznaczyć funkcje odwrotne utworzonych obcięć funkcji (Zad. 2.109-2.114)

$$2.109. f(x) = |x - 2| + |x + 4|.$$

$$2.110. f(x) = x^2 + 4x + 6.$$

$$2.111. f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x \leq 0 \\ 3x + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} . \quad 2.112. f(x) = xE[x], x \in \langle -2, 2 \rangle.$$

$$2.113. f(x) = \cos x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$2.114. f(x) = 3 - 2 \cosh(3x - 2).$$

Wyznaczyć obraz $f(A)$ oraz przeciwobraz $f^{-1}(B)$ dla funkcji f (Zad. 2.115-2.121)

$$2.115. f(x) = \log|x + 2|, A = \langle 0, 1 \rangle, B = \langle 0, 10 \rangle.$$

$$2.116. f(x) = 2^{3x+4}, A = \langle -1, 1 \rangle, B = \langle 8, 16 \rangle.$$

$$2.117. f(x) = 3 \sinh(x + 2), A = \langle -2, 0 \rangle, B = \langle 0, +\infty \rangle.$$

$$2.118. f(x) = x^2 + 4x - 5, A = \langle -1, 3 \rangle, B = \langle 0, 8 \rangle.$$

$$2.119. f(x) = 3 \sin 2x, A = \langle \frac{15}{8}\pi, \frac{19}{8}\pi \rangle, B = \langle -\infty, 0 \rangle.$$

$$2.120. f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9 & \text{dla } x \leq 0 \\ 3 - x & \text{dla } 0 < x \leq 3 \\ x^2 + 6x + 9 & \text{dla } x > 3 \end{cases}, A = \langle -1, 1 \rangle, B = \langle -1, 1 \rangle.$$

$$2.121. f(x) = \begin{cases} -2/x & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{1}{x^2 + 1} & \text{dla } -1 < x \leq 1 \\ 2/x & \text{dla } x > 1 \end{cases}, A = \langle 0, 1 \rangle, B = \langle 1, +\infty \rangle.$$

Zbudować funkcje złożone $f_1(x) = (h \circ g)(x)$ oraz $f_2(x) = (g \circ h)(x)$, określić ich dziedziny, jeżeli dane funkcje h oraz g są określone w swoich naturalnych dziedzinach (Zad. 2.122-2.131)

$$2.122. h(x) = 2x + 3, g(x) = \sqrt{x - 4}. \quad 2.123. h(x) = \sin x, g(x) = x^2.$$

$$2.124. h(x) = 2^{x+2}, g(x) = \log_2 x. \quad 2.125. h(x) = 2x, g(x) = \log_2 x.$$

$$2.126. h(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 1. \quad 2.127. h(x) = 4, g(x) = \sqrt{x}.$$

$$2.128. h(x) = |x + 2|, g(x) = \sin(x + 1). \quad 2.129. h(x) = \frac{x+a}{x+b}, g(x) = \frac{x+b}{x+a}.$$

$$2.130. h(x) = \frac{a}{x^2 + a}, g(x) = x^2 + b. \quad 2.131. h(x) = 1 + \ln 2x, g(x) = e^{x+1}.$$

Podać funkcje złożone $f \circ g$ w postaci wielomianów (Zad. 3.132-2.135)

$$2.132. f(x) = \log_4 x, g(x) = 2^{3x+4}. \quad 2.133. f(x) = \cos x, g(x) = \arccos x.$$

$$2.134. f(x) = \cos 3x, g(x) = \arccos x. \quad 2.135. f(x) = \sinh^2(2x), g(x) = \operatorname{arcosh} x.$$

Podać funkcje złożone $f \circ g$ w postaci funkcji wymiernych (Zad. 2.136-2.140)

$$2.136. f(x) = \operatorname{tg} 2x, g(x) = \operatorname{arctg} x. \quad 2.137. f(x) = \operatorname{ctgh} x, g(x) = \ln x.$$

$$2.138. f(x) = \operatorname{tgh}^2(3x), g(x) = \ln(x^2 + 1). \quad 2.139. f(x) = \cosh x, g(x) = \ln x.$$

$$2.140. f(x) = \operatorname{ctg}(\pi/2 - x), g(x) = \operatorname{arctg}(x + 2) + \operatorname{arctg} x^2.$$

Podać funkcje złożone $f \circ g$ w postaci funkcji niewymiernych (Zad. 2.141-2.143)

$$2.141. f(x) = \sin 2x, g(x) = \arccos x. \quad 2.142. f(x) = \cos(x/2), g(x) = \arccos x.$$

$$2.143. f(x) = \sinh x, g(x) = \operatorname{arcosh} x.$$

Utworzyć złożenia $f \circ g, g \circ f$, funkcji sklejanych f i g (Zad. 2.144-2.146)

$$2.144. f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leq 1 \\ 2e - e^{-x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

$$2.145. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x + 2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

$$2.146. f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1} & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{x}{x^2-1} & \text{dla } x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x+1} & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Podać wartość liczbową wyrażeń (Zad. 2.147-2.150)

$$2.147. 2 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctan \sqrt{3}.$$

$$2.148. \sin\left(2 \arccos \frac{1}{2}\right) - \cos\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \tan\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

$$2.149. \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \arccos\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) + 4 \arctan\left(2 \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

$$2.150. \cos(2 \arccos 0, 2) + \cos(2 \arcsin 0, 2).$$

Wykazać tożsamości (Zad. 2.151-2.154)

$$2.151. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ dla } x \in (-1, 1).$$

$$2.152. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

$$2.153. \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ dla } x \in (-1, 1).$$

$$2.154. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0.$$

Wykazać tożsamości dla funkcji hiperbolicznych określonych wzorami (2.4.1) i (2.4.2) (Zad. 2.155-2.158)

$$2.155. \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

$$2.156. \sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y.$$

$$2.157. \cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.$$

$$2.158. 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Następujące funkcje wymierne przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych (Zad. 2.159-2.170)

$$2.159. f(x) = \frac{2x + 2 + x^3 - 4x^2}{(x-2)(x-3)}.$$

$$2.160. f(x) = -\frac{-5x - 19 + 2x^2}{x^2 - x - 12}.$$

$$2.161. f(x) = \frac{2x^2 + 4 + 2x + x^5 + 4x^3}{x^3 + 4x}.$$

$$2.162. f(x) = -\frac{-3x^2 + 10 + x^4 - 2x^3}{(x-1)(x-3)(x+2)}.$$

$$2.163. f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$2.164. f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 3}{x^4 - 1}.$$

$$2.165. f(x) = \frac{4x^2 + 5 + x^3}{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}.$$

$$2.166. f(x) = \frac{-6x^2 + 5x + 3 + 2x^4 - x^3}{x^3 - 3x + 2}.$$

$$2.167. f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 3}{x^3(x+3)}.$$

$$2.168. f(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{(x+1)^3}.$$

$$2.169. f(x) = -\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$2.170. f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}.$$

Rozdział 3

Struktury algebraiczne

3.1 Działania w zbiorach

Definicja 3.1.1 *Dany jest zbiór A . Działaniem dwuczłonowym wewnętrznym lub krótko działaniem D w zbiorze A nazywamy każde odwzorowanie iloczynu kartezjańskiego $A \times A$ w zbiór A , to znaczy każde odwzorowanie przyporządkowujące dowolnej parze elementów $(a, b) \in A \times A$ ściśle określony element $D(a, b) \in A$. Piszemy $D : A \times A \rightarrow A$.*

W dalszym ciągu, dla wygody zapisu i analogii do znaków działań w arytmetyce, zamiast $D(a, b)$ będziemy czasami używać umownych znaków działania, np.:

$$a * b, \quad a \diamond b, \quad a \oplus b, \quad a \odot b.$$

Definicja 3.1.2 *Element $e \in A$ nazywamy elementem neutralnym lub modulem działania $*$: $A \times A \rightarrow A$, jeżeli*

$$\forall a \in A \quad a * e = e * a = a.$$

Twierdzenie 3.1.1 *Istnieje co najwyżej jeden element neutralny działania wewnętrznego $*$: $A \times A \rightarrow A$.*

Dowód. Istotnie, gdyby bowiem e i $e' \in A$ były dwoma różnymi elementami neutralnymi, $e \neq e'$, to

$$\begin{aligned} \forall a \in A \quad a * e &= e * a = a, \\ \forall b \in A \quad b * e' &= e' * b = b. \end{aligned}$$

Przyjmując w pierwszym związku $a = e'$, w drugim zaś $b = e$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} e' * e &= e * e' = e', \\ e * e' &= e' * e = e, \end{aligned}$$

skąd $e' = e$, co przeczy temu, że $e \neq e'$. To kończy dowód.

Definicja 3.1.3 *Jeżeli istnieje element neutralny e działania $*$: $A \times A \rightarrow A$ w zbiorze A , to dla dowolnego $a \in A$ każdy element $x \in A$ taki, że $a * x = x * a = e$, nazywamy inwersem elementu a i oznaczamy a^* .*

Dla elementu neutralnego działania $*$ zawsze istnieje inwers, jest nim on sam, gdyż $e * e = e$. Inwers dowolnego elementu $a \in A$ może istnieć lub nie, zależy to od własności działania $*$.

Definicja 3.1.4 *Działanie $*$: $A \times A \rightarrow A$ nazywamy działaniem:*

- **łącznym**, jeżeli $\forall a, b, c \in A \quad a * (b * c) = (a * b) * c$,
- **przemiennym**, jeżeli $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$.

Twierdzenie 3.1.2 *Jeżeli działanie $*$ jest łączne i ma element neutralny e , to dla dowolnego $a \in A$ istnieje co najwyżej jeden inwers.*

Dowód. Istotnie, gdyby bowiem a' i $a'' \in A$ były dwoma inwersami a , wówczas uwzględniając, że e jest elementem neutralnym, mielibyśmy:

$$\begin{aligned} a * a' &= a' * a = e, \\ a * a'' &= a'' * a = e, \\ a'' &= a'' * e = a'' * (a * a') = (a'' * a) * a' = e * a' = a', \end{aligned}$$

czyli istotnie $a' = a''$. Co kończy dowód.

Przykład 3.1.1 *Zbadaj własności działań $\oplus, \odot, *$ określonych w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych tak, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ jest*

$$x \oplus y = x + y, \quad x \odot y = x \cdot y, \quad x * y = \frac{x + 2y}{2}.$$

Działanie $\oplus$, czyli dodawanie liczb rzeczywistych, jest działaniem łącznym i przemennym. Elementem neutralnym jest liczba 0. Dla każdego elementu a istnieje jego inwers, zwany w tym działaniu **elementem przeciwnym**, jest nim liczba $-a$, to znaczy $a^* = -a$, co zapisujemy:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 &= 0 + a = a, \\ \forall a \in \mathbb{R} \quad a + (-a) &= 0. \end{aligned}$$

Działanie $\odot$, czyli mnożenie liczb rzeczywistych, jest działaniem łącznym, przemennym. Elementem neutralnym jest liczba 1. Dla każdego elementu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

istnieje jego inwers, zwany w tym działaniu **elementem odwrotnym**, oznaczamy go a^{-1} , to znaczy $a^* = a^{-1} = \frac{1}{a}$. Zapisujemy:

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a, \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a \cdot \frac{1}{a} &= 1.\end{aligned}$$

Działanie $*$ nie jest działaniem łącznym, ponieważ:

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x * (y * z) &= \frac{x + 2(y * z)}{2} = \frac{x + \frac{y+2z}{2}}{2} = \frac{2x + y + 2z}{4}, \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x * y) * z &= \frac{(x * y) + 2z}{2} = \frac{\frac{x+2y}{2} + 2z}{2} = \frac{x + 2y + 4z}{4}.\end{aligned}$$

Łatwo więc zauważyć, że istnieją $x, y, z \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z.$$

Można sprawdzić, że $*$ nie jest działaniem przemienne i nie ma elementu neutralnego.

Przykład 3.1.2 W zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych określamy działanie następująco:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \diamond b = r,$$

gdzie r jest resztą z dzielenia $(a + b)$ przez 5. Zbadaj własności tego działania.

Działanie $\diamond$ jest łączne i przemienne ze względu na łączność i przemienność dodawania. Nie istnieje element neutralny; gdyby istniał element neutralny x , to $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \diamond x = a$, co jest sprzeczne dla $a \geq 5$.

Przykład 3.1.3 Dla dowolnego niepustego zbioru Q niech $P(Q)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Q . Oczywiście:

$$\emptyset \in P(Q), \quad Q \in P(Q), \quad \forall A, B \in P(Q) \quad A \cap B \in P(Q).$$

Określimy działanie $\otimes : P(Q) \times P(Q) \rightarrow P(Q)$ następująco:

$$\forall A, B \in P(Q) \quad A \otimes B := A \cap B.$$

Zbadać własności tego działania.

Działanie $\otimes$ jest łączne, przemienne, ma element neutralny, którym jest Q . Inwers istnieje jedynie dla zbioru Q , jest nim ten sam element, to znaczy zbiór Q . Pozostałe elementy nie mają inwersu, gdyż równość $A \cap Q = Q$ spełnia tylko zbiór $A = Q$.

Definicja 3.1.5 *Niech będzie dana para zbiorów (X, A) . Każde odwzorowanie $d : X \times A \rightarrow A$ nazywamy działaniem zewnętrznym w zbiorze A . Oznacza to, że*

$$\forall \lambda \in X \quad \forall a \in A \quad \exists b \in A \quad d(\lambda, a) = b.$$

Zwykle elementy zbioru X nazywamy skalarami, a cały zbiór X zbiorem skalarów.

Analogicznie jak w przypadku działań wewnętrznych w zbiorze, również dla oznaczenia działania zewnętrznego d można używać umownych symboli. W dalszym ciągu zamiast $d(\lambda, a)$ będziemy pisali np. $\lambda \triangleleft a$ lub krótko λa .

Przykład 3.1.4 W zbiorze $\mathbb{R}^n$ rozważmy dwa działania

- działanie wewnętrzne $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwane dodawaniem wektorów, określone następująco: dla dowolnych wektorów

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

- działanie zewnętrzne $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwane mnożeniem wektora przez skalar, określone następująco: dla dowolnego wektora $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ oraz dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot a := (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Działania te mają następujące własności:

- $\forall a \in \mathbb{R}^n \quad 1 \cdot a = a$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \cdot (\mu \cdot a) = \mu \cdot (\lambda \cdot a) = (\lambda\mu) \cdot a$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$, własność ta oznacza rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania wektorów,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$, własność ta oznacza rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania skalarów.

Definicja 3.1.6 *Struktura algebraiczna jest układem zbiorów wyposażonym w pewną liczbę działań wewnętrznych i w pewną liczbę działań zewnętrznych spełniających określone własności.*

W zastosowaniach najczęściej występują struktury złożone z jednego zbioru oraz jednego lub dwóch działań wewnętrznych i co najwyżej z jednego działania zewnętrznego. Do podstawowych struktur należą:

- grupa,
- pierścień,
- ciało,
- przestrzeń liniowa.

3.2 Grupa

Definicja 3.2.1 Grupą nazywamy strukturę algebraiczną (X, D) złożoną ze zbioru X i jednego działania dwuczłonowego wewnętrznego $D : X \times X \rightarrow X$, mającego własności:

1. Działanie D jest łączne.
2. W zbiorze X istnieje element neutralny.
3. Dla każdego $a \in X$ istnieje inwers $a^* \in X$.

Grupę oznaczamy $\mathcal{G} = (X, D)$. Jeżeli ponadto działanie D jest przemienne, to parę (X, D) nazywamy grupą przemienną lub grupą abelową.

Przykład 3.2.1 Struktura $(\mathbb{R}, +)$, to znaczy zbiór $\mathbb{R}$ z dodawaniem, jest grupą przemienną, podobnie jak zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z mnożeniem liczb rzeczywistych jest grupą przemienną.

Przykład 3.2.2

Dany jest zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Określamy w nim działanie $\diamond$ jak w Przykładzie 3.1.2, to znaczy $\forall a, b \in A \ a \diamond b = r$, gdzie r jest resztą z dzielenia $a + b$ przez 5. Wyniki działań zanotujemy w tabelce.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Symetria tej tabelki wskazuje na to, że działanie jest przemienne, pierwsza kolumna i pierwszy wiersz wskazują, że elementem neutralnym jest $e = 0$. Ponieważ w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się element neutralny oraz działanie jest przemienne, więc dla każdego elementu istnieje element odwrotny. Można również sprawdzić, że działanie jest łączne, zatem zbiór A jest z wprowadzonym działaniem $\diamond$ grupą przemienną.

Z definicji grupy oraz z Twierdzenia 3.1.2 wynika:

1. Jeżeli zbiór X z działaniem $*$ jest grupą, to każdy element $a \in X$ ma dokładnie jeden inwers $a^* \in X$.
2. Element neutralny e jest swoim inwersem.
3. $\forall a, b \in X \ a = b^* \Rightarrow b = a^*$.
4. $\forall a, b \in X \ (a * b)^* = b^* * a^*$.
5. $\forall a, b, c \in X \ a * c = b * c \Rightarrow a = b$ i $c * a = c * b \Rightarrow a = b$.

Twierdzenie 3.2.1 W grupie $(X, *)$ równania (z niewiadomą x)

$$a * x = b, \quad x * a = b$$

są rozwiązywalne jednoznacznie, ich jedynymi rozwiązaniami są odpowiednio $a^* * b$ i $b * a^*$.

Dowód. Gdyby x_1 i x_2 były dwoma rozwiązaniami np. równania $a * x = b$, wówczas byłoby $a * x_1 = a * x_2$, skąd $x_1 = x_2$. Ponadto sprawdzamy, że element $a^* * b$ jest rozwiązaniem równania $a * x = b$, mianowicie:

$$a * (a^* * b) = (a * a^*) * b = e * b = b.$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla drugiego równania.

Definicja 3.2.2 Podgrupą grupy $G = (X, D)$ nazywamy każdy podzbiór zbioru X , który wraz z działaniem D jest grupą.

Przykład 3.2.3 Zbiór liczb wymiernych z działaniem dodawania jest grupą. Grupa ta, to znaczy para $(\mathbb{Q}, +)$, jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}, +)$.

3.3 Izomorfizm grup

Definicja 3.3.1 Rozpatrzmy dwie grupy: (A, D_1) , (A, D_2) . Jeżeli istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) $f : A \rightarrow B$, takie że

$$\forall x, y \in A \quad f(D_1(x, y)) = D_2(f(x), f(y)),$$

to nazywamy je **izomorfizmem przekształcającym** A na B , a grupy (A, D_1) , (B, D_2) nazywamy grupami izomorficznymi.

Przykład 3.3.1 Rozpatrzmy grupy $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ oraz funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ określoną wzorem $f(x) = 2^x$. Ponieważ $f(x)$ jest bijekcją oraz

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \mathbb{R}_+ \wedge f(y) \in \mathbb{R}_+ \wedge f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y),$$

zatem grupy $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ są izomorficzne.

Ponieważ w naszych rozważaniach interesujemy się nie charakterem elementów zbioru, lecz własnościami działań wykonywanych na tych elementach, więc grupy izomorficzne uważamy za nierozróżnialne. Izomorficzność grup jest relacją równoważnościową w zbiorze wszystkich grup. Klasę równoważności względem tej relacji stanowią wszystkie grupy izomorficzne.

Jeżeli pojęcie izomorfizmu i grup izomorficznych poddamy pewnemu uogólnieniu, zmieniając wymagania co do odwzorowania f , to otrzymamy nowe, bardziej przydatne pojęcie, a mianowicie:

Definicja 3.3.2 *Odwzorowanie f nazywa się homomorfizmem grupy (A, D_1) w grupę (B, D_2) , jeżeli $f : A \rightarrow B$ i dla dowolnych $x, y \in A$ jest*

$$f(D_1(x, y)) = D_2(f(x), f(y)).$$

Grupę (A, D_1) nazywamy wtedy grupą homomorficzną z grupą (B, D_2) .

Przykład 3.3.2 *Pozpatrzmy dwie grupy: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych, oraz funkcję $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ określoną wzorem $f(x) = 2^x$. Wówczas mamy:*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

Grupa $(\mathbb{Z}, +)$ jest homomorficzna z grupą $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Zauważmy jednak, że istnieją liczby rzeczywiste dodatnie, które nie są wartościami funkcji $f(x)$ dla żadnej liczby całkowitej, zatem grupy te nie są izomorficzne (gdyż $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{R}_+$).

Ponieważ izomorfizm jest bijekcją, homomorfizm zaś odwzorowaniem jednej grupy w drugą, więc każdy izomorfizm grup jest jednocześnie ich homomorfizmem.

Homomorfizmy mają następujące własności:

1. Niech f będzie homomorfizmem (A, D_1) w (B, D_2) . Niech e i e' oznaczają elementy neutralne tych grup. Wtedy

$$f(e) = e',$$

$$\forall x \in A \quad f(x^*) = (f(x))^*.$$

2. Niech f będzie homomorfizmem (A, D_1) w (B, D_2) .

- Jeżeli (A', D_1) jest podgrupą grupy (A, D_1) , to jej obraz poprzez f , czyli $(f(A'), D_2)$, jest podgrupą grupy (B, D_2) .
- Jeżeli (B', D_2) jest podgrupą grupy (B, D_2) , to jej przeciwobraz poprzez f , czyli $(f^{-1}(B'), D_1)$, jest podgrupą grupy (A, D_1) .

Definicja 3.3.3 Jądrem homomorfizmu f grupy (A, D_1) w (B, D_2) nazywamy zbiór:

$$\ker f := \{x \in A : x = f^{-1}(\{e'\})\},$$

gdzie e' jest elementem neutralnym grupy (B, D_2) , to znaczy jądro jest przeciwobrazem zera.

Oznacza to, że jądrem homomorfizmu jest zbiór wszystkich elementów grupy (A, D_1) , które poprzez odwzorowanie f przechodzą w element neutralny grupy (B, D_2) , to znaczy

$$\ker f = \{x \in A : f(x) = e'\}.$$

Przykład 3.3.3 Wyznaczyć jądro homomorfizmu z Przykładu 3.3.2.

$$\ker f = \{x \in \mathbb{Z} : x = f^{-1}(\{e'\})\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = \lg_2 1\} = \{0\}.$$

Jądrem w tym przykładzie jest zbiór jednoelementowy $\{0\}$.

Definicja 3.3.4 Obrazem homomorfizmu f nazywamy zbiór

$$\operatorname{im} f = \{b \in B : \exists a \in A \quad b = f(a)\}.$$

Przykład 3.3.4 Określić obraz homomorfizmów grup określonych w Przykładach 3.3.1 i 3.3.2.

Dla funkcji f z Przykładu 3.3.1 mamy:

$\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$, a dla funkcji f z Przykładu 3.3.2:

$$\operatorname{im} f = \{b \in \mathbb{R}_+ : \exists a \in \mathbb{Z} \quad b = 2^a\}.$$

Obecnie podamy twierdzenie, które jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by homomorfizm był izomorfizmem.

Twierdzenie 3.3.1 Na to, by homomorfizm był izomorfizmem, potrzeba i wystarcza, by $f(A) = B$ i by jądro odwzorowania f było zbiorem jednoelementowym.

Dowód. Niech e i e' oznaczają elementy neutralne, odpowiednio, grup (A, D_1) i (B, D_2) . Z założenia mamy: f jest homomorfizmem, takim że $f(A) = B$ i $\ker f = \{a\}$. Aby wykazać, że f jest izomorfizmem, należy pokazać, że jest to odwzorowanie różnowartościowe.

Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy istnieją elementy a_1, a_2 , $a_1 \neq a_2$, takie że

$$D_2(f(a_1), f(a_2^*)) = e'.$$

Z własności homomorfizmu i z faktu, że jądro jest jednoelementowe, wynika, że równość powyższa jest równoważna następującemu faktowi: istnieje dokładnie jeden element $e' \in B$, taki że:

$$[D_2(f(a_1), f(a_2^*)) = e'] \Leftrightarrow [f(D_1(a_1, a_2^*)) = e'] \Leftrightarrow [D_1(a_1, a_2^*) = e] \Leftrightarrow (a_1 = a_2).$$

Końcowa równość jest sprzeczna z przyjętym założeniem, zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Wykazane twierdzenie jest bardzo wygodnym kryterium badania homomorfizmów, używanym w wielu zadaniach i zagadnieniach.

Przykład 3.3.5 Niech G będzie zbiorem przekształceń f zbioru $\mathbb{R}$ na siebie postaci: $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a \neq 0$.

1. Wykazać, że $(G, \circ)$ jest grupą, jeżeli działanie $\circ$ oznacza składanie przekształceń.
2. Pokazać, że odwzorowanie h przyporządkowujące przekształceniu f liczbę a jest homomorfizmem grupy $(G, \circ)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
3. Wyznaczyć jądro tego homomorfizmu.

Ad 1. Wiadomo, że składanie odwzorowań, jeżeli jest określone, jest łączne (patrz wnioski z Definicji 1.5.10). Superpozycja odwzorowań postaci f jest zawsze określona, więc działanie $\circ$ jest łączne. Elementem neutralnym działania $\circ$ w zbiorze G jest odwzorowanie identycznościowe $\text{Id}(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Rzeczywiście, z własności odwzorowania identycznościowego, dla każdego f , mamy (patrz wnioski z Definicji 1.5.11):

$$\text{Id} \circ f = f \circ \text{Id} = f.$$

Ponadto $\text{Id} \in G$, ($a = 1$, $b = 0$).

Niech $f \in G$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Wyznamy inwers dowolnego przekształcenia $f \in G$, to znaczy odwzorowanie $g \in G$ postaci $g(x) = cx + d$, $c \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, takie by

$$f \circ g = g \circ f = \text{Id}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(cx + d) = acx + ad + b, & x \in \mathbb{R}, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = acx + cb + d, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

więc aby g było inwersem, musi zachodzić

$$\begin{aligned}ac &= 1, \\ad + b &= 0, \\cb + d &= 0,\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy: $c = \frac{1}{a}$, $d = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, czyli inwersem odwzorowania f , $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ jest odwzorowanie g ,

$$g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

należące do G i będące oczywiście odwzorowaniem odwrotnym do f .

Zatem para $(G, \circ)$ jest grupą. Nie jest to grupa abelowa, ponieważ składanie odwzorowań nie jest przemienne.

Ad 2. Mamy pokazać, że odwzorowanie $h : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h(f) = a$, gdzie $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, jest homomorfizmem grupy $(G, \circ)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Należy zatem pokazać, że dla dowolnych przekształceń $f_1, f_2 \in G$, $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$, $a_1, a_2 \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, zachodzi:

$$h(f_1 \circ f_2) = h(f_1) \cdot h(f_2) = a_1 a_2.$$

Istotnie: $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1$, skąd

$$h(f_1 \circ f_2) = a_1 a_2.$$

Ad 3. Ponieważ elementem neutralnym grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest liczba 1, więc jądrem homomorfizmu h będzie zbiór tych odwzorowań f , $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, których obrazem poprzez h jest liczba 1, to znaczy

$$\ker h = \{f \in G : f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ponieważ nie jest to zbiór jednoelementowy, więc homomorfizm ten nie jest izomorfizmem.

3.4 Ciało

Definicja 3.4.1 *Ciałem nazywamy strukturę algebraiczną $(X, \oplus, \odot)$ złożoną ze zbioru X i określonych w nim dwóch działań dwuczłonowych wewnętrznych $\oplus, \odot$ o następujących własnościach:*

1. *Struktura $(X, \oplus)$ jest grupą przemenną, jej element neutralny nazywamy zerem ciała i oznaczamy symbolem O .*

2. Struktura $(X \setminus \{O\}, \odot)$ jest grupą przemenną, element neutralny działania $\odot$ musi być różny od O , nazywamy go **jednością** ciała i oznaczamy symbolem I .
3. Działanie $\odot$ jest rozłączne względem działania $\oplus$ (przyjmujemy, że najpierw wykonujemy działanie $\odot$), to znaczy

$$\forall a, b, c \in X \quad (a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c.$$

Z definicji tej wynika, że do zbioru X muszą należeć co najmniej dwa elementy: O i I .

Działanie $\oplus$ nazywamy działaniem **addytywnym** (dodawaniem), invers elementu a nazywamy **elementem przeciwnym** elementu a i oznaczamy $-a$, działanie $\odot$ zaś nazywamy działaniem **multiplikatywnym** (mnożeniem), invers elementu a nazywamy **elementem odwrotnym** i oznaczamy a^{-1} lub $\frac{1}{a}$.

Jeżeli struktura $(X, \oplus, \odot)$ jest ciałem, w którym X jest zbiorem liczbowym, działania $\oplus, \odot$ zaś są odpowiednio dodawaniem i mnożeniem liczb, to ciało $(X, \oplus, \odot)$ nazywamy **ciałem liczbowym**.

Przykład 3.4.1 Ciałami liczbowymi są np. struktury

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych – **ciało liczb wymiernych**,
 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych – **ciało liczb rzeczywistych**.

Przykład 3.4.2 Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych – nie jest ciałem, ponieważ $(\mathbb{Z} \setminus \{O\}, \cdot)$ nie jest grupą (nie wszystkie elementy mają element odwrotny)

Przykład 3.4.3 Struktura $(X, +, \circ)$ – gdzie X jest zbiorem funkcji liniowych postaci $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, natomiast $+$ dodawaniem funkcji, $\circ$ składaniem funkcji – jest ciałem (nieliczbowym).

W następnym rozdziale podamy przykład ciała liczbowego będącego uogólnieniem ciała liczb rzeczywistych. Będą omówione własności działań w tym ciele. Będzie to ciało liczb zespolonych.

3.5 Zadania

Zbadać własności działania $*$ określonego w zbiorze $\mathbb{R}_+$ (Zad. 3.1-3.6)

$$3.1. a * b := a + b + ab.$$

$$3.2. a * b := a + b + 1.$$

$$3.3. a * b := ab - a - b.$$

$$3.4. a * b := \frac{a+b}{2}.$$

$$3.5. a * b := \ln a + \ln b.$$

$$3.6. a * b := a^b.$$

Zbadać własności działania $\circ$ określonego w zbiorze $\mathbb{R}$ (Zad. 3.7-3.11)

$$3.7. x \circ y := \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$3.8. x \circ y := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3.9. x \circ y := \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

$$3.10. x \circ y := |x| + |y|.$$

$$3.11. x \circ y := \arccos x + \arccos y.$$

Zbadać własności działania $\diamond$ określonego w zbiorze $\mathbb{R}^2$ (Zad. 3.12-3.17)

$$3.12. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

$$3.13. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1 y_2, x_2 y_1).$$

$$3.14. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1, y_2).$$

$$3.15. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$3.16. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

$$3.17. (x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) := (x_1 + y_2, x_2 + y_1).$$

Sprawdzić, czy superpozycja (składanie funkcji) jest działaniem wewnętrznym w zbiorze A (Zad. 3.18-3.23)

$$3.18. A - \text{zbiór funkcji liniowych } y = ax, a \in \mathbb{R}.$$

$$3.19. A - \text{zbiór wszystkich funkcji liniowych } y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}.$$

$$3.20. A - \text{zbiór homografii } y = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0.$$

$$3.21. A - \text{zbiór trójmianów kwadratowych } y = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$3.22. A - \text{zbiór wielomianów dowolnego stopnia}.$$

$$3.23. A - \text{zbiór funkcji trygonometrycznych}.$$

Zbadać własności działania $*$ określonego w zbiorze zdań (Zad. 3.24-3.27)

$$3.24. p * q := p \wedge q.$$

$$3.25. p * q := p \vee q.$$

$$3.26. p * q := p \Rightarrow q.$$

$$3.27. p * q := p \Leftrightarrow q.$$

W zbiorze dzielników naturalnych liczby 6 określamy działania $*$, Δ w następujący sposób: $a * b := NWW(a, b)$, $a \Delta b := NWD(a, b)$ (Zad. 3.28-3.32)

$$3.28. \text{Zbadać własności tych działań.}$$

3.29. Zbadać, czy działanie $*$ jest rozdzielne względem działania Δ .

3.30. Zbadać, czy działanie Δ jest rozdzielne względem działania $*$.

3.31. Zbadać, czy działanie Δ jest rozdzielne względem działania Δ .

3.32. Zbadać, czy działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $*$.

3.33. Działaniu o określonym w zbiorze $\{a, b, c, d\}$ (i odpowiednio w w zbiorze $\{a, b, c, d, f\}$) odpowiada tabelka:

a)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

b)

$\circ$	a	b	c	d	f
a	b	a	a	d	f
b	a	b	b	a	b
c	c	b	c	d	f
d	a	b	d	f	d
f	d	f	f	d	f

Czy tak określone działanie ma element neutralny, a jeśli tak, to czy każdy element ma element odwrotny, czy działanie jest działaniem przemennym?

Zbadać, czy para $(X, *)$ jest grupą (Zad. 3.34-3.39)

3.34. $X = \mathbb{Z}$, $a * b := a + b + 2$.

3.35. $X = \{x = a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$, $x * y := x + y$.

3.36. $X = (1, +\infty)$, $a * b := ab - a - b + 2$.

3.37. $X = \mathbb{R}$, $a * b := \frac{a+b}{2}$.

3.38. $X = \mathbb{R}$, $a * b := \frac{a+b}{1-ab}$.

3.39. $X = \mathbb{R}$, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sprawdzić, czy zbiór $X = \mathbb{R}^2$ wraz z działaniem $*$ jest grupą. Działanie $*$ określamy dla dowolnych $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ (Zad. 3.40-3.43)

3.40. $x * y := (x_1 y_1, x_1 y_2 + y_1)$.

3.41. $x * y := (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$.

3.42. $x * y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$.

3.43. $x * y := (x_2 y_1, x_1 y_2)$.

Wskazać najmniejszą podgrupę grupy $(\mathbb{Z}, +)$ zawierającą zbiór X (Zad. 3.44-3.47)

3.44. $X = \{2\}$.

3.45. $X = \{0\}$.

3.46. $X = \{0, 1\}$.

3.47. $X = \{n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

3.48. Wskazać wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

Sprawdzić, czy odwzorowanie f grup $(\mathbb{R}^2, +)$, $(\mathbb{R}^3, +)$ jest homomorfizmem. Wyznaczyć jądro tego homomorfizmu (Zad. 3.49-3.52)

$$3.49. f((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0).$$

$$3.50. f((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 x_2, x_2 - x_1).$$

$$3.51. f((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 + x_2, 2x_1). \quad 3.52. f((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, 0, x_2 - x_1).$$

Wskazać, jeżeli istnieje, homomorfizm grupy G w grupę H (Zad. 3.53-3.54)

$$3.53. G = (\mathbb{Z}, +), \quad H = (\mathbb{Q}, +). \quad 3.54. G = (\mathbb{R}, +), \quad H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Wskazać, które z podanych odwzorowań $f: G \rightarrow G$ są homomorfizmami grupy $G = (\mathbb{Z}, +)$ w siebie, które są izomorfizmami, podać ich jądra i obrazy (Zad. 3.55-3.58)

$$3.55. f(x) = 3x.$$

$$3.56. f(x) = x^2.$$

$$3.57. f(x) = 0.$$

$$3.58. f(x) = 2^x.$$

Wskazać, które z podanych odwzorowań $f: G \rightarrow H$ są homomorfizmami grupy $G = (\mathbb{R}, +)$ w $H = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, które są izomorfizmami, podać ich jądra i obrazy (Zad. 3.59-3.60)

$$3.59. f(x) = e^{3x}.$$

$$3.60. f(x) = 1 + 10^x.$$

3.61. Wykazać, że zbiór M_2 macierzy kwadratowych, to znaczy wyrażeń postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$, jest grupą ze względu na działanie mnożenia zdefiniowane następująco: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix}$.

Wskazać podgrupy grupy M_2 , określonej w poprzednim zadaniu, zawierające element A (Zad. 3.62-3.63)

$$3.62. A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{Z}. \quad 3.63. A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{R}.$$

3.64. Kiedy podgrupa $(G_1, \circ)$ grupy $(G, \circ)$ jest homomorficzna z $(G, \circ)$?

Zbadać czy dane struktury są ciałami (Zad. 3.65-3.70)

$$3.65. (\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot), \text{ gdzie } \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{q \in \mathbb{R} : q = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

$$3.66. (\mathbb{Z}(\sqrt{2}), +, \cdot), \text{ gdzie } \mathbb{Z}(\sqrt{2}) := \{q \in \mathbb{R} : q = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3.67. (\mathbb{L}, +, \circ), \text{ gdzie } \mathbb{L} \text{ jest zbiorem funkcji liniowych postaci } y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, \\ + \text{ dodawanie funkcji, } \circ \text{ składanie funkcji.}$$

3.68. $(\mathbf{H}, +, \circ)$, gdzie $\mathbf{H}$ jest zbiorem homografii postaci $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $+$ dodawanie funkcji, $\circ$ składanie funkcji.

3.69. $(Z_6, *, \Delta)$, gdzie X_n zbiór dzielników naturalnych liczby n , $*$ określa najmniejszą wspólną wielokrotność, Δ największy wspólny dzielnik.

Wskazać najmniejsze ciało liczbowe $(X, +, \cdot)$, które zawiera zbiór X
(Zad. 3.70-3.72)

3.70. $X = \{0, 1\}$. **3.71.** $X = \{0, 1, 2\}$. **3.72.** $X = \{2, 3\}$.

Rozdział 4

Działania na liczbach zespolonych

4.1 Liczby zespolone

4.1.1 Ciało liczb zespolonych

Ciałem liczbowym będącym uogólnieniem liczb rzeczywistych jest ciało liczb zespolonych, które definiujemy następująco:

Definicja 4.1.1 Niech $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanych par liczb rzeczywistych. W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzimy działania dodawania $\oplus$ oraz mnożenia $\odot$ w następujący sposób:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} z_1 \oplus z_2 &= (a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d), \\ z_1 \odot z_2 &= (a, b) \odot (c, d) := (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Strukturę $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ nazywamy **ciałem liczb zespolonych** i oznaczamy w skrócie $\mathbb{C}$.

Działania $\oplus, \odot$ nazywamy odpowiednio dodawaniem i mnożeniem w ciele liczb zespolonych. Łatwo sprawdzić, że są one przemienne, łączne oraz że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Sprawdźmy, dla przykładu, prawo rozdzielności.

$$\begin{aligned} ((a, b) \oplus (c, d)) \odot (e, f) &= (a + c, b + d) \odot (e, f) = \\ &= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) = \\ &= (ae - bf, af + be) \oplus (ce - df, cf + de) = \\ &= ((a, b) \odot (e, f)) \oplus ((c, d) \odot (e, f)). \end{aligned}$$

W dalszym ciągu działania dodawania i mnożenia w zbiorze $\mathbb{C}$ będziemy oznaczali odpowiednio: $+$, $\cdot$, a tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, symbol mnożenia może być pomijany. Elementy zbioru $\mathbb{C}$ będziemy nazywać **liczbami zespolonymi**, i oznaczali najczęściej literami z, w, ξ, ζ .

Zerem ciała $\mathbb{C}$ jest liczba $0 = (0, 0)$, a elementem przeciwnym elementu $z = (a, b)$ jest $-z = (-a, -b)$.

Jednością ciała jest liczba $1 = (1, 0)$, a elementem odwrotnym elementu $z = (a, b) \neq (0, 0)$ jest $\frac{1}{z} = z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

Dla przykładu pokażemy, jak wyznaczyć element odwrotny, to znaczy $\frac{1}{z}$ dla $z = (a, b)$.

Niech $\frac{1}{z} = (x, y)$. Para ta ma spełniać równość $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$. Wykorzystując definicję mnożenia, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem dla $(a, b) \neq (0, 0)$ jest para

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Podobnie jak dla ciała liczb rzeczywistych, odejmowanie $z_1 - z_2$ określamy jako dodawanie $z_1 + (-z_2)$, a dzielenie $\frac{z_1}{z_2}$ jako mnożenie $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$. Zatem

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \text{ dla } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Weźmy dwie liczby zespolone postaci $z_1 = (a, 0)$, $z_2 = (c, 0)$. Korzystając z definicji sumy i iloczynu liczb zespolonych, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c, 0), \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac, 0). \end{aligned}$$

Powyższe wyniki pozwalają na to, aby liczbę zespoloną $(a, 0)$ utożsamiać z liczbą rzeczywistą a , to znaczy:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a = (a, 0) \in \mathbb{C}.$$

Ponadto ciało liczb rzeczywistych zawiera się w ciele liczb zespolonych.

Definicja 4.1.2 Liczbę zespoloną $z = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną** i oznaczamy symbolem i , zatem

$$i := (0, 1).$$

Pomnóżmy liczbę i przez siebie, to znaczy $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Stąd

$$i^2 = -1.$$

4.1.2 Postać kartezjańska liczby zespolonej

Twierdzenie 4.1.1 *Każdą liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można przedstawić w postaci*

$$z = a + bi,$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, natomiast i jest jednostką urojoną.

Istotnie, mamy: $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Postać liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy **postacią kartezjańską**. Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z , liczbę b zaś nazywamy **częścią urojoną** liczby z . Oznaczamy:

$$\operatorname{Re} z := a, \quad \operatorname{Im} z := b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

czytamy odpowiednio: *realis z* , *imaginis z* .

Działania takie jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie wykonywane na liczbach zespolonych danych w postaci kartezjańskiej wykonujemy jak na wyrażeniach algebraicznych, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$. Dlatego często postać kartezjańską nazywamy **postacią algebraiczną** liczby zespolonej.

Wobec tego dla $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i, \\ z_1 z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i, \\ -z &= -a - bi, \\ z_1 - z_2 &= (a - c) + (b - d)i \\ \frac{1}{z} &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i, \quad z \neq 0, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i, \quad z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Definicja 4.1.3 *Liczbą sprzężoną do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę*

$$\bar{z} = a - bi.$$

Liczby zespolone z i $\bar{z}$ nazywamy liczbami sprzężonymi.

Dla liczb sprzężonych, jeżeli $z = a + bi$, są słuszne zależności:

$$z + \bar{z} = 2a = 2 \operatorname{Re} z,$$

$$z - \bar{z} = 2bi = 2i \cdot \operatorname{Im} z,$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2,$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\overline{(\bar{z})} = z,$$

$$(z = \bar{z}) \Leftrightarrow z \text{ jest liczbą rzeczywistą.}$$

Przykład 4.1.1 Rozwiązać układ równań z niewiadomymi zespolonymi z, t :

$$\begin{cases} (4 + 2i)z - (2 + 3i)t = 5 + 4i \\ (3 - i)z + (4 + 2i)t = 2 + 6i \end{cases}$$

Wykorzystując znane ze szkoły wzory Cramera, mamy:

$$W = \begin{vmatrix} 4 + 2i & -2 - 3i \\ 3 - i & 4 + 2i \end{vmatrix} = (4 + 2i)(4 + 2i) - (3 - i)(-2 - 3i) = 21 + 23i,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 5 + 4i & -2 - 3i \\ 2 + 6i & 4 + 2i \end{vmatrix} = (5 + 4i)(4 + 2i) - (2 + 6i)(-2 - 3i) = -2 + 44i,$$

$$W_t = \begin{vmatrix} 4 + 2i & 5 + 4i \\ 3 - i & 2 + 6i \end{vmatrix} = (4 + 2i)(2 + 6i) - (3 - i)(5 + 4i) = -23 + 21i$$

oraz

$$\begin{aligned} z &= \frac{W_z}{W} = \frac{-2 + 44i}{21 + 23i} = 1 + i, \\ t &= \frac{W_t}{W} = \frac{-23 + 21i}{21 + 23i} = i. \end{aligned}$$

Do rozwiązania tego układu równań liniowych można było użyć innych znanych metod rozwiązywania układów równań liniowych.

4.1.3 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

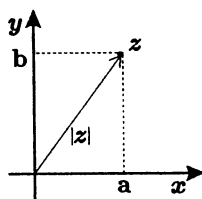
Liczba zespolona z została zdefiniowana jako para liczb rzeczywistych, $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Możemy ją zatem utożsamić z punktem na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Długość r wektora $\overrightarrow{Oz}$, łączącego początek układu z punktem z , nazywamy **modułem liczby z** i oznaczamy $|z|$, patrz Rys. 4.1.1. Z Twierdzenia Pitagorasa wynika:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Każdy kąt φ czyniący zadość równościom

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin \varphi &= \frac{b}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\end{aligned}$$



Rys. 4.1.1

nazywamy **argumentem** liczby z i oznaczamy $\varphi = \arg z$. Ten spośród argumentów danej liczby z , który spełnia warunek $0 \leq \arg z = \varphi_0 < 2\pi$, nazywamy **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Zatem

$$0 \leq \operatorname{Arg} z = \varphi_0 < 2\pi,$$

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\operatorname{Arg} z$ jest kątem nachylenia wektora $\overrightarrow{Oz}$ do osi rzeczywistej.

Z geometrycznej interpretacji modułu i argumentu liczby zespolonej wynika, że każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można przedstawić w postaci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

zwanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej.

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 są prawdziwe następujące własności:

$$\begin{aligned}|z_1| - |z_2| &\leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n, \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ dla } z_2 \neq 0,\end{aligned}$$

natomiast dla $z \neq 0, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}\arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \\ \arg z^n &= n \arg z = n\varphi, \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 = \varphi_1 - \varphi_2.\end{aligned}$$

Podamy, dla przykładu, dowód własności określającej argument iloczynu liczb zespolonych. Niech

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).\end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

co kończy dowód własności.

Z podanych własności wynika ponadto wzór, znany pod nazwą **wzoru Moivre'a**:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (4.1.1)$$

Przykład 4.1.2 Korzystając ze wzoru Moivre'a, wyprowadzić wzory określające

$$\sin 3\alpha \quad \text{ i } \quad \cos 3\alpha.$$

Korzystając ze wzoru Moivre'a, otrzymujemy równość

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha, \quad (4.1.2)$$

natomiast stosując wzór Newtona do dwumianu $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha = \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + i (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Porównując wzory (4.1.2) i (4.1.3), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha, \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Przykład 4.1.3 Wyznaczyć moduł i argument główny liczby zespolonej $z = -2 + 2i$.

Wyznamy najpierw $|z|$:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

następnie argument φ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem argumentem głównym jest liczba

$$\operatorname{Arg} z = \frac{3}{4}\pi.$$

4.1.4 Postać wykładnicza liczby zespolonej

Warto wspomnieć, że dla liczb zespolonych definiuje się nie tylko dodawanie, mnożenie i potęgowanie z wykładnikiem rzeczywistym, ale również inne działania, między innymi: potęgowanie z podstawą i wykładnikiem zespolonym, logarytm liczby zespolonej.

Blizsze informacje na ten temat można znaleźć w dowolnym podręczniku zawierającym wstęp do analizy funkcji zmiennej zespolonej.

Przytoczymy jedynie definicję funkcji wykładniczej o podstawie e , gdzie e jest zdefiniowane warunkiem (2.2.2), to znaczy $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,7183$.

Mianowicie:

$$e^z = \exp(z) = e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y).$$

Działania na wyrażeniu e^z wykonujemy tak jak na potęgach z wykładnikiem rzeczywistym, np.:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad (e^z)^n = e^{nz}.$$

W szczególności, kładąc $z = i\varphi$, otrzymamy

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Zatem dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mamy

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| \exp(i\varphi). \quad (4.1.4)$$

Wzór (4.1.4) określa **postać wykładniczą** liczby zespolonej.

Przykład 4.1.4 *Zapisać wzór Moivre'a, wykorzystując postać wykładniczą.*

Załóżmy, że mamy daną liczbę zespoloną z w postaci wykładniczej $z = |z| e^{i\varphi}$ i jednocześnie w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Potęę liczb z wyznaczmy, korzystając ze wzoru (4.1.1), otrzymując:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

co po zastosowaniu wzoru (4.1.4) daje

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}. \quad (4.1.5)$$

Wzór (4.1.5) jest równoważny wzorowi (4.1.1); jest wykładniczą postacią wzoru Moivre'a.

Przykład 4.1.5 Obliczyć: $(2 - 2\sqrt{3}i)^7$.

Zauważmy, że

$$2 - 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} (2 - 2\sqrt{3}i)^7 &= 4^7 \left(\cos \frac{35}{3}\pi + i \sin \frac{35}{3}\pi \right) = 4^7 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \\ &= 4^7 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4^6 (1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Przykład 4.1.6 Znaleźć rozwiązania równania:

$$\bar{z} \cdot |z|^2 \cdot z^3 = 64i.$$

Szukaną liczbę zespoloną spełniającą to równanie zapiszemy w postaci wykładniczej: $z = re^{i\varphi}$, podobnie prawą stronę równania, to jest $64i = 64e^{i(\pi/2+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawiamy do równania i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} re^{-i\varphi} \cdot r^2 \cdot r^3 e^{i3\varphi} &= 64e^{i(\pi/2+2\pi k)}, \\ r^6 e^{i2\varphi} &= 64e^{i(\pi/2+2\pi k)}, \end{aligned}$$

skąd $r^6 = 64$ oraz $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem $r = 2$ oraz $\varphi = \frac{\pi}{4}$ lub $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi$.

Równanie ma więc dwa rozwiązania:

$$z_1 = 2 \exp \left(\frac{\pi}{4}i \right), \quad z_2 = 2 \exp \left(\frac{\pi}{4}i + \pi i \right).$$

4.2 Płaszczyzna zespolona

Płaszczyzna z kartezjańskim układem współrzędnych, której punktom zostały przyporządkowane liczby zespolone, nazywa się **płaszczyzną zespoloną** lub **płaszczyzną Gaussa**. Oś OX utożsamiamy ze zbiorem części rzeczywistych, a oś OY jest obrazem zbioru liczb urojonych. Obrazami liczb z i $-z$ są punkty symetryczne względem początku układu, liczb z i $\bar{z}$ punkty symetryczne względem osi rzeczywistej.

Liczbom z_1, z_2 można przyporządkować wektory $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$. Wówczas liczbie $z_1 + z_2$ przyporządkowujemy wektor będący sumą wektorów $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$, podobnie różnicy liczb

– różnicę wektorów, patrz Rys. 4.2.1a). Zauważmy, że długość wektora odpowiadającego różnicy $z_1 - z_2$ jest równa długości przekątnej równoległoboku rozpiętego na wektorach: $\vec{Oz_1}$, $\vec{Oz_2}$, łączącej punkty z_1 i z_2 .

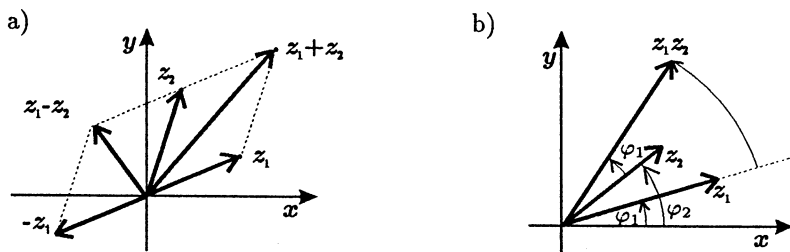
Stąd otrzymujemy, że $|z_1 - z_2|$ jest liczbą określającą odległość punktów z_1, z_2 .

Zauważmy ponadto, że mnożenie dwóch liczb zespolonych ma następującą interpretację geometryczną: niech

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Wówczas liczbie $z_1 z_2$ odpowiada na płaszczyźnie zespolonej punkt, który jest obrazem punktu z_1 otrzymanym przez zastosowanie obrotu dookoła początku układu o kąt φ_2 i jednokładności względem początku układu w stosunku $k = r_2$ lub odwrotnie: punkt z_2 obracamy o kąt φ_1 i zmieniamy w stosunku $k = r_1$, Rys. 4.2.1b).



Rys. 4.2.1

Szczególny przypadek iloczynu, mianowicie mnożenie dowolnego z przez liczbę $z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ o module $|z_1| = 1$, odpowiada obrotowi punktu z o kąt φ .

Przykład 4.2.1 Na płaszczyźnie zespolonej nakreśl zbiór punktów spełniających warunek: $|z - (2 + i)| < 3$.

Na podstawie interpretacji geometrycznej wyrażenia $|z_1 - z_2|$ wnioskujemy, że odległość zmiennego punktu $P(z)$ od ustalonego punktu $z_0 = (2, 1)$ jest mniejsza od 3. Zatem szukany zbiorem jest koło otwarte $K(S, r) = K((2, 1), 3)$.

4.3 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 4.3.1 Pierwiastkiem zespolonym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$, z liczby z nazywamy każdą liczbę $\xi \in \mathbb{C}$, taką że $\xi^n = z$, i oznaczamy podobnie jak pierwiastek rzeczywisty

symbolem $\sqrt[n]{z}$. Zatem

$$\sqrt[n]{z} = \xi \iff \xi^n = z.$$

Twierdzenie 4.3.1 Każda liczba zespolona z , $z \neq 0$, ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n . Pierwiastki te wyrażają się wzorem:

$$\sqrt[n]{z} = \xi_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right), \quad (4.3.1)$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $\alpha = \text{Arg } z$, a $\sqrt[n]{|z|}$ jest rozumiany jako pierwiastek arytmetyczny z nieujemnej liczby rzeczywistej.

Dowód. Niech $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, natomiast

$$\sqrt[n]{z} = |\sqrt[n]{z}|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \xi.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{z} = \xi$, więc $z = \xi^n$ i stąd

$$z = [|\sqrt[n]{z}|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = |\sqrt[n]{z}|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Z powyższej równości wynika:

$$|z| = |\sqrt[n]{z}|^n, \quad \sqrt[n]{|z|} = |\sqrt[n]{z}|$$

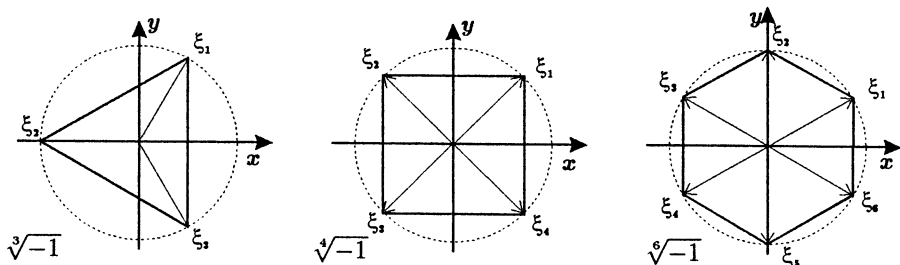
oraz

$$n\varphi = \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

skąd $\varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ otrzymujemy różne wartości argumentów głównych liczb $\sqrt[n]{z}$, a dla $k < 0$ lub $k \geq n$, $k \in \mathbb{Z}$, argumenty różniące się od głównych o wielokrotność 2π .

Istnieje zatem n różnych pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z . Wszystkie one mają ten sam moduł, leżą więc na wspólnym okręgu o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$, w równej między sobą odległości kątowej wynoszącej $\frac{2\pi}{n}$, pokrywają się z wierzchołkami pewnego n -kąta foremnego. Na Rys. 4.2.3 są pokazane pierwiastki z liczby -1 , kolejno stopnia 3, 4, 6.



Rys. 4.2.3

Wzór (4.3.1) można zapisać w postaci wykładniczej

$$\sqrt[n]{z} = \xi_k = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(i \frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Przykład 4.3.1 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $z^4 + 1 = 0$.

Przekształcając równanie, otrzymujemy

$$z = \sqrt[4]{-1}.$$

Oznaczając przez z_k , $k = 0, 1, 2, 3$, różne pierwiastki czwartego stopnia liczby -1 , otrzymujemy: $z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right)$.

Stąd

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i), \\ z_1 &= \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i), \\ z_2 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - i), \\ z_3 &= \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i). \end{aligned}$$

Przykład 4.3.2 Wykazać, że zbiór rozwiązań równania $z^6 - 1 = 0$ wraz z mnożeniem stanowi grupę.

Rozwiązania równania stanowią zbiór $Z_6 = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$. Argumenty tych liczb tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $\frac{\pi}{3}$, moduły zaś są równe i wynoszą 1.

$$\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad \left\{ \begin{array}{l} |z_i z_j| = 1, \\ \arg(z_i z_j) = \frac{\pi}{3} (i + j). \end{array} \right\}$$

Jeżeli $i + j < 6$, to oczywiście jest, że $z_i z_j \in Z_6$, jeżeli $i + j \geq 6$, to $\frac{\pi}{3} (i + j) = 2\pi + \frac{\pi}{3} k$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, co znaczy, że $z_i z_j \in Z_6$.

Zatem mnożenie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze Z_6 . Liczba $z_0 = 1 + 0i$ jest elementem neutralnym. Inwersem liczby z_k , $k = 0, 1, \dots, 5$, jest liczba z_{6-k} .

Przykład 4.3.3 Wyznaczyć rozwiązania równania $z^2 = 3 - 4i$.

Rozwiązaniami są pierwiastki $\sqrt{3-4i}$. Ponieważ $\arg(3-4i) = \varphi$ nie jest kątem, który daje się prosto wyznaczyć ze znanych wartości $\sin\varphi$, więc nie wykorzystamy metody pierwiastkowania opartej na postaci trygonometrycznej liczby.

Niech $\sqrt{3-4i} = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Podnosząc równość obustronnie do drugiej potęgi, otrzymujemy

$$3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone prawej i lewej strony powyższej równości, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases},$$

który ma dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = -1 \end{cases}.$$

Odpowiedzią w przykładzie są dwie liczby: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 - i$.

4.4 Wielomiany zmiennej zespolonej

Definicja 4.4.1 Wielomianem w dziedzinie zespolonej nazywamy wyrażenie postaci:

$$w_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n,$$

gdzie współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami zespolonymi, z zaś jest zmienną zespoloną. Jeżeli $a_n \neq 0$, to liczbę $n \in \mathbb{N}$ nazywamy stopniem wielomianu.

Miejszem zerowym wielomianu $w_n(z)$ jest liczba z_0 , taka że $w_n(z_0) = 0$.

Mówimy, że wielomian $w_n(z)$ jest podzielny przez wielomian $v_m(z)$, jeżeli istnieje taki wielomian $u_p(z)$, $m \leq n$, $p \leq n$, że

$$w_n(z) = v_m(z) \cdot u_p(z), \quad n = m + p.$$

Analogicznie jak w dziedzinie rzeczywistej ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4.1 *Liczba z_0 jest miejscem zerowym wielomianu $w(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on podzielny przez dwumian $z - z_0$.*

Jeżeli wielomian $w(z)$ jest podzielny przez $(z - z_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(z - z_0)^{k+1}$, to z_0 nazywamy **k -krotnym miejscem zerowym** tego wielomianu.

Badanie miejsc zerowych wielomianu ma doniosłe znaczenie w algebrze. Jednym z podstawowych twierdzeń w tym kierunku jest tak zwane **Podstawowe Twierdzenie Algebry**. Ma ono bardzo wiele dowodów, jednak żaden nie jest dość krótki i elementarny, aby go tu cytować, zatem podamy go bez dowodu.

Twierdzenie 4.4.2 (Podstawowe Twierdzenie Algebry) *Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ o dowolnych współczynnikach zespolonych ma w dziedzinie zespolonej co najmniej jedno miejsce zerowe.*

Należy zwrócić uwagę, że analogiczne twierdzenie w dziedzinie rzeczywistej nie musi być prawdziwe, np. wielomian $w(x) = x^2 + 4$ w dziedzinie rzeczywistej nie ma miejsc zerowych.

Wielomiany zespolone stanowią zatem istotne uogólnienie wielomianów rzeczywistych.

Prostą konsekwencją Podstawowego Twierdzenia Algebry jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4.3 *Każdy wielomian stopnia n*

$$w_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

można przedstawić w postaci

$$w_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

przy czym niektóre z liczb $z_1, z_2, \dots, z_n$ mogą być równe między sobą.

Dowód. Z Podstawowego Twierdzenia Algebry, jeżeli $n \geq 1$, wynika istnienie liczby z_1 , takiej że

$$w_n(z) = (z - z_1) w_{n-1}(z).$$

Jeżeli $n - 1 \geq 1$, to istnieje liczba z_2 , dla której $w_{n-1}(z) = (z - z_2) w_{n-2}(z)$. Będzie więc

$$w_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) w_{n-2}(z).$$

Kontynuując to postępowanie n razy, otrzymujemy:

$$w_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) w_0(z),$$

przy czym widać, że $w_0(z) = a_n$ dla $z \in \mathbb{C}$, co kończy dowód twierdzenia.

Założmy teraz, że rozpatrujemy wielomian $w(z)$, w którym zmienna z jest zespolona, współczynniki zaś $a_0, a_1, \dots, a_n$ są rzeczywiste. Interesują nas miejsca zerowe takiego wielomianu, zarówno rzeczywiste jak i zespolone.

Twierdzenie 4.4.4 *Jeżeli liczba zespolona $z = x + iy$ jest miejscem zerowym wielomianu $w(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ o współczynnikach rzeczywistych, to liczba zespolona sprzężona $\bar{z} = x - iy$ jest również miejscem zerowym tego wielomianu.*

Dowód. Z własności działań na liczbach sprzężonych wynika, że dla $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$w(\bar{z}) = a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_n\bar{z}^n = \overline{w(z)}.$$

Jeżeli więc liczba z_0 jest miejscem zerowym wielomianu, to znaczy $w(z_0) = 0$, to $w(\bar{z}_0) = \overline{w(z_0)} = 0$, co dowodzi, że $\bar{z}_0$ jest również miejscem zerowym tego wielomianu.

Wniosek 4.4.1 *Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć w dziedzinie rzeczywistej na iloczyn czynników co najwyżej drugiego stopnia.*

Istotnie, z Podstawowego Twierdzenia Algebry wynika możliwość rozkładu wielomianu $w(z)$ na czynniki liniowe $(z - z_k)$. Jeżeli z_k nie będzie liczbą rzeczywistą, to wraz z czynnikiem $(z - z_k)$ wystąpi czynnik $(z - \bar{z}_k)$, a ich iloczyn

$$(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k\bar{z}_k = z^2 - (2 \operatorname{Re} z)z + |z|^2$$

jest wielomianem drugiego stopnia o współczynnikach rzeczywistych i wyróżniku ujemnym.

Przykład 4.4.1 *W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie*

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z - 3 = 0.$$

Sprawdzamy, że $w(1) = 0$ i $w(-1) = 0$. Dokonując dzielenia wielomianu, otrzymujemy:

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z - 3 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 2z + 3).$$

Pozostaje rozwiązać równanie:

$$z^2 + 2z + 3 = 0. \quad (4.4.1)$$

Wyróżnik tego równania $\Delta = -8$. Zatem $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$ lub $\sqrt{-8} = -2\sqrt{2}i$. Aby otrzymać pierwiastki trójmianu (4.4.1), za $\sqrt{\Delta}$ przyjmujemy dowolną (ale tylko jedną) otrzymaną wartość i korzystając ze znanych wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego, otrzymujemy

$$z_3 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i, \quad z_4 = -1 - \sqrt{2}i.$$

Są to oczywiście pierwiastki sprzężone.

Ostatecznie, równanie ma cztery pierwiastki:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -1 + \sqrt{2}i, \quad z_4 = -1 - \sqrt{2}i.$$

4.5 Zadania

Wykonać działania na liczbach zespolonych (Zad. 4.1-4.6)

$$4.1. (1 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i). \quad 4.2. (1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^3.$$

$$4.3. \sum_{k=1}^{k=6} i^k. \quad 4.4. \frac{1 + 5i}{2 - i} + \frac{-i}{2 + 3i} - 4i.$$

$$4.5. \frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}. \quad 4.6. \left(\frac{2 + i}{3 + i} \right)^2 + 7 - 11i.$$

Przedstawić liczby w postaci trygonometrycznej i wykładniczej (Zad. 4.7-4.15)

$$4.7. 1 + \sqrt{3}i. \quad 4.8. \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i. \quad 4.9. 2i(1 - i).$$

$$4.10. -4. \quad 4.11. 2i. \quad 4.12. i^2.$$

$$4.13. \frac{1 - i}{1 + i}. \quad 4.14. \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2. \quad 4.15. (1 + i\sqrt{3})2i.$$

Wykonać działania, stosując wzór de Moivre'a (Zad. 4.16-4.19)

$$4.16. (1+i)^{10} - (1+i)^6.$$

$$4.17. \frac{(1+i\sqrt{3})^8}{(-1-i)^5}.$$

$$4.18. \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}.$$

$$4.19. \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{\sqrt{3}+i}\right)^4.$$

Wykazać następujące własności liczb zespolonych (Zad. 4.20-4.28)

$$4.20. \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2.$$

$$4.21. \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2.$$

$$4.22. |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$4.23. \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0.$$

$$4.24. \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

$$4.25. \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

$$4.26. \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$4.27. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$4.28. |z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Obliczyć i przedstawić w postaci kartezjańskiej pierwiastki (Zad. 4.29-4.37)

$$4.29. \sqrt{-4}.$$

$$4.30. \sqrt{-8i}.$$

$$4.31. \sqrt{3-4i}.$$

$$4.32. \sqrt{-15+8i}.$$

$$4.33. \sqrt{-11+60i}.$$

$$4.34. \sqrt{-8-6i}.$$

$$4.35. \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{-4}$$

$$4.36. \sqrt[3]{i}.$$

$$4.37. \sqrt[6]{-64}.$$

Wyznaczyć wartość wyrażeń (Zad. 4.38-4.44)

$$4.38. \operatorname{Re} \frac{(1+3i)(1-i)^3}{3+i}.$$

$$4.39. \operatorname{Im} \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(-1+i)^2}.$$

$$4.40. \operatorname{Im} \frac{(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^6}.$$

$$4.41. \left| \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \right|.$$

$$4.42. \operatorname{Arg} \left(\frac{2+2i}{i} \right)^5.$$

$$4.43. \overline{3i+2(4-i)^3}.$$

$$4.44. |-8+15i| \cdot \operatorname{Re} \frac{3+7i}{-3+i}.$$

Przedstawić za pomocą $\sin x$ i $\cos x$ następujące wyrażenia (Zad. 4.45-4.46)

$$4.45. \cos 3x, \sin 3x.$$

$$-4.46. \cos 5x, \sin 5x.$$

Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $w(z)$. (Zad. 4.47-4.66)

$$4.47. w(z) = z^2 - (2+i)z + (-1+7i).$$

$$4.48. w(z) = z^2 - (3-2i)z + (5-5i).$$

$$4.49. w(z) = z^2 + (1+4i)z - (5+i).$$

$$4.50. w(z) = (2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i).$$

$$4.51. w(z) = z^2 + 6iz - 10.$$

$$4.52. w(z) = z^2 + (-2+2i)z - 4i.$$

$$4.53. w(z) = z^2 + (1+3i)z + 4i + 4.$$

$$4.54. w(z) = z^3 - z + 6.$$

$$4.55. w(z) = z^3 + z - 3z^2 - 3.$$

$$4.56. w(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4.$$

$$4.57. w(z) = z^3 - (1-6i)z^2 - (10+6i)z + 10.$$

$$4.58. w(z) = z^3 + (1+3i)z^2 - (1+2i)z + 5i - 1.$$

- 4.59. $w(z) = z^3 + (+3+i)z^2 + 3z + 3 - i$. 4.60. $w(z) = z^3 - z^2 + (3-i)z - 2 - 2i$.
 4.61. $w(z) = z^4 - 30z^2 + 289$. 4.62. $w(z) = z^4 - 2z^2 + 2$.
 4.63. $w(z) = z^4 - 6z^2 + 25$. 4.64. $w(z) = z^4 + (2-4i)z^2 + 4i - 3$.
 4.65. $w(z) = z^6 + (-1+i)z^3 - i$. 4.66. $z^7 + iz^4 - z^3 - i$.

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania (Zad. 4.67-4.74)

- 4.67. $z^8 = (1+i)^8$. 4.68. $z^3 = 27i^6$. 4.69. $z^3 = 2z\bar{z}$.
 4.70. $z^3 = |z|^3 i$. 4.71. $z^2 = (\bar{z})^2$. 4.72. $\bar{z}z^4 = 32$.
 4.73. $(\bar{z})^3 = \frac{1}{2}(1-i)^2$. 4.74. $z^3 = -8\bar{z}$.

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniających warunki (Zad. 4.75-4.91)

- 4.75. $|z| \leq 2 \wedge |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$. 4.76. $|z+5i| \leq 1 \wedge \operatorname{Re} z > 0$.
 4.77. $|z - (4+3i)| < 2 \wedge 2 < \operatorname{Im} z < 4$. 4.78. $1 \leq |z+3+i| \leq 3$.
 4.79. $|z+1-2i| = |z-2i|$. 4.80. $|z-2| = 2|z-i|$.
 4.81. $|z+3i| \leq 3 \wedge \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$. 4.82. $|z| + z + \bar{z} = 3$.
 4.83. $|z-1+i| = \operatorname{Re} z$. 4.84. $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.
 4.85. $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-1} = 0$. 4.86. $\operatorname{Re}(z^2 + z) = |z|^2$.
 4.87. $1 < |z+2i| < 2 \vee 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$. 4.88. $\left| \frac{z}{i} + 3 \right| > 1 \wedge \operatorname{Im} z \leq -2$.
 4.89. $0 < \arg(z^3) < \frac{\pi}{6}$. 4.90. $\arg(-iz^4) = \frac{25}{6}\pi$.
 4.91. $0 \leq \arg(z^3) \leq \frac{\pi}{2} \wedge \operatorname{Re} z = 3$.

Znajdź jeden pierwiastek wielomianu, wyznaczyć pozostałe i rozłożyć ten wielomian na czynniki rzeczywiste nierozkładalne (Zad. 4.92-4.95)

- 4.92. $w(z) = z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 40z + 25$, $z_1 = 2 - i$.
 4.93. $w(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$, $z_1 = 1 + 2i$.
 4.94. $w(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$, $z_1 = 3 + 2i$.
 4.95. $w(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$, $z_1 = 1 + i$.

Wyznaczyć liczbę z wiedząc, że dwa kolejne pierwiastki z tej liczby (pewnego stopnia) wynoszą z_k i z_{k+1} (Zad. 4.96-4.100)

- 4.96. $z_k = 1 + i$, $z_{k+1} = -1 + i$. 4.97. $z_k = -1 - i\sqrt{3}$, $z_{k+1} = 1 - i\sqrt{3}$.
 4.98. $z_k = 2 + 3i$, $z_{k+1} = -2 - 3i$. 4.99. $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_k = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.
 4.100. $z_k = \exp(i\frac{25}{24}\pi)$, $z_{k+1} = \exp(i\frac{37}{24}\pi)$.

Ile różnych miejsc zerowych ma wielomian $w(z)$ (Zad. 4.101-4.103)

$$4.101. w(z) = z^6 - z^4 - z^2 + 1.$$

$$4.102. w(z) = z^9 + 2\sqrt{2}z^6 - 8z^3 - 16\sqrt{2}.$$

$$4.103. w(z) = z^{14} + z^{10} + z^6 + z^2.$$

Niech $z_k, k = 1, 2, 3, 4$, będą pierwiastkami stopnia 4 z liczby 1. Zaznaczyć w układzie współrzędnych wskazane punkty (Zad. 4.104-4.106)

$$4.104. w_k = 2 + iz_k. \quad 4.105. w_k = 2z_k. \quad 4.106. w_k = 2 + i + (1 + i)z_k.$$

Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$ oraz zbiór B (Zad. 4.107-4.109)

$$4.107. B = \{w \in \mathbb{C} : w = \bar{z}, z \in A\}. \quad 4.108. B = \{w \in \mathbb{C} : w = 2 + z, z \in A\}.$$

$$4.109. B = \{w \in \mathbb{C} : w = 1 + 2iz, z \in A\}.$$

4.110. Niech z będzie dowolnym punktem płaszczyzny zespolonej oraz φ dowolną liczbą, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Zaznaczyć na tej płaszczyźnie liczby:

$$w_1 = 2z, w_2 = iz, w_3 = e^{i\varphi}z, w_4 = z + 1 + i, w_5 = -2e^{i\varphi}z, w_6 = (1 + i)z, w_7 = \frac{z}{1 + i}.$$

Rozwiązać układ równań z dwoma niewiadomymi (Zad. 4.111-4.115)

$$4.111. \begin{cases} z + iw = 2(1 + i) \\ iz + w = 0 \end{cases} \quad 4.112. \begin{cases} (1 - i)z + iw = 1 - 3i \\ (1 + i)z + w = 3 + i \end{cases}$$

$$4.113. \begin{cases} 2z + (3 - i)w = 3 + i \\ -iz + (1 - 3i)w = 2 - 3i \end{cases} \quad 4.114. \begin{cases} z + iw + 2t = 3 + 2i \\ w - t = -i \\ z + it = 2i \end{cases}$$

$$4.115. \begin{cases} 2z - w + 2it = 6 - 3i \\ -z + t = -1 - 2i \\ z + iw + it = 3 + i \end{cases}$$

Rozdział 5

Przestrzenie wektorowe

5.1 Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa, nazywana również przestrzenią wektorową, jest przykładem struktury algebraicznej bardziej złożonej niż te omawiane w rozdziale pierwszym.

W teoriach matematycznych rozpatruje się przykłady przestrzeni liniowych zbudowanych nad dowolnymi ciałami. Jednak najbardziej użyteczne są te, które są zbudowane za pomocą ciał liczbowych, to znaczy ciała liczb rzeczywistych lub ciała liczb zespolonych. My zajmiemy się przykładami przestrzeni liniowych z zastosowaniem ciała liczb rzeczywistych.

Definicja 5.1.1 *Przestrzenią liniową lub przestrzenią wektorową rozpiętą nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy strukturę algebraiczną $\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ złożoną ze zbioru V , ciała $\mathbb{R}$ oraz dwóch działań – wewnętrznego $\oplus : V \times V \rightarrow V$ i zewnętrznego $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$. Elementy ciała $\mathbb{R}$ nazywamy skalarami, elementy zbioru V wektorami i na ogół w celu odróżnienia od skalarów oznaczamy dodając kreskę, np. $\bar{a}$.*

Działania mają następujące własności:

1. *Struktura algebraiczna $(V, \oplus)$ jest grupą przemenną, element neutralny tej grupy nazywamy zerem przestrzeni i oznaczamy $\bar{0}$.*
2. *Działanie zewnętrzne jest rozdzielne względem działania wewnętrznego, to znaczy:*
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V \quad \lambda \odot (\bar{a} \oplus \bar{b}) = \lambda \odot \bar{a} \oplus \lambda \odot \bar{b}.$$
3. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \bar{a} \in V \quad (\lambda + \mu) \odot \bar{a} = \lambda \odot \bar{a} \oplus \mu \odot \bar{a}$ oraz $\lambda \odot (\mu \odot \bar{a}) = (\lambda\mu) \odot \bar{a}$.*
4. *$\forall \bar{a} \in V \quad 0 \odot \bar{a} = \bar{0}$ i $1 \odot \bar{a} = \bar{a}$, gdzie 0 i 1 są, odpowiednio, zerem i jednością ciała $\mathbb{R}$.*
5. *$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \odot \bar{0} = \bar{0}$.*

Przykład 5.1.1 Niech $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$, gdzie

$$\mathbb{R}^n = \{\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

oraz $\mathbb{R}$ jest ciałem liczb rzeczywistych. Działania $\oplus, \odot$ definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}\bar{a} \oplus \bar{b} &= \bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \text{ gdzie } c_i = a_i + b_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda \odot \bar{a} &= \bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n), \text{ gdzie } d_i = \lambda a_i, i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Działania $\oplus, \odot$ spełniają warunki 1-5 definicji przestrzeni, zerem przestrzeni $\mathcal{V}$ jest wektor $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$, zatem struktura $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową.

W przyszłości, dla wygody, działania $\oplus, \odot$ tej przestrzeni oznaczać będziemy krótko: $+$, $\cdot$, jednakże musimy pamiętać, jakich dotyczą elementów; w przypadkach nie budzących wątpliwości znak mnożenia można również pomijać.

Przykład 5.1.2 Niech $W_3(t)$ oznacza zbiór wielomianów rzeczywistych $w(t)$ co najwyżej trzeciego stopnia, to znaczy

$$w(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, t \in \mathbb{R}.$$

Działania $\oplus, \odot$ niech będą, odpowiednio, dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez liczbę.

Działania te spełniają warunki definicyjne, więc struktura $(W_3, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową. Zerem tej przestrzeni jest wielomian zerowy, to znaczy $\bar{0} = w(t) \equiv 0$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, umawiamy się, że w przyszłości znaki działań $\oplus, \odot$ w odniesieniu do tej przestrzeni zastąpimy znakami: $+$, $\cdot$, a jeżeli nie będzie prowadziło to do nieporozumień, to znak mnożenia można również opuścić.

5.2 Liniowa zależność i niezależność wektorów

Rozważmy przestrzeń liniową (wektorową) $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ będą wektorami tej przestrzeni, natomiast $a_1, a_2, \dots, a_k$ skalarami z ciała $\mathbb{R}$.

Definicja 5.2.1 Kombinacją liniową wektorów $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ o współczynnikach $a_1, a_2, \dots, a_k$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, nazywamy wektor

$$\bar{u} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_k \bar{u}_k.$$

Definicja 5.2.2 Mówimy, że wektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ tworzą układ liniowo zależny, jeżeli istnieje ciąg współczynników $a_1, a_2, \dots, a_k$, z których nie wszystkie są zerami, takich że kombinacja liniowa $a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \dots + a_k\bar{u}_k$ jest wektorem zerowym, to znaczy:

$$\sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i = \bar{0}, \quad \sum_{i=1}^k a_i^2 > 0. \quad (5.2.1)$$

Układ wektorów nazywa się **liniowo niezależny**, gdy nie jest liniowo zależny.

Niezależność liniowa oznacza, że

$$\sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i = \bar{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Definicja 5.2.3 Jeżeli wektor $\bar{u}$ jest kombinacją liniową wektorów $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$, to mówi się, że $\bar{u}$ zależy liniowo od $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$.

Twierdzenie 5.2.1 Na to, aby układ wektorów $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ był liniowo zależny, potrzeba i wystarcza, by jeden spośród nich był liniowo zależny od pozostałych.

Dowód. Istotnie, niech wektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ tworzą układ liniowo zależny, to znaczy $\sum_{i=1}^k a_i \bar{u}_i = \bar{0}$ i nie wszystkie a_i są zerami. Jeżeli np. $a_1 \neq 0$, to otrzymujemy

$$\bar{u}_1 = \frac{-a_2}{a_1} \bar{u}_2 + \frac{-a_3}{a_1} \bar{u}_3 + \dots + \frac{-a_k}{a_1} \bar{u}_k,$$

co świadczy, że $\bar{u}_1$ zależy od $\bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_k$.

I odwrotnie, niech $\bar{u}_k$ zależy od pozostałych. Wówczas zachodzi związek:

$$\bar{u}_k = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_{k-1} \bar{u}_{k-1}$$

z odpowiednio dobranymi współczynnikami. Pociąga to za sobą

$$a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_{k-1} \bar{u}_{k-1} + a_k \bar{u}_k = \bar{0}, \quad a_k = -1,$$

co świadczy o tym, że układ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ jest zależny.

Przykład 5.2.1 Zbadać liniową zależność wektorów $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, gdzie

$$\bar{v}_1 = (1, 2, 3), \bar{v}_2 = (3, 2, 1), \bar{v}_3 = (4, 4, 5).$$

Jeżeli $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3 = (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 2a_2 + 4a_3, 3a_1 + a_2 + 5a_3) = \bar{0}$,
to

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases}.$$

Układ równań ma jedyne rozwiązanie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, co świadczy o tym, że wektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ są liniowo niezależne.

Przykład 5.2.2 Zbadać liniową zależność wielomianów

$$w_1 = 1, \quad w_2 = t, \quad w_3 = t^2, \quad w_4 = t^3$$

z przestrzeni opisanej w Przykładzie 5.1.2.

Wielomiany te tworzą układ liniowo niezależny, gdyż wielomian

$$a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 = a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

jest wielomianem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Wypowiemy kilka twierdzeń dotyczących zależności układu wektorów. Twierdzenia te mówią o faktach intuicyjnie oczywistych, dowody są proste, pomijamy je, pozostawiając czytelnikowi do przemyślenia.

Twierdzenie 5.2.2 Jeżeli podzbiór zbioru wektorów tworzy układ liniowo zależny, to własność tę ma i sam zbiór wektorów.

Twierdzenie 5.2.3 Każdy podzbiór zbioru wektorów liniowo niezależnych tworzy układ liniowo niezależny.

Twierdzenie 5.2.4 Jeżeli wektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ przestrzeni liniowej tworzą układ liniowo niezależny, to dla dowolnego wektora $\bar{v}$ istnieje co najwyżej jeden ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_k$ taki, że

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \dots + a_k\bar{u}_k.$$

Definicja 5.2.4 Przestrzeń $\mathcal{V}$ nazywa się przestrzenią skończenie wymiarową, jeżeli istnieje liczba naturalna N taka, że każdy układ $(N + 1)$ wektorów przestrzeni jest liniowo zależny.

Wymiar przestrzeni jest najmniejszą liczbą naturalną N o tej własności. Oznaczamy go $\dim \mathcal{V} = N$.

Przestrzeń obejmująca jedynie wektor $\bar{0}$ jest przestrzenią o wymiarze równym 0, jeżeli zaś zawiera choć jeden element niezerowy, to jej wymiar nie może być równy 0.

Definicja 5.2.5 *Bazą przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej o wymiarze $n \geq 1$ nazywa się każdy liniowo niezależny układ n wektorów przestrzeni.*

Z Twierdzenia 5.2.4 i z definicji wymiaru przestrzeni wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.2.5 *Jeżeli wektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{V}$, to każdy wektor $\bar{v}$ tej przestrzeni daje się przedstawić jako ich kombinacja liniowa i to dokładnie na jeden sposób. Mówimy, że baza $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ generuje przestrzeń $\mathcal{V}$.*

Przykład 5.2.3 *Zbiór liczb zespolonych z dodawaniem liczb zespolonych jako działaniem wewnętrznym i mnożeniem liczby zespolonej przez liczbę rzeczywistą jako działaniem zewnętrznym jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Jest to przestrzeń dwuwymiarowa, to znaczy $\dim \mathbb{C} = 2$. Układem dwóch elementów przestrzeni $\mathbb{C}$, liniowo niezależnym, mogą być np. liczby $z_1 = 1, z_2 = i$, gdyż*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad az_1 + bz_2 = 0 \implies a + bi = 0 \implies a = b = 0.$$

Mamy również

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists a, b \quad z = az_1 + bz_2.$$

Baza n -wymiarowej przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ pozwala ustalić odwzorowanie przestrzeni $\mathcal{V}$ w $\mathbb{R}^n$. Zadajmy mianowicie w przestrzeni n -wymiarowej $\mathcal{V}$ bazę $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$. Dowolny wektor $\bar{v} \in \mathcal{V}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \dots + a_n\bar{u}_n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Przyporządkowując wektorowi $\bar{v}$ ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, otrzymujemy odwzorowanie przestrzeni $\mathcal{V}$ w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy je symbolem:

$$T(\bar{v}) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Skalary $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **współrzednymi wektora $\bar{v}$** w danej bazie. Zmiana bazy danej przestrzeni powoduje zmianę współrzednych danego wektora $\bar{v}$.

Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ najprostszą bazą jest układ wektorów, które oznaczmy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ i określimy następująco:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Baza $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ nosi nazwę **bazy kanonicznej**. Dowolny wektor $\bar{\mathbf{v}}$,

$$\bar{\mathbf{v}} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

daje się przedstawić w postaci:

$$\bar{\mathbf{v}} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n,$$

zatem dla wektora $\bar{\mathbf{v}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ liczby a_i są jego współrzędnymi w bazie kanonicznej.

Przykład 5.2.4 *Sprawdzić, czy układ $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{u}}_3 = (1, 0, 0)$ stanowi bazę w $\mathbb{R}^3$. Wyrazić wektor $\bar{\mathbf{v}} = (4, 3, 2)$ jako kombinację wektorów tej bazy.*

Aby sprawdzić, czy układ jest bazą, zbadamy równość:

$$a_1\bar{\mathbf{u}}_1 + a_2\bar{\mathbf{u}}_2 + a_3\bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{0}}.$$

Jest ona równoważna układowi:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

mającemu jedyne rozwiązanie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Świadczy to o tym, że układ jest niezależny. Ponieważ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, więc układ $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3$ stanowi bazę.

Wyznamy następnie rozwiązanie równania z niewiadomymi a_1, a_2, a_3

$$a_1\bar{\mathbf{u}}_1 + a_2\bar{\mathbf{u}}_2 + a_3\bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{v}},$$

które sprowadza się do układu:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\ a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases},$$

skąd otrzymujemy: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$.

Współrzędnymi wektora $\bar{\mathbf{v}}$ w zadanej bazie $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3$ są liczby 2, 1, 1, to znaczy $\bar{\mathbf{v}} = 2\bar{\mathbf{u}}_1 + 1\bar{\mathbf{u}}_2 + 1\bar{\mathbf{u}}_3$.

5.3 Przestrzeń Euklidesa

Dana jest przestrzeń liniowa (wektorowa) $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Definicja 5.3.1 Jeżeli każdej parze wektorów $\bar{x}, \bar{y}$ z przestrzeni liniowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ przyporządkujemy liczbę rzeczywistą oznaczoną symbolem $(\bar{x}, \bar{y})$, tak by spełnione były warunki:

- $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$ – przemienność,
- $(a\bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y})$, $a \in \mathbb{R}$ – jednorodność,
- $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$ – rozdzielność względem dodawania,
- $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ dla dowolnego $\bar{x}$, z równością jedynie dla $\bar{x} = \bar{0}$,

to mówimy, że został określony **iloczyn skalarny** $(\bar{x}, \bar{y})$ wektorów $\bar{x}, \bar{y}$.

Przestrzeń liniową wyposażoną w takie mnożenie skalarne nazywamy **przestrzenią Euklidesa**.

Definicja 5.3.2 Normą wektora $\bar{x}$, którą oznaczamy $\|\bar{x}\|$, nazywamy liczbę

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}. \quad (5.3.1)$$

Jeżeli dwa wektory spełniają równość: $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, to nazywamy je **wektorami ortogonalnymi**.

Rozpatrzmy n -wymiarową przestrzeń liniową $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z bazą $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$. Niech $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{V}$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \dots + x_n\bar{u}_n, \\ \bar{y} &= y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2 + \dots + y_n\bar{u}_n. \end{aligned}$$

Ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ są współrzędnymi wektorów $\bar{x}, \bar{y}$ w zadanej bazie. Liczba $(\bar{x}, \bar{y})$, zdefiniowana następująco:

$$(\bar{x}, \bar{y}) := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \quad (5.3.2)$$

spełnia warunki Definicji 5.3.1 iloczynu skalarnego. Przy tym określeniu iloczynu skalarnego norma $\|\bar{x}\|$ ma postać:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (5.3.3)$$

zależy więc od współrzędnych wektora w zadanej bazie.

A oto najprostsze konsekwencje przyjętej definicji normy wektora.

1. Dla dowolnych $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + 2(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2. \quad (5.3.4)$$

2. Dla dowolnych $\bar{x}, \bar{y}$:

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2. \quad (5.3.5)$$

Nierówność ta jest znana pod nazwą **nierówności Schwarza-Buniakowskiego**.

3. Jeżeli $\bar{x}, \bar{y}$ są wektorami ortogonalnymi, to

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2. \quad (5.3.6)$$

Związek ten jest dobrze znanym **Twierdzeniem Pitagorasa** dla dowolnej przestrzeni euklidesowej.

Uzasadnienie. Ad 1. Własność pierwsza jest bezpośrednim wnioskiem z definicji iloczynu skalarnego i definicji normy.

Ad 2. Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Stosując (5.3.4), dla wektora $t\bar{x} + \bar{y}$ otrzymamy:

$$\|t\bar{x} + \bar{y}\|^2 = t^2 \|\bar{x}\|^2 + 2t(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2.$$

Wyrażenie to, ponieważ jest kwadratem normy, przyjmuje wartości nieujemne. Z drugiej strony jest funkcją kwadratową zmiennej $t \in \mathbb{R}$, więc wyróżnik tego trójmianu nie może być dodatni. Stąd:

$$4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4\|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 \leq 0,$$

co kończy uzasadnienie.

Ad 3. Stosując własność (5.3.4), dla wektorów ortogonalnych, dla których $2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, otrzymujemy (5.3.6).

Nierówność (5.3.5) jest równoważna nierówności podwójnej:

$$-1 \leq \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1 \quad \text{dla } \bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}.$$

Pozwala to wnioskować, że istnieje dokładnie jedna liczba $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ taka, że

$$\cos \theta = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}.$$

Liczbę θ nazywamy **kątem między wektorami** $\bar{x}, \bar{y}$.

Związek ten zapiszemy w postaci

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cos \theta \quad (5.3.7)$$

i podstawimy do (5.3.4), otrzymamy wówczas

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cos \theta + \|\bar{y}\|^2.$$

Ponieważ $\cos \theta \leq 1$ i $\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\| \geq 0$, więc

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2,$$

to znaczy

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

Powyższą nierówność nazywamy **prawem trójkąta** lub nierównością trójkąta.

Rozważmy teraz układ wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ pewnej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Układ wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ nazywamy **układem ortogonalnym**, jeżeli każde dwa wektory układu są **ortogonalne**, to znaczy

$$(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Jeżeli ponadto wszystkie wektory ortogonalne układu mają normę równą 1, to mówimy, że układ jest **ortonormalny**. Zatem dla wektorów układu ortonormalnego zachodzi:

$$(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Wprowadzone tutaj wyrażenie δ_{ij} , przyjmujące wartości 0 lub 1, jest powszechnie używane i nosi nazwę **symbolu Kroneckera**.

Przykład 5.3.1 *Przykładem ortonormalnego układu n wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym jak w (5.3.2) są wektory bazowe w bazie kanonicznej tej przestrzeni.*

Dowolny układ ortogonalny można przekształcić w układ ortonormalny, to znaczy znormalizować go, mnożąc każdy z wektorów układu przez odwrotność jego normy.

Zatem, jeżeli układ wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ jest układem ortogonalnym, to układ wektorów

$$\frac{\bar{x}_1}{\|\bar{x}_1\|}, \frac{\bar{x}_2}{\|\bar{x}_2\|}, \dots, \frac{\bar{x}_m}{\|\bar{x}_m\|}$$

jest układem ortonormalnym.

Przestrzeń Euklidesa utworzoną z przestrzeni $\mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$, z bazą kanoniczną i iloczynem skalarnym określonym jak w (5.3.2), oznaczamy, odpowiednio, $\mathcal{E}^2$ lub $\mathcal{E}^3$. Wektorom przestrzeni wektorowej $\mathcal{E}^2$ lub $\mathcal{E}^3$ można nadać geometryczną interpretację, utożsamiając je z wektorami swobodnymi, odpowiednio, na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

W przestrzeni $\mathcal{E}^n$, $n = 1, 2, 3$, norma wektora $\bar{x}$, zaczepionego w początku układu współrzędnych, oznacza długość wektora $\bar{x}$, którą oznaczamy $|\bar{x}|$.

Długość wektora swobodnego $\bar{x} \in \mathcal{E}^3$ określonego przez swoje współrzędne (w bazie kanonicznej), to znaczy $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, wynosi:

$$|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Inne pojęcia dotyczące własności wektorów przestrzeni $\mathcal{E}^2$ lub $\mathcal{E}^3$, np. kolinearność wektorów czy działania na nich, będą omówione w dalszej części, w rozdziale: Geometria analityczna w przestrzeni.

Analogicznie określamy przestrzeń $\mathcal{E}^n$ dla $n > 3$, mimo że wtedy nie istnieje w naszej wyobraźni bezpośrednia interpretacja geometryczna.

Przykład 5.3.2 Zbadaj ortonormalność wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathcal{E}^3$,

$$\bar{x}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{x}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \bar{x}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_3) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \\ |\bar{x}_1| &= \sqrt{(\bar{x}_1, \bar{x}_1)} = 1, \\ |\bar{x}_2| &= \sqrt{(\bar{x}_2, \bar{x}_2)} = 1, \\ |\bar{x}_3| &= \sqrt{(\bar{x}_3, \bar{x}_3)} = 1. \end{aligned}$$

Zatem układ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ jest układem ortonormalnym.

Na zakończenie podamy jeszcze przykład przestrzeni z innym niż w $\mathcal{E}^n$ iloczynem skalarnym.

Przykład 5.3.3 Niech dana będzie przestrzeń $W_n(t)$ wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n , patrz Przykłady: 5.1.2 i 5.2.2. Niech $x(t)$ i $y(t)$ będą elementami tej przestrzeni. Wówczas możemy przyjąć, że iloczyn skalarny tych elementów jest równy liczbie

$$\int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Jeżeli czytelnikowi jest znane pojęcie całki oznaczonej i jej własności, to z łatwością stwierdzi, że wyrażenie to spełnia warunki (5.3.1) definicji iloczynu skalarnego. Normą elementu $x(t)$ przestrzeni $W_n(t)$ z tak określonym iloczynem skalarnym jest liczba $\|x(t)\|$, gdzie

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^1 [x(t)]^2 dt.$$

5.4 Zadania

Zbadać liniową zależność wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ (Zad. 5.1-5.4)

5.1. $\bar{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{x}_2 = (0, -1, 2)$, $\bar{x}_3 = (4, 2, 1)$.

5.2. $\bar{x}_1 = (3, 0, 0)$, $\bar{x}_2 = (1, -1, 0)$, $\bar{x}_3 = (4, 2, 1)$.

5.3. $\bar{x}_1 = (0, -1, -1)$, $\bar{x}_2 = (0, -1, 0)$, $\bar{x}_3 = (-1, -1, 0)$.

5.4. $\bar{x}_1 = (4, 3, 2)$, $\bar{x}_2 = (3, 2, 1)$, $\bar{x}_3 = (2, 1, 0)$.

Wiedząc, że wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ są liniowo niezależne, zbadać liniową niezależność wektorów (Zad. 5.5-5.6)

5.5. $\bar{u} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{v} = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{v} = \bar{b} - \bar{c}$.

5.6. $\bar{u} = 2\bar{b} - 3\bar{c}$, $\bar{v} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{v} = \bar{a} - 2\bar{c}$.

Zbadać, czy wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Jeśli tak, znaleźć współrzędne wektora $\bar{x}$ w tej bazie (Zad. 5.7-5.10)

5.7. $\bar{a}_1 = (5, -3)$, $\bar{a}_2 = (2, 4)$, $\bar{x} = (1, -11)$.

5.8. $\bar{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{a}_2 = (2, -3, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, 5, 2)$, $\bar{x} = (3, 2, 3)$.

5.9. $\bar{a}_1 = (3, 2, 2)$, $\bar{a}_2 = (2, 3, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, 1, 3)$, $\bar{x} = (5, 1, 11)$.

5.10. $\bar{a}_1 = (2, 0, 2, 4)$, $\bar{a}_2 = (1, 1, 0, 2)$, $\bar{a}_3 = (0, 0, 3, 4)$, $\bar{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{x} = (2, 0, -1, 0)$.

Określić dla jakich wartości parametru k dane układy wektorów tworzą bazę w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (Zad. 5.11-5.14)

$$5.11. \bar{a}_1 = (1, 3, 1), \quad \bar{a}_2 = (k, 0, -1), \quad \bar{a}_3 = (2, k, 0).$$

$$5.12. \bar{a}_1 = (0, k, 1), \quad \bar{a}_2 = (k, 0, 1), \quad \bar{a}_3 = (2, 1, 0).$$

$$5.13. \bar{a}_1 = (0, 1, k), \quad \bar{a}_2 = (k, 0, 1), \quad \bar{a}_3 = (k, 1, 1+k).$$

$$5.14. \bar{a}_1 = (3, 0, k), \quad \bar{a}_2 = (2k, -1, k), \quad \bar{a}_3 = (2, 1, -1).$$

Zbiór $W_2(t)$ jest zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. Wykazać, że układ $f_1, f_2, f_3 \in W_2(t)$, $f_1(t) = 2$, $f_2(t) = t+3$, $f_3(t) = 2t^2+1$ tworzy bazę, znaleźć współrzędne wektora f w tej bazie (Zad. 5.15-5.18)

$$5.15. f = f(t) = t^2 - 3t.$$

$$5.16. f = f(t) = 3t - 1.$$

$$5.17. f = f(t) = 4t^2.$$

$$5.18. f = f(t) = -2t^2 - 2t + 1.$$

Wyznaczyć wartość wyrażenia (Zad. 5.19-5.21)

$$5.19. |(-2, 1, 3) \circ (1, 2, -4)| + \|(-2, 1, 3)\| \cdot \|(1, 2, -4)\|.$$

$$5.20. (\bar{a} + 2\bar{b}) \circ (2\bar{a} + \bar{b}), \text{ jeżeli } \bar{a} = (1, a, a+1), \bar{b} = (2a, -1, a-1), a \in \mathbb{R}.$$

$$5.21. \frac{\|\bar{a}\| \bar{a} + \|\bar{b}\| \bar{b}}{\|\|\bar{a}\| \bar{a} + \|\bar{b}\| \bar{b}\|}, \text{ jeżeli } a = (1, \sqrt{3}), b = (1, 0).$$

Sprawdzić, czy wektory tworzą układ ortogonalny (Zad. 5.22-5.23)

$$5.22. (1, 2, -2), (4, -1, 1), (0, 3, 3). \quad 5.23. (3, -2, 2), (2, 6, 3), (-18, -5, 1).$$

Sprawdzić, czy wektory tworzą układ ortonormalny (Zad. 5.24-5.26)

$$5.24. (2/3, -2/3, 1/3), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (-2/3, +2/3, -1/3).$$

$$5.25. (3/5, 4/5, 0), (-4/5, 3/5, 0), (0, 0, 1).$$

$$5.26. (1/2, 1/2, 0), (-1/2, 1/2, 0), (0, 0, 1).$$

Tak dobrać trzeci wektor, aby układ był ortogonalny (Zad. 5.27-5.28)

$$5.27. (1, 2, -1), (3, -1, 1). \quad 5.28. (a, 2, -1), (2, -a, 0).$$

Tak dobrać trzeci wektor, aby układ był ortonormalny (Zad. 5.29-5.30)

$$5.29. (1/3, 2/3, 2/3), (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2). \quad 5.30. (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0).$$

Wiedząc, że wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ tworzą układ ortogonalny, zbadać ortogonalność układu $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (Zad. 5.31-5.32)

$$5.31. \bar{u} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{v} = 2\bar{a} - \bar{b}, \bar{w} = \bar{b} - \bar{c}. \quad 5.32. \bar{u} = 2\bar{b} - 3\bar{c}, \bar{v} = \bar{a} + \bar{b}, \bar{w} = \bar{a} - 2\bar{c}.$$

Sprawdzić, czy wskazane struktury są przestrzeniami nad ciałem $\mathbb{R}$ (Zad. 5.33-5.36)

5.33. $(\mathbf{K}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathbf{K}$ jest zbiorem okręgów $K(S, r)$ o środku w punkcie S i promieniu r , oraz

$$\begin{aligned} K((x_1, y_1), r_1) + K((x_2, y_2), r_2) &= K((x_1 + x_2, y_1 + y_2), r_1 + r_2), \\ \lambda \cdot K((x, y), r) &= K((\lambda x, \lambda y), \lambda r). \end{aligned}$$

5.34. Przestrzeń ciągów zbieżnych.

5.35. Przestrzeń ciągów zbieżnych do zera.

5.36. $(\mathbf{L}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathbf{L}$ jest zbiorem prostych L o równaniu $y = ax + b$, oraz

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= L_3, \quad L_1 : y = a_1x + b_1, \quad L_2 : y = a_2x + b_2, \quad L_3 : y = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2), \\ \lambda \cdot L_1 &= L_2, \quad L_1 : y = ax + b, \quad L_2 : y = \lambda ax + \lambda b. \end{aligned}$$

5.37. Podać przykładową bazę w przestrzeni prostych (patrz poprzednie zadanie).

5.38. Niech $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorów trójwymiarowych. Czy działanie

$$(a_1, a_2, a_3) \circ (b_1, b_2, b_3) = a_1 + a_2 + a_3 + b + b_2 + b_3$$

jest iloczynem skalarnym?

Rozdział 6

Macierze i wyznaczniki

6.1 Macierze, działania na macierzach

Prostokątną tablicę

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

której elementy a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, należą do ustalonego ciała, nazywamy **macierzą** o wymiarze $m \times n$. Liczby m, n nazywamy **wymiarami macierzy**. Jeżeli elementy a_{ij} należą do ciała liczb rzeczywistych lub zespolonych, to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy **macierzą liczbową**, rzeczywistą lub zespoloną.

W rozdziale tym ograniczymy się jedynie do rozpatrywania macierzy liczbowych.

Dla ustalonego i , $1 \leq i \leq m$, oraz $j = 1, 2, \dots, n$ elementy a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy elementami **i -tego wiersza**. Odpowiednio dla ustalonego j , $1 \leq j \leq n$, oraz $i = 1, 2, \dots, m$ elementy a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy elementami **j -tej kolumny** tej macierzy.

Macierz $\mathbf{A}$ o elementach a_{ij} i wymiarach m, n będziemy oznaczali symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$ lub $\mathbf{A}_{m \times n}$, lub – jeśli wcześniej zostanie określony wymiar tej macierzy – symbolem $[a_{ij}]$. Zbiór wszystkich macierzy o wymiarach m, n oznaczać będziemy $M[m, n]$.

W szczególności, jeżeli $m = n$, to macierz nazywamy **macierzą kwadratową**. Wtedy liczbę n nazywamy wymiarem macierzy lub **stopniem** macierzy i zapisujemy $[a_{ij}]_n$ lub $\mathbf{A}_n$.

Macierzą zerową nazywamy macierz dowolnego wymiaru złożoną z samych zer, oznaczamy ją $\mathbf{O}$ lub $\mathbf{O}_{m \times n}$.

Macierzą transponowaną macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$, taką że $b_{ij} = a_{ji}$, to znaczy macierz uzyskaną przez zamianę wierszy na kolumny. Zatem $(A^T)^T = A$.

Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_n$, dla której

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } i \neq j \\ a_{ii} & \text{jeżeli } i = j \end{cases}.$$

Macierz diagonalną, dla której

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases},$$

nazywa się **macierzą jednostkową** i oznaczamy ją I lub I_n , to znaczy:

$$I := \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Macierzą trójkątną (górną lub dolną) nazywamy macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_n$, dla której

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } i > j \\ a_{ij} & \text{jeżeli } i \leq j \end{cases} \quad \text{lub} \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } i < j \\ a_{ij} & \text{jeżeli } i \geq j \end{cases}.$$

Jeżeli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]_n$ spełnia warunek $A^T = A$, to nazywamy ją **macierzą symetryczną**, to znaczy dla dowolnych $i, j = 1, 2, \dots, n$ jest spełniona równość $a_{ij} = a_{ji}$.

W zbiorze $M[m, n]$ macierzy liczbowych określimy działanie wewnętrzne – dodawanie macierzy i działanie zewnętrzne – mnożenie macierzy przez liczbę w sposób następujący.

Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą dwoma macierzami o tych samych wymiarach, $A, B \in M[m, n]$.

Definicja 6.1.1 Sumą macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, taką że $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ i piszemy $C = A + B$.

Definicja 6.1.2 Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ przez liczbę λ (rzeczywistą lub zespoloną) nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, taką że $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ i piszemy $B = \lambda A$. W szczególności, gdy $\lambda = -1$, piszemy $B = -A$.

Oczywiście, $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in M[m, n]$ oraz $\lambda \mathbf{A} \in M[m, n]$.

Dla dowolnych $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M[m, n]$ oraz dowolnych liczb λ, μ zachodzi:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ – przemienność dodawania,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ – łączność dodawania,
3. $(\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$ – rozdzielność mnożenia liczby przez macierz względem dodawania liczb,
4. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$ – rozdzielność mnożenia liczby przez macierz względem dodawania macierzy,
5. $\lambda(\mu \mathbf{A}) = (\lambda \mu) \mathbf{A}$ – łączność mnożenia przez liczbę,
6. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$, $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$.

Określimy również mnożenie macierzy.

Definicja 6.1.3 Jeżeli macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M[m, n]$ oraz $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in M[n, k]$, to iloczynem $\mathbf{AB}$ nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}] \in M[m, k]$, taką że

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k.$$

Oznacza to, że iloczyn $\mathbf{AB}$ jest wykonalny, gdy liczba kolumn macierzy $\mathbf{A}$ jest równa liczbie wierszy macierzy $\mathbf{B}$. Wynik mnożenia jest macierzą, której liczba wierszy jest zgodna z liczbą wierszy macierzy $\mathbf{A}$, liczba kolumn zaś jest równa liczbie kolumn macierzy $\mathbf{B}$.

Jak widać, mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne, nawet w przypadku macierzy kwadratowych.

Przez potęgę $\mathbf{A}^n$ rozumiemy n -krotne mnożenie macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ przez siebie, to znaczy $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{A}$ oraz dodatkowo $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

Jeżeli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ mają wymiary zezwalające na wykonanie poniżej opisanych działań, to zachodzą równości:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ – łączność mnożenia,
2. $\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \end{aligned} \right\}$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania,
3. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ – macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy kwadratowych,
4. $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$.

Przykład 6.1.1 Wykonać wskazane działania: $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{A} + 3(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, $\mathbf{A}\mathbf{C}$ na macierzach $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, jeżeli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wykonujemy działania zgodnie z ich definicjami:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} - \mathbf{B} &= 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 3(\mathbf{B} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + 3 \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aby lepiej zapamiętać kolejność wykonywanych obliczeń podczas mnożenia dwóch macierzy, omówimy schemat mnożenia zawarty w odpowiedniej tabelce.

Dla danych dwóch macierzy: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p}$ tworzymy tabelkę zawierającą $(m + n)$ wierszy i $(n + p)$ kolumn, zapisując w niej elementy danych macierzy w sposób wskazany na schemacie:

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{AB} \end{array}.$$

Na przykład:

		b_{11}	b_{12}	b_{13}
		b_{21}	b_{22}	b_{33}
a_{11}	a_{12}	$w_1 \circ k_1$	$w_1 \circ k_2$	$w_1 \circ k_3$
a_{21}	a_{22}	$w_2 \circ k_1$	$w_2 \circ k_2$	$w_2 \circ k_3$
a_{31}	a_{32}	$w_3 \circ k_1$	$w_3 \circ k_2$	$w_3 \circ k_3$

Elementem c_{ij} macierzy $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ jest iloczyn skalarny $w_i \circ k_j$ wektorów: i -wiersza oraz j -kolumny i znajduje się w tabeli na pozycji i -wiersza macierzy $\mathbf{A}$ oraz j -kolumny macierzy $\mathbf{B}$.

Przykład 6.1.2 Wyznaczyć macierz AB , jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tworzymy tabelkę

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 2 & 1 \\ & & & 3 & 2 \\ & & & 0 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -2+6+0 & -1+4-3 \\ 3 & 0 & 2 & 6+0+0 & 3+0-2 \end{array},$$

zatem $AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$

6.2 Wyznacznik macierzy kwadratowej

Przed przystąpieniem do zdefiniowania wyznacznika macierzy kwadratowej przypomnijmy, że przez **permutację** zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ rozumiemy dowolne uporządkowanie elementów tego zbioru. Jeżeli w danej permutacji zamienimy miejscami dwa elementy, to mówimy, że dokonaliśmy **inwersji**. Przez N oznaczamy liczbę inwersji potrzebną do przejścia od permutacji naturalnej (gdy liczby są uporządkowane rosnąco) do danej permutacji.

Przykład 6.2.1 Rozpatrzmy zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ oraz jego permutację $2, 4, 3, 1$. Permutację tę można uzyskać przez kolejne inwersje: $1, 4; 2, 4$. Zatem $N = 2$. Tę samą permutację można uzyskać również przez inwersje: $2, 3; 1, 4, 3, 1; 3, 2$. Wówczas $N = 4$.

Uwaga 6.2.1 Liczba inwersji N dla danej permutacji nie jest wyznaczona jednoznacznie, jednak wszystkie dopuszczalne wartości liczby N są albo parzyste, albo nieparzyste.

Wyznacznikiem kwadratowej macierzy liczbowej jest liczba przyporządkowana w jednoznaczny sposób tej macierzy. Omówimy dwie różne, oczywiście równoważne metody wyznaczania tej liczby.

6.2.1 Obliczanie wyznacznika bezpośrednio z definicji

Definicja 6.2.1 Dana jest macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]_n$. Jeżeli rozpatrzmy wszystkie możliwe permutacje $j_1, j_2, \dots, j_n$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i utworzymy iloczyn

$(-1)^N a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, gdzie N jest liczbą inwersji dla danej permutacji, wówczas sumę tych iloczynów nazywamy **wyznacznikiem macierzy** i oznaczamy:

$$\det \mathbf{A} \text{ lub } |\mathbf{A}|, \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wspomniane iloczyny tworzymy, wybierając z każdego wiersza tej macierzy po jednym elemencie tak, aby żadne dwa nie należały do tej samej kolumny. Otrzymamy w ten sposób iloczyn:

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}.$$

Pierwsze wskaźniki elementów oznaczające numer wiersza są uporządkowane według rosnącej wartości, czyli tworzą porządek naturalny, drugie zaś tworzą pewną permutację zbioru: $1, 2, \dots, n$.

Zatem:

$$\det \mathbf{A} := \sum (-1)^N a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n},$$

gdzie znak sumy oznacza sumę rozciągniętą na wszystkie możliwe permutacje $j_1, j_2, \dots, j_n$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Elementy, wiersze, kolumny, stopień macierzy nazywamy odpowiednio elementami, wierszami, kolumnami, stopniem wyznacznika.

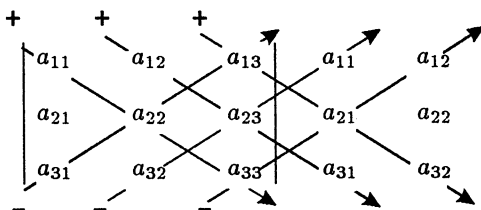
Przykład 6.2.2 Pokażemy, jak praktycznie stosować definicję wyznacznika do wyznaczników stopni: 1, 2, 3. Mamy kolejno:

$$\det [a_{11}] = a_{11},$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Schemat wyboru elementów do iloczynów, których suma tworzy wyznacznik stopnia trzeciego, oraz określania ich znaków, użyty w Przykładzie 6.2.2, nazywa się **regułą Sarrusa**. Dokładniej określa go następująca ilustracja:



6.2.2 Obliczanie wyznacznika regułą Laplace'a

Obliczanie wyznacznika stopnia $n > 3$ bezpośrednio na podstawie definicji jest sprawą uciążliwą. Omówimy więc inną metodę pozwalającą obliczyć wyznacznik stopnia n za pomocą wyznaczników stopnia $(n - 1)$. Metoda ta, zwana regułą Laplace'a, wymaga dodatkowego wprowadzenia nowych pojęć.

Skreślając w wyznaczniku macierzy kwadratowej A dowolny, np. i -wiersz i dowolną, np. j -kolumnę, otrzymamy wyznacznik stopnia $(n - 1)$, który nazywamy **minorem macierzy kwadratowej** i oznaczamy symbolem M_{ij} .

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} , które oznaczamy A_{ij} , nazywamy liczbę otrzymaną z pomnożenia minora M_{ij} przez liczbę $(-1)^{i+j}$, to znaczy:

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Pojęcie minora macierzy jest używane również w odniesieniu do dowolnej macierzy, niekoniecznie kwadratowej. Jeżeli w macierzy prostokątnej A skreślimy pewną liczbę wierszy i pewną liczbę kolumn, tak żeby elementy nieskreślane utworzyły macierz kwadratową M , to wyznacznik $\det M$ nazywamy **minorem macierzy**.

Przykład 6.2.3 Obliczyć trzy dopełnienia algebraiczne dowolnych elementów macierzy:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Obliczmy przykładowo dopełnienia algebraiczne elementów a_{11} , a_{12} , a_{32} .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-4) = 9,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - (-1)) = -16,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

Przykład 6.2.4 Ile minorów stopnia k można utworzyć z macierzy $A_{m \times n}$, $k \leq n$, $k \leq m$?

Spośród m wierszy wybieramy k na $\binom{m}{k}$ sposobów, analogicznie wyboru k kolumn spośród n dokonujemy na $\binom{n}{k}$ sposobów. Każdy wybór k wierszy łączymy ze wszystkimi wyborami k kolumn, co wyznacza $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ macierzy stopnia k . Zatem macierz $A_{m \times n}$ ma $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ minorów stopnia k .

Poniższe twierdzenie nazywamy **Regułą Laplace'a** rozwinięcia wyznacznika według elementów dowolnego wiersza lub kolumny.

Twierdzenie 6.2.1 Wyznacznik $\det A$ jest równy sumie iloczynów każdego elementu dowolnego i -tego wiersza lub j -tej kolumny i odpowiadającego temu elementowi dopełnienia algebraicznego, to znaczy:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (6.2.1)$$

lub

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}. \quad (6.2.2)$$

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Przykład 6.2.5 Obliczyć $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Wybieramy np. drugą kolumnę i zgodnie z (6.2.2) mamy:

$$\det A = 0 \cdot A_{12} + (-1) A_{22} + 0 \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-9) = 9.$$

Przykład 6.2.6 Obliczyć wyznacznik macierzy trójkątnej

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dokonując rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny, otrzymujemy

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

powtarzając tę czynność $(n-1)$ -krotnie, dostajemy

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}. \quad (6.2.3)$$

Definicja 6.2.2 Jeżeli wyznacznik danej macierzy kwadratowej jest równy zeru, to macierz nazywamy **macierzą osobliwą**.

Macierz nieosobliwa jest macierzą kwadratową o wyznaczniku różnym od zera.

Własności wyznaczników:

1. Wyznacznik macierzy, w której co najmniej jeden wiersz lub kolumna składa się z samych zer, jest równy zeru.

Własność ta wynika natychmiast z Twierdzenia Laplace'a, wystarczy rozwinąć wyznacznik według wiersza lub kolumny składających się z samych zer.

2. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$, to znaczy zamiana wierszy na kolumny nie zmienia wartości wyznacznika.

W celu udowodnienia tej własności wystarczy rozpisać zgodnie z definicją każdy z tych wyznaczników.

3. Przetawienie miejscami dwóch wierszy (kolumn) w macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika.

Istotnie, zmiana taka powoduje zmianę o jeden liczby inwersji w ciągu wskaźników, co zgodnie z definicją wyznacznika zmienia jego znak.

4. Wyznacznik o dwóch jednakowych wierszach (lub kolumnach) jest równy zeru.

Jeżeli przestawimy w wyznaczniku miejscami dwa jednakowe wiersze (lub kolumny), to wyznacznik nie ulegnie zmianie, a jednocześnie własność 3. zapewnia zmianę znaku, zatem musi być równy zeru.

5. Wspólny czynnik wszystkich elementów danego wiersza (lub kolumny) można wynieść przed znak wyznacznika, to znaczy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aby uzasadnić tę własność, wystarczy oba wyznaczniki rozwinąć według i -tego wiersza.

6. Wyznacznik, którego dwa wiersze (lub kolumny) są utworzone z elementów odpowiednio proporcjonalnych, jest równy zeru.

W celu udowodnienia tej własności należy z jednego z wyróżnionych dwóch wierszy (kolumn) wynieść przed wyznacznik współczynnik proporcjonalności, co uczyni wyznacznik z dwoma jednakowymi wierszami (kolumnami), a więc równy zeru.

7. Prawdziwy jest wzór:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

W celu udowodnienia tej własności wystarczy rozwinąć metodą Laplace'a wszystkie wyznaczniki według i -wiersza i po lewej stronie równości zastosować prawo rozdzielności mnożenia liczb względem dodawania liczb.

8. Wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie, jeżeli do elementów jednego wiersza (lub kolumny) dodamy odpowiednie elementy innego wiersza (lub kolumny), pomnożone przez dowolną liczbę, to znaczy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ta_{k1} & \dots & a_{in} + ta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Operację taką zapisujemy umownie $w_i := w_i + tw_k$.

Przedstawiona własność jest konsekwencją dwóch poprzednich i można ją uogólnić, to znaczy: wyznacznik nie ulegnie zmianie, jeżeli do pewnego wiersza (lub kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn).

9. Suma iloczynów elementów pewnego wiersza (lub kolumny) i dopełnień algebraicznych odpowiednich elementów innego wiersza (innej kolumny) jest równa zero, to znaczy:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = 0$$

dla ustalonych i, k , $i \neq k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq n$.

W celu udowodnienia tej własności rozpatrujemy dwa wyznaczniki:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

różniące się tym, że w wyznaczniku $\det A_1$ w k -tej kolumnie jest powtórzona i -ta kolumna. Z własności 4. wynika, że $\det A_1 = 0$. Rozwińmy ten wyznacznik według k -kolumny. Otrzymamy:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = 0, \quad (6.2.4)$$

gdzie A_{jk} , $j = 1, 2, \dots, n$, są dopełnieniami algebraicznymi elementów k -tej kolumny wyznacznika $\det A_1$. Ponieważ $\det A_1$ różni się od $\det A$ tylko k -tą kolumną, więc A_{jk} są również dopełnieniami algebraicznymi k -tej kolumny wyznacznika $\det A$. Równość (6.2.4) jest więc treścią własności.

10. Dla macierzy kwadratowej A stopnia n i dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\det(tA) = t^n \det A.$$

Aby udowodnić, wystarczy n -krotnie zastosować własność 5.

11. Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia jest równy iloczynowi wyznaczników tych macierzy, czyli

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Powyższą własność można udowodnić, stosując do obu stron równości definicję wyznacznika oraz wykonując wskazane działania na macierzach i wyznacznikach.

Z własności tej wynika, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia nie zależy od kolejności czynników, to znaczy:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

12. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Z własności 8. wynika, że jeśli wiersze (kolumny) macierzy kwadratowej A stopnia n potraktujemy jako wektory przestrzeni n -wymiarowej i dla danej macierzy wektory-wiersze (wektory-kolumny) są liniowo zależne, to $\det A = 0$, czyli:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} (\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = 0) \wedge (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0) \implies \det A = 0$$

lub

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} (\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n = 0) \wedge (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0) \implies \det A = 0,$$

gdzie $w_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ lub $k_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Przykład 6.2.7 Obliczyć wyznacznik

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}.$$

Dwukrotnie wykorzystamy własność 8., dokonując operacji na wierszach

$$w_1 := w_1 + (-1)w_3, \quad w_2 := w_2 + (-1)w_3,$$

następnie stosując dodatkowo własność 6., otrzymujemy:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Przykład 6.2.8 Dla danych macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sprawdzić własność 11.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{AB} = -24, \quad \det \mathbf{BA} = -24.$$

Tak więc $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, lecz $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{BA}$.

6.3 Rząd macierzy

Definicja 6.3.1 Rzędem macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, nazywamy liczbę, która jest najwyższym stopniem minora spośród niezerujących się minorów danej macierzy.

Rząd macierzy oznaczamy: $\text{rank } \mathbf{A}$ lub $r(\mathbf{A})$, lub $r_{\mathbf{A}}$, lub $r[a_{ij}]$.

Przyjmujemy również $r(\mathbf{O}) = 0$.

Zauważmy, że jeżeli $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, to $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Przykład 6.3.1 Określić rząd macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest wymiaru 3×4 , więc $r(\mathbf{A}) \leq 3$. Z macierzy tej możemy utworzyć cztery minory trzeciego stopnia. Jeżeli chociaż jeden z nich będzie różny od zera, to $r(\mathbf{A})$ będzie wynosił trzy. Łatwo jednak sprawdzić, że tak nie jest; wektory wierszowe są zależne, $w_1 - w_2 + w_3 = \bar{0}$, więc $r(\mathbf{A}) \leq 2$. Spośród $\binom{4}{2}\binom{3}{2}$ minorów drugiego stopnia istnieją różne od zera, np. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$, stąd $r(\mathbf{A}) = 2$.

W celu określenia rzędu macierzy $\mathbf{B}$ obliczymy $\det \mathbf{B}$, stosując rozwinięcie Laplace'a według elementów trzeciego wiersza:

$$\det \mathbf{B} = 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 19 - 21 = 55 \neq 0,$$

stąd $r(\mathbf{B}) = 4$.

Twierdzenie 6.3.1 *Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeżeli:*

1. w danej macierzy zamienimy wiersze na kolumny, to znaczy $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$,
2. przestawimy miejscami dowolne wiersze (kolumny) macierzy,
3. wiersze (kolumny) macierzy pomnożymy przez liczbę różną od zera,
4. dowolny wiersz (kolumnę) zastąpimy sumą danego wiersza (kolumny) i dowolnej kombinacji liniowej pozostałych wierszy (kolumn) danej macierzy.

Dowód twierdzenia jest bezpośrednią konsekwencją własności wyznaczników i przyjętej definicji rzędu macierzy.

Przykład 6.3.2 *Wyznaczyć rząd macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą trójkątną, której wyznacznik (równy iloczynowi elementów przekątnej, własność 12.) jest równy zeru, zatem $r(\mathbf{A}) \leq 3$. Zamieniając ostatnie kolumny miejscami, otrzymamy

$$r(\mathbf{A}) = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

gdyż w otrzymanej macierzy istnieje niezerowy (pogrubiony) minor trzeciego stopnia.

Uwaga 6.3.1 *Rząd dowolnej macierzy trójkątnej jest równy liczbie niezerowych elementów w ciągu $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.*

Przykład 6.3.3 *Wyznaczyć rząd macierzy A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dokonamy (opierając się na Twierdzeniu 6.3.1) odpowiednich "operacji" na wektorach wierszowych, które nie zmieniają rzędu macierzy, a jednocześnie sprowadzą macierz A do macierzy, w której zawiera się maksymalnie duża macierz trójkątna. Dokonujemy najpierw podstawień $w_2 := w_2 - w_1$; $w_3 := 2w_3 - w_1$ (to znaczy najpierw mnożymy trzeci wektor wierszowy przez 2, a następnie do otrzymanego wektora dodajemy wektor $-w_1$). Czynności te powodują, że w otrzymanej macierzy w pierwszym wektorze kolumnowym występują zera (z wyjątkiem pierwszego elementu), następnie dokonujemy podstawień $w_3 := w_3 - w_2$; $w_4 := w_4 + w_2$, dzięki którym otrzymujemy dwa zera w drugim wektorze kolumnowym. W otrzymanej w ten sposób macierzy ostatni wiersz składa się z samych zer, zatem $r(A) \leq 3$. W macierzy tej zawiera się jednak macierz trójkątna o rzędzie wynoszącym trzy, stąd

$$\begin{aligned} r(A) &= r \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= r \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3. \end{aligned}$$

6.4 Macierz odwrotna

Definicja 6.4.1 *Jeżeli dla danej kwadratowej nieosobliwej macierzy A istnieje macierz B , taka że $AB = BA = I$, to B nazywamy macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1} . Tak więc:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Twierdzenie 6.4.1 *Jeżeli macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą, to istnieje macierz $\mathbf{A}^{-1}$ odwrotna do niej, przy czym zachodzi równość:*

$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T, \quad (6.4.1)$$

gdzie A_{ik} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ik} macierzy $\mathbf{A}$.

Dowód. Sprawdzimy, że macierz określona wzorem (6.4.1) spełnia definicję macierzy odwrotnej, to znaczy:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det \mathbf{A}} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det \mathbf{A}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det \mathbf{A}} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det \mathbf{A}} \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{n \times n}, \\ c_{11} &= a_{11} \frac{A_{11}}{\det \mathbf{A}} + a_{12} \frac{A_{12}}{\det \mathbf{A}} + \dots + a_{1n} \frac{A_{1n}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{1i} = 1, \\ c_{12} &= a_{11} \frac{A_{21}}{\det \mathbf{A}} + a_{12} \frac{A_{22}}{\det \mathbf{A}} + \dots + a_{1n} \frac{A_{2n}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{2i} = 0. \end{aligned}$$

Wszystkie elementy $c_{ii} = 1$, ponieważ występuje w nich rozwinięcie wyznacznika według i -wiersza, natomiast na podstawie własności 9. wyznaczników okazuje się, że wszystkie a_{ik} dla $i \neq k$ są zerami. Stwierdzamy więc, że $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Podobnie można przeliczyć, że $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, a zatem twierdzenie jest udowodnione.

Z Twierdzenia 6.4.1 wynika następująca kolejność czynności wykonywanych podczas wyznaczania macierzy odwrotnej:

1. Obliczamy $\det \mathbf{A}$. Jeżeli $\det \mathbf{A} = 0$, to nie istnieje macierz odwrotna.
2. Jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to wyznaczamy dopełnienia algebraiczne A_{ij} wszystkich elementów macierzy.
3. Z dopełnień algebraicznych tworzymy macierz $\mathbf{A}^D$, a następnie transponujemy ją, otrzymując macierz $(\mathbf{A}^D)^T$.
4. Elementy macierzy $(\mathbf{A}^D)^T$ mnożymy przez $\frac{1}{\det \mathbf{A}}$. Otrzymujemy $\mathbf{A}^{-1}$;

$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^D)^T.$$

Przykład 6.4.1 Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, gdyż $\det \mathbf{A} = 25 \neq 0$. Postępujemy więc według omówionego schematu i otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 10, & A_{12} &= -2, & A_{13} &= -1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5, & A_{22} &= -1, & A_{23} &= -13, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, & A_{32} &= 6, & A_{33} &= 3. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -13 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^D)^T = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & -13 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^D)^T = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & -13 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{-1}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy poprawność obliczeń, wykonując mnożenie:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{-1}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.5 Zadania

Wykonać działania na macierzach (Zad. 6.1-6.8)

6.1. $2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

6.2. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$

6.3. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

$$6.4. \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$6.5. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.6. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$6.7. \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.8. \left(\begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & a \\ a & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -3 & a \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & a \\ a & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Wyznaczyć iloczyny macierzy zespolonych (Zad. 6.9-6.11)

$$6.9. \begin{bmatrix} 3-i & -2 \\ 5i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & 4 \\ 0 & 5-i \end{bmatrix}. \quad 6.10. \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.11. \begin{bmatrix} 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}^T.$$

Wykonać działania na macierzach (Zad. 6.12-6.15)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$6.12. A^2B + 2B + B^T. \quad 6.13. 3A + 2B + AB. \quad 6.14. A^3, \quad 6.15. (B - I)^2.$$

Wykonać wskazane działania na macierzach

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & -1 \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Zad. 6.16-6.19})$$

$$6.16. A^2B + 2B + B^T. \quad 6.17. 3A + 2B + AB. \quad 6.18. A^3. \quad 6.19. (B - I)^2.$$

Wyznaczyć iloczyn AA^T (Zad. 6.20-6.24)

$$6.20. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 6.21. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$6.22. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 6.23. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$6.24. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -i & -2i & 0 \end{bmatrix}.$$

Wykonać potęgowanie macierzy (Zad. 6.25-6.31)

$$6.25. \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}^3, \quad 6.26. \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}^4, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$6.27. \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}^3, \quad 6.28. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

$$6.29. \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n, \quad 6.30. \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

$$6.31. \mathbf{A}^k \text{ jeżeli } \mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}, \text{ gdzie } a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Obliczyć wyznaczniki (Zad. 6.32-6.46)

$$6.32. \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 6.33. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6.34. \begin{vmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 6.35. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$6.36. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6.37. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$6.38. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad 6.39. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$6.40. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 10 & 24 \\ 4 & 10 & 24 & 32 \end{vmatrix}, \quad 6.41. \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$6.42. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$6.43. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$6.44. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$6.45. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$6.46. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wyznaczyć wartość wyznaczników stopnia n (Zad. 6.47-6.49)

$$6.47. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad 6.48. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$6.49. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}.$$

Zbadać, dla jakiej wartości parametru λ macierz A jest macierzą nieosobliwą (Zad. 6.50-6.55)

$$6.50. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & -3 \\ \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.51. \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -1 \end{bmatrix}. \quad 6.52. \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$$6.53. \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.54. \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & i \\ 2 & \lambda & -1 \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.55. \begin{bmatrix} \lambda & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Zbadać, dla jakich liczb $x \in \mathbb{R}$ wyznacznik ma wartość rzeczywistą (Zad. 6.56-6.59)

$$6.56. \begin{vmatrix} 3 & 0 & i \\ -1 & x & -3 \\ x & i & 0 \end{vmatrix}. \quad 6.57. \begin{vmatrix} 0 & 1 & i & x \\ 1 & 0 & i & 1 \\ i & i & 0 & -1 \\ x & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$6.58. \begin{vmatrix} 1 & 2i & 0 & 0 \\ 2i & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & x \end{vmatrix} \cdot 6.59. \begin{vmatrix} 0 & 2 & x & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ i & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Obliczyć wartość wyrażenia $p = (1 + 2i)z$, gdzie z jest rozwiązaniem równania (Zad. 6.60-6.63)

$$6.60. \begin{vmatrix} 0 & 1 & i \\ i & 2 & -1 \\ 3 & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$6.61. \begin{vmatrix} 1 & z & 2i \\ 0 & -1 & -i \\ 2 & 0 & z \end{vmatrix} = 0.$$

$$6.62. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ z & i & i & 1 \\ i & 1 & z & i \end{vmatrix} = z^2 + z.$$

$$6.63. \begin{vmatrix} 0 & 1 & z & i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ z & -1 & 0 & 2 \\ i & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = z^2 + 3.$$

Wyznaczyć rząd macierzy (Zad. 6.64-6.75)

$$6.64. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$6.65. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & -1 & 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$6.66. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 1 & 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$6.67. \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$6.68. \begin{bmatrix} -1 & -1i & -2 & 3i & 0 & 1i \\ 4i & 1 & 0 & 2 & 3i & 2 \\ -1 & 4i & 6 & -7i & -3 & -1i \end{bmatrix}.$$

$$6.69. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$6.70. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$6.71. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}.$$

$$6.72. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

$$6.73. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$6.74. \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -10 \end{bmatrix}.$$

$$6.75. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ (Zad. 6.76-6.83)

$$6.76. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.77. \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

$$6.78. \begin{bmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ \lambda i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.79. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$$6.80. \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 3 \\ 2\lambda & 12 & -7 & \lambda+3 \end{bmatrix}.$$

$$6.81. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

$$6.82. \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.83. \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 & \lambda \\ 2 & 2 & -2 & 2\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć, jeżeli to możliwe, macierz odwrotną dla wskazanej macierzy (Zad. 6.84-6.96)

$$6.84. A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$6.85. B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.86. C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$6.87. D = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 3i \end{bmatrix}.$$

$$6.88. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.89. B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.90. C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.91. D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$6.92. A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.93. B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$6.94. C = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 4 \\ -1 & -2i & 1 \\ -2i & -1 & 2i \end{bmatrix}.$$

$$6.95. D = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.96. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem układu (7.1.1) nazywamy każdy ciąg wartości $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (to znaczy taki wektor $\bar{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$), które podstawione w miejsce niewiadomych, zamieniają go w układ tożsamości.

Zbiorem rozwiązań układu (7.1.1) nazywamy zbiór wszystkich wektorów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$, które są rozwiązaniami tego układu.

Rozpatrzmy dowolny układ równań liniowych. Zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. Zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym. Układ taki nazywamy **układem sprzecznym**.
2. Zbiór rozwiązań zawiera dokładnie jeden element. Układ taki nazywamy **układem oznaczonym**.
3. Zbiór rozwiązań zawiera nieskończenie wiele elementów. Taki układ nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Jeżeli układ ma rozwiązania, to znaczy jest oznaczony lub nieoznaczony, to mówimy, że jest **zgodny**.

Każde przekształcenie układu równań, nie zmieniające zbioru jego rozwiązań, nazywamy **przekształceniem tożsamościowym**.

Do tożsamościowych przekształceń układu równań liniowych należą:

1. Zamiana miejscami dwóch dowolnych równań.
2. Pomnożenie obu stron dowolnego równania przez dowolną liczbę różną od zera.
3. Dodanie do dowolnego równania dowolnej kombinacji liniowej pozostałych równań tego układu.

Zauważmy, że wymienione przekształcenia tożsamościowe pokrywają się z przekształceniami nie zmieniającymi rzędu macierzy wykonywanymi na wierszach tej macierzy, patrz Twierdzenie 6.3.1.

7.2 Układ n równań o n niewiadomych

Dany jest układ równań w postaci (7.1.1). Zajmiemy się najpierw przypadkiem najprostszym, gdy $m = n$, to znaczy liczba równań jest zgodna z liczbą niewiadomych. Wtedy w macierzowej postaci tego układu macierz współczynników jest macierzą kwadratową stopnia równego liczbie niewiadomych.

Jeżeli macierz A , macierz współczynników, jest macierzą nieosobliwą, to istnieje macierz odwrotna A^{-1} . Obie strony macierzowego równania liniowego $AX =$

$\mathbf{B}$ mnożymy lewostronnie przez $\mathbf{A}^{-1}$ i otrzymujemy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ponieważ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{X}$, więc

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (7.2.1)$$

Wzór (7.2.1) określa rozwiązanie układu (7.1.1) w przypadku gdy $m = n$ i macierz współczynników układu jest macierzą nieosobliwą.

Układ równań spełniający te założenia nazywamy **układem Cramera**.

Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n , wraz z mnożeniem macierzy, stanowi grupę, zatem równanie $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorem (7.2.1), patrz Twierdzenie 3.2.1.

Pokażemy, że rozwiązanie układu w postaci macierzy (7.2.1) można uzyskać inną metodą, mianowicie przez zastosowanie do układu równań tak zwanych wzorów Cramera.

Twierdzenie 7.2.1 (Cramera) *Jeżeli wyznacznik $\det \mathbf{A}$ macierzy współczynników układu n równań liniowych o n niewiadomych jest różny od zera, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami*

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} \\ x_2 &= \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}} \end{aligned} \right\}, \quad (7.2.2)$$

gdzie $\det \mathbf{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, są wyznacznikami macierzy uzyskanymi z macierzy $\mathbf{A}$ przez zastąpienie w niej j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Wzory (7.2.2) nazywamy **wzorami Cramera**.

Dowód. Pokazaliśmy, że wektor $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ jest jedynym rozwiązaniem omawianego układu. Wykorzystując metodę wyznaczania macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wynik można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix},$$

gdzie $\det A_j$ jest wartością wyznacznika macierzy różniącej się od macierzy A jedynie j -tą kolumną (stanowi ją kolumna wyrazów wolnych), uzyskaną w wyniku rozwinięcia tego wyznacznika według elementów j -tej kolumny. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie określone wzorami (7.2.2).

Przykład 7.2.1 Rozwiązać układ równań
$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \end{array} \right\}.$$

Obliczamy kolejno wyznaczniki

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -46,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -92, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -46.$$

Zatem

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2, \quad x_2 = \frac{-92}{-23} = 4, \quad x_3 = \frac{-46}{-23} = 2.$$

7.3 Badanie układu m równań o n niewiadomych

Zajmiemy się teraz badaniem układu (7.1.1) m równań o n niewiadomych, to znaczy ustaleniem, przy jakich warunkach układ ten jest zgodny lub sprzeczny.

Utwórzmy dla układu (7.1.1) dwie macierze: $A_{m \times n}$, $U_{m \times (n+1)}$, postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Są to, odpowiednio, macierz współczynników i tak zwana **macierz uzupełniona** (rozszerzona), która powstaje z macierzy A przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych.

określone poprzez niewiadome swobodne, a zbiór wszystkich rozwiązań jest zawsze ten sam.

Wniosek 7.3.1 Niech A będzie macierzą współczynników układu (7.1.1) a U macierzą uzupełnioną.

1. Jeżeli $r(A) = r(U) = n$, to układ (7.1.1) jest układem oznaczonym.
2. Jeżeli $r(A) = r(U) < n$, to układ jest układem nieoznaczonym.
3. Jeżeli $r(A) \neq r(U)$, to układ jest układem sprzecznym.

Przykład 7.3.1 Zbadać i ewentualnie rozwiązać układ równań.

$$\left. \begin{array}{rrrr} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 = 5 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 = 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & +2x_4 = 4 \\ 2x_1 & +7x_2 & & +2x_4 = 6 \end{array} \right\}.$$

Obliczamy wyznacznik macierzy współczynników, czyli macierzy A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ stąd } r(A) < 4.$$

Istnieje jednak niezerowy minor stopnia trzeciego

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \text{ stąd } r(A) = 3. \quad (7.3.4)$$

Aby określić rząd macierzy uzupełnionej U , zauważmy, że czwarte równanie jest kombinacją liniową trzech pierwszych, $w_4 = w_1 - w_2 + w_3$. Wobec tego $r(U) = 3$. Oznacza to, że badany układ jest układem nieoznaczonym. Minor (7.3.4) przyjmujemy jako minor bazowy i uzyskujemy układ

$$\left. \begin{array}{rrrr} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 5 & -x_4 \\ x_1 & -2x_2 & & = 3 & -x_4 \\ & 3x_2 & -x_3 & = 4 & -2x_4 \end{array} \right\}.$$

Niewiadoma x_4 jest niewiadomą swobodną. Rozwiązanie, przy tym podziale na niewiadome bazowe i swobodne, uzyskane za pomocą wzorów Cramera, ma postać

$$x_1 = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 5 - x_4 & 2 & 1 \\ 3 - x_4 & 2 & 0 \\ 4 - 2x_4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-3 + x_4}{11},$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 3 & 5-x_4 & 1 \\ 1 & 3-x_4 & 0 \\ 0 & 4-2x_4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
 x_3 &= \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5-x_4 \\ 1 & 2 & 3-x_4 \\ 0 & -3 & 4-2x_4 \end{vmatrix} = \frac{4-2x_4}{11}, \\
 x_4 &\in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Przykład 7.3.2 Zbadać, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + ax_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny.

Obliczamy wyznacznik macierzy współczynników

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a - 16 = 2(a^2 + 2a - 8).$$

Układ jest oznaczony, jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, zatem dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$.

Jeżeli $a = 2$, to $\det \mathbf{A} = 0$, $r(\mathbf{A}) = 2$, macierz uzupełniona zaś ma postać

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że trzeci wiersz tej macierzy jest różnicą dwóch pierwszych, zatem $r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{A}) = 2$. Oznacza to, że dla $a = 2$ układ jest układem nieoznaczonym. Ponieważ wyznacznik $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$ może być minorem bazowym, więc rozpatrujemy układ

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 5 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 &= 2 - x_3 \end{aligned} \right\},$$

skąd

$$x_1 = \frac{-1}{7}(5x_3 - 12), \quad x_2 = \frac{-1}{7}(-x_3 + 1), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $a = -4$, to $\det \mathbf{A} = 0$, $r(\mathbf{A}) = 2$, macierz uzupełniona zaś ma postać

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Minor tej macierzy, obejmujący jej trzy ostatnie kolumny, jest różny od zera, więc $r(\mathbf{U}) = 3$. Oznacza to, że dla $a = -4$ badany układ równań jest sprzeczny.

Ostatecznie mamy:

Przykład 7.4.1 *Rozwiązać układ równań*

$$\left. \begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Ponieważ $\det \mathbf{A} = 0$, a $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$, więc $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{U}) = 2$, to znaczy że układ jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wyznacznik M jest minorem bazowym odpowiadającym niewiadomym x_1, x_2 . Otrzymujemy stąd

$$x_1 = \frac{2}{5}x_3, \quad x_2 = \frac{2}{5}x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $x_3 = 0$, to również $x_1 = x_2 = 0$; jest to rozwiązanie zerowe.

7.5 **Zadania**

Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera układy równań (Zad. 7.1-7.16)

$$7.1. \quad \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

$$7.2. \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}.$$

$$7.3. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

$$7.4. \quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}.$$

$$7.5. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}.$$

$$7.6. \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}.$$

$$7.7. \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -9 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}.$$

$$7.8. \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$7.9. \quad \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}.$$

$$7.10. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

$$7.11. \quad \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$7.12. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

$$7.13. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}.$$

$$7.14. \quad \begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}.$$

$$7.15. \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$$

$$7.16. \begin{cases} 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ z - t = -4 \\ y - 2z + 2t = 6 \\ 3z - 4t = -12 \end{cases}$$

Sprawdzić, czy następujące układy równań mają rozwiązania i jeżeli istnieją, wyznaczyć je (Zad. 7.17-7.27)

$$7.17. \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$7.18. \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}$$

$$7.20. \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 2t + u = 1 \\ x + y + 2t - u = 0 \\ x + y + z + 2t = -1 \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - z = 3 \\ 4x + 5y - z = 6 \\ x + y + z = -1 \\ 4y + z = -2 \end{cases}$$

$$7.22. \begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ y + z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$7.23. \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$$

$$7.24. \begin{cases} 2x - y + z + 2t + 3u = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4t + 5u = 3 \\ 6x - 3y + 4z + 8t + 13u = 9 \\ 4x - 2y + z + t + 2u = 1 \end{cases}$$

$$7.25. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

$$7.26. \begin{cases} x - 2y + z + t - u = 0 \\ 2x + y - z - t + u = 0 \\ x + 7y - 5z - 5t + 5u = 0 \\ 3x - y - 2z + t - u = 0 \end{cases}$$

$$7.27. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 10x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć, dwoma metodami, rozwiązanie równania macierzowego $AX = B$ (Zad. 7.28-7.35)

$$7.28. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$7.29. A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$7.30. A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$7.31. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$7.32. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$7.33. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

$$7.34. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$7.35. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć rozwiązanie równania macierzowego $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (Zad. 7.36-7.39)

$$7.36. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$7.37. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$7.38. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$7.39. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ następujące układy równań mają rozwiązania? Wyznaczyć te rozwiązania (Zad. 7.40-7.45)

$$7.40. \begin{cases} x + 2y + 8z = -5 \\ y + 3z = -3 \\ 4x + y + 11z = k \end{cases}.$$

$$7.41. \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x - 6y + 2z = -1 \\ 2x + z = k \end{cases}.$$

$$7.42. \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y - z = k \end{cases}.$$

$$7.43. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - kx_3 = 8 \end{cases}.$$

$$7.44. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 = k \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$7.45. \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ y + 3z = -1 \\ x + 4z - t = -2 \\ y + 3t = k \end{cases}$$

Zbadać, w zależności od parametru, układy równań (Zad. 7.46-7.52)

$$7.46. \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

$$7.47. \begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 3x - y - az = 1 \\ x + ay - z = 13 \end{cases}$$

$$7.48. \begin{cases} (\lambda + 1)x + y + 2z = \lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1)x + \lambda y + (\lambda + 3)z = 5 \end{cases}$$

$$7.49. \begin{cases} mx_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + mx_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$7.50. \begin{cases} x_1 + (m + 1)x_2 = 5 \\ 3x_1 + mx_2 = 12 \\ (m + 1)x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$$

$$7.51. \begin{cases} x_1 + px_2 - x_3 = 13 \\ -3x_1 + x_2 + px_3 = 4p \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7.52. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

Zbadać, dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ układ wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny (Zad. 7.53-7.58)

$$7.53. \bar{a} = (1, 2, k), \bar{b} = (k, 3, 2), \bar{c} = (-1, 0, k).$$

$$7.54. \bar{a} = (1, 0, k), \bar{b} = (0, k, 0), \bar{c} = (0, 0, k).$$

$$7.55. \bar{a} = (2, k, 3), \bar{b} = (-1, k, 2), \bar{c} = (0, 3, 7).$$

$$7.56. \bar{a} = (1, m, 1), \bar{b} = (m, 3, 3), \bar{c} = (3, 1, 1).$$

$$7.57. \bar{a} = (1, m, 0), \bar{b} = (2, m, 0), \bar{c} = (0, 2, m).$$

$$7.58. \bar{a} = (1, 1, 5), \bar{b} = (m, m, 0), \bar{c} = (5, 5, -2).$$

Wykazać, że wektory $\bar{u}_i, i = 1, 2, 3, 4, \bar{u}_i \in \mathbb{R}^4 \left(\mathbb{R}^3 \right)$ są liniowo niezależne i przedstawić dany wektor $\bar{x}$ w postaci kombinacji liniowej tych wektorów (Zad. 7.59-7.62)

$$7.59. \bar{u}_1 = (1, 1, 1), \bar{u}_2 = (1, 1, 2), \bar{u}_3 = (1, 2, 3), \bar{x} = (6, 9, 14).$$

$$7.60. \bar{u}_1 = (5, 6, 5), \bar{u}_2 = (8, 11, 12), \bar{u}_3 = (16, 18, 10), \bar{x} = (2, 5, 12).$$

$$7.61. \bar{u}_1 = (1, 1, 0), \bar{u}_2 = (1, 0, -1), \bar{u}_3 = (0, -1, 1), \bar{x} = (-1, -2, 1).$$

$$7.62. \bar{u}_1 = (1, 1, 0, 1), \bar{u}_2 = (0, 1, 1, 0), \bar{u}_3 = (0, 0, 1, 1), \bar{u}_4 = (1, 0, 0, 1), \bar{x} = (3, 3, 3, 3).$$

Rozdział 8

Geometria analityczna w przestrzeni

8.1 Wektory w układzie współrzędnych

W Rozdziale 5. wprowadziliśmy pojęcie przestrzeni Euklidesa, przyjmując, że jest to przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{R}$, w której zdefiniowano iloczyn skalarny dwóch wektorów i normę wektora.

Obecnie omówimy szerzej własności wektorów przestrzeni $\mathcal{E}^3$, to znaczy przestrzeni Euklidesa utworzonej z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Elementami lub wektorami przestrzeni $\mathcal{E}^3$ są uporządkowane trójki liczb rzeczywistych (a_1, a_2, a_3) , $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Przestrzeń $\mathcal{E}^3$ jest przestrzenią trójwymiarową, to znaczy $\dim \mathcal{E}^3 = 3$. Umawiamy się, że bazą przestrzeni $\mathcal{E}^3$ jest trójka wektorów $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, które oznaczamy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Jest to tak zwana **baza kanoniczna**. Każdy wektor $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E}^3$ jest kombinacją wektorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, to znaczy

$$\bar{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}.$$

Liczby a_1, a_2, a_3 nazywamy **współrzędnymi wektora $\bar{a}$** , wektory $a_1 \mathbf{i}, a_2 \mathbf{j}, a_3 \mathbf{k}$ nazywamy **składowymi wektora $\bar{a}$** .

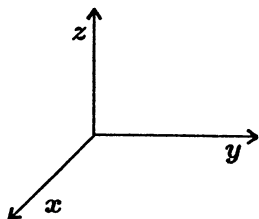
Definicja 8.1.1 *Iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathcal{E}^3$ oznaczanym $(\bar{a}, \bar{b})$ lub $\bar{a} \cdot \bar{b}$, lub $\bar{a} \circ \bar{b}$ dwóch dowolnych wektorów $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ nazywamy liczbę (patrz wzory (5.3.7), (5.3.2)):*

$$(\bar{a}, \bar{b}) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \angle (\bar{a}, \bar{b}).$$

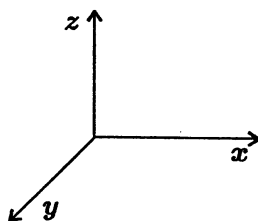
Liczba $|\bar{a}|$ oznacza długość wektora $\bar{a}$ i wynosi

$$|\bar{a}| := \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Wektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są parami prostopadłe i ponadto $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, tworzą więc **układ ortonormalny**. Jeżeli rozpatrzmy je jako wektory zaczepione (o wspólnym początku) i ponadto, jeżeli każdy z nich będzie wyznaczał jednostkę na odpowiedniej osi liczbowej, to otrzymamy układ trzech wzajemnie prostopadłych osi liczbowych, oznaczonych OX, OY, OZ . Tworzą one prostokątny układ współrzędnych, nazywany **układem kartezjańskim**. Wektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nazywamy **wersorami osi**. Wspólny punkt tych wektorów nazywamy **początkiem układu współrzędnych**.



Rys. 8.1.1



Rys. 8.1.2

Porządkując kolejność wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, a zatem osi OX, OY, OZ tak, by ruch postępowy śruby prawoskrętnej obracanej od osi OX do osi OY wyznaczał zwrot osi OZ , otrzymujemy układ współrzędnych kartezjańskich zwany **układem prawoskrętnym**, Rys. 8.1.1. Rys. 8.1.2 przedstawia **układ lewoskrętny**.

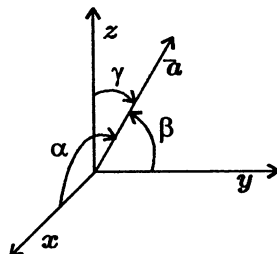
Uporządkowana trójka liczb (a_1, a_2, a_3) wyznacza jednoznacznie punkt przestrzeni $\mathcal{E}^3$, to znaczy $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E}^3$. Dlatego geometrycznie interpretujemy wektor $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ jako wektor odpowiadający odcinkowi OA , zaczepiony w punkcie $O = (0, 0, 0)$, tj. w początku układu współrzędnych, skierowany do punktu A i oznaczany $\overrightarrow{OA}$, lub $\overline{OA}$ – gdy nie ma obawy o pomylenie z odcinkiem.

Rodzina wektorów równej długości, mających ten sam kierunek i ten sam zwrot, stanowi klasę abstrakcji zwaną **wektorem swobodnym** (patrz Przykład 1.5.5). Dwa wektory $\overline{OA}, \overline{P_1P_2}$, gdzie $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{E}^3, P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{E}^3$, są sobie równe jako wektory swobodne, to znaczy $\overline{OA} = \overline{P_1P_2}$, jeżeli są określone tą samą trójką liczb, zatem

$$(a_1, a_2, a_3) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

gdyż $\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów skierowanych, jakie niezerowy wektor $\vec{a}$ tworzy z osiami współrzędnych, Rys. 8.1.3. Cosinusy tych kątów nazywamy **cosinusami kierunkowymi** wektora $\vec{a}$. Jeżeli $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, to liczby a_1, a_2, a_3 określają względne miary rzutów tego wektora odpowiednio na osie OX, OY, OZ i stąd otrzymujemy:



Rys. 8.1.3

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

Cosinusy kierunkowe dowolnego niezerowego wektora $\vec{a}$ spełniają następującą równość:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Dla uzasadnienia przeprowadzimy proste przekształcenia:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Ponieważ przestrzeń $\mathcal{E}^3$ jest zbudowana na elementach przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc wykorzystując określenie i własności działań dodawania wektorów i mnożenia przez liczbę dla wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $n = 3$, (patrz Przykład 5.1.1), otrzymujemy:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Definicja 8.1.2 Jeżeli dla danych wektorów $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^3$ istnieje liczba $k \in \mathbb{R}$, taka że $\vec{a} = k\vec{b}$, to wektory $\vec{a}, \vec{b}$ nazywamy **wektorami kolinearnymi**.

Wtedy $(\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{b}, \vec{b})$ oraz $(\vec{a}, \vec{b}) = k|\vec{b}|^2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ i stąd $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Zatem, jeżeli $k > 0$, to wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są wektorami równoległymi o zwrotach zgodnych; jeżeli $k < 0$, to wektory równoległe $\vec{a}, \vec{b}$ mają przeciwne zwroty. Jeżeli $|k| = 1$, to $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Z definicji wektorów kolinearnych wynika, że zachodzą związki

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \iff a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3$$

lub równoważnie

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k.$$

Oznacza to, że rząd macierzy $\mathbb{A}$, gdzie $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, jest równy 1, to znaczy $r(\mathbb{A}) = 1$.

Mówimy, że punkt C dzieli wektor $\overline{AB}$ w stosunku k , $k \neq -1$, jeżeli:

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{CB}.$$

Równość ta dla $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_c, y_c, z_c)$ daje związki

$$\begin{aligned} x_c - x_1 &= k(x_2 - x_1), \\ y_c - y_1 &= k(y_2 - y_1), \\ z_c - z_1 &= k(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

skąd

$$x_c = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y_c = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad z_c = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $k = 1$, punkt C dzieli odcinek AB na połowy, zatem współrzędne punktu S , dzielącego odcinek na połowy, wyrażają się wzorami:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_s = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Definicja 8.1.3 *Trzy niezerowe wektory*

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

nazywamy wektorami komplanarnymi lub współpłaszczyznowymi, jeżeli są równoległe do tej samej płaszczyzny.

Twierdzenie 8.1.1 *Warunkiem koniecznym i wystarczającym komplanarności trzech niezerowych wektorów jest ich liniowa zależność.*

Dowód. Przypuśćmy, że wektory są komplanarne. Ponieważ są równoległe do tej samej płaszczyzny, więc jako wektory swobodne mogą być traktowane jako leżące we wspólnej płaszczyźnie. Płaszczyzna jest przestrzenią dwuwymiarową, zatem każde trzy wektory są w niej liniowo zależne.

Przypuśćmy teraz, że wektory są liniowo zależne. Oznacza to, że istnieją stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nie znikające jednocześnie, dla których spełniona jest równość

$$\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} = \bar{0}, \tag{8.1.1}$$

skąd, zakładając, że $\alpha_3 \neq 0$, mamy:

$$\bar{c} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \bar{a} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \bar{b}.$$

Z ostatniej równości wynika, że wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ leżą we wspólnej płaszczyźnie, są więc komplanarne.

Równość (8.1.1) jest wektorową postacią układu trzech równań liniowych o niewiadomych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Jest to układ jednorodny, mający rozwiązania niezerowe, więc wyznacznik macierzy tego układu, która to macierz jest macierzą utworzoną ze współrzędnych wektorów, jest równy zeru. Dlatego Twierdzenie 8.1.1 przyjmie postać:

Twierdzenie 8.1.2 *Warunkiem koniecznym i wystarczającym komplanarności trzech wektorów jest zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współrzędnych tych wektorów, to znaczy*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wniosek 8.1.1 *Gdy dany jest układ k wektorów, $k \geq 3$, których współrzędne tworzą macierz $\mathbb{A}$ o wymiarze $k \times 3$, wówczas:*

- jeżeli $r(\mathbb{A}) = 1$, to każde dwa wektory układu są kolinearne,
- jeżeli $r(\mathbb{A}) = 2$, to układ ten jest komplanarny,
- jeżeli $r(\mathbb{A}) = 3$, to istnieją trzy wektory niekomplanarne, liniowo niezależne, a każdy z pozostałych można jednoznacznie przedstawić jako ich kombinację liniową.

Definicja 8.1.4 *Iloczynem wektorowym dwóch niezerowych wektorów $\bar{a}, \bar{b}$, nazywamy wektor $\bar{w}$ określony warunkami:*

1. $|\bar{w}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \angle(\bar{a}, \bar{b})$, to znaczy długość wektora $\bar{w}$ jest równa liczbie określającej pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach,
2. kierunek wektora $\bar{w}$ jest taki, że $\bar{w} \perp \bar{a}, \bar{w} \perp \bar{b}$,
3. zwrot wektora $\bar{w}$ jest tak dobrany, by uporządkowana trójka wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{w}$ tworzyła układ o orientacji zgodnej z przyjętą orientacją układu współrzędnych, to znaczy układ prawoskrętny.

Iloczyn wektorowy oznaczamy $\bar{w} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Gdy co najmniej jeden z wektorów $\bar{a}, \bar{b}$ jest wektorem zerowym, przez iloczyn wektorowy rozumiemy wektor zerowy. Również jeżeli $\bar{a}, \bar{b}$ są wektorami kolinearnymi, to iloczyn wektorowy jest wektorem zerowym.

Iloczyn wektorowy ma własności:

- działanie $\times$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze wektorów,
- $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$,
- $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,
- $\alpha (\bar{a} \times \bar{b}) = (\alpha \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\alpha \bar{b})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 8.1.3 Jeżeli $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, to

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}.$$

Dowód. Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego dostaniemy:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \bar{0}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Ponadto, wykorzystując własności iloczynu wektorowego, mamy:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{a} \times \bar{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = a_1 b_1 (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \\ &+ a_1 b_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1 b_3 (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_2 b_1 (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2 b_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \\ &+ a_2 b_3 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + a_3 b_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3 b_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3 b_3 (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że otrzymane wyrażenie, które jest tezą, może być również rozwinięciem odpowiedniego wyznacznika, mianowicie

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Definicja 8.1.5 Iloczynem mieszanym trzech wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nazywamy liczbę

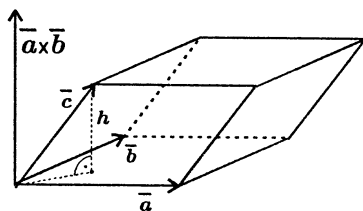
$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) := (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego jest następująca:

Rozważmy równoległoscian, Rys. 8.1.4, rozpięty na trzech wektorach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ o wspólnym początku. Zgodnie z określeniem iloczynu skalarnego mamy:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \angle(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}). \quad (8.1.2)$$

Z Definicji 8.1.4 iloczynu wektorowego wynika, że liczba $|\vec{a} \times \vec{b}|$ określa pole podstawy równoległoscianu wyznaczonej przez wektory $\vec{a}, \vec{b}$, z Rys. 8.1.4 widać zaś, że liczba $|\vec{c}| \cdot \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ określa długość odcinka h , który jest wysokością równoległoscianu opuszczoną na wspomnianą podstawę. Wynika stąd, że wartość bezwzględna iloczynu mieszanego trzech niekomplanarnych wektorów określa objętość równoległoscianu zbudowanego na tych wektorach, to znaczy



Rys. 8.1.4

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Przykład 8.1.1 Dany jest czworościan o wierzchołkach w punktach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$, $D = (3, 4, 9)$. Obliczyć objętość czworościanu.

Utwórzmy wektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Objętość czworościanu $ABCD$ wynosi $|V| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P \cdot h$, gdzie $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ jest polem równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}, \vec{b}$, natomiast $h = |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ jest wysokością czworościanu (i równoległoscianu) rozpiętego na wektorach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, czyli

$$|V| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ||\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

patrz (8.1.2). Ostatecznie szukana objętość wynosi

$$|V| = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-84| = 14.$$

8.2 Niekartezjańskie układy współrzędnych

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{E}^3$ z prostokątnym układem współrzędnych. Wiadomo, że położenie dowolnego punktu tej przestrzeni jest jednoznacznie określone przez podanie jego współrzędnych kartezjańskich, tj. liczb x, y, z , Rys. 8.2.1.

Czy jest to jedyne jednoznaczne określenie punktu w przestrzeni? Odpowiedzią są następujące przykłady.

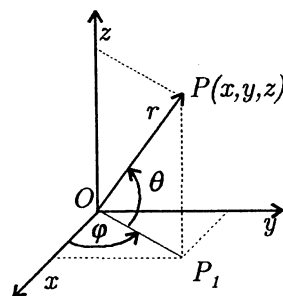
8.2.1 Współrzędne sferyczne

Obierzmy dowolny punkt P o współrzędnych kartezjańskich x, y, z . Przez $r, r \geq 0$, oznaczmy liczbę równą długości wektora $\overline{OP}$. Liczba φ niech oznacza miarę łukową kąta, jaki tworzy rzut wektora $\overline{OP}$ na płaszczyznę OXY z dodatnim kierunkiem osi OX , to jest $\varphi = \angle(OX, \overline{OP_1})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Liczba θ niech oznacza miarę łukową kąta, jaki tworzy wektor $\overline{OP}$ z płaszczyzną OXY , to jest $\theta = \angle(\overline{OP_1}, \overline{OP})$, $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Trójkę liczb (r, φ, θ) nazywamy **współrzędnymi sferycznymi punktu P** .

Zależność między położeniem punktu a jego współrzędnymi sferycznymi jest wzajemnie jednoznaczna z wyjątkiem punktów leżących na osi OZ , którym odpowiada $\theta = \frac{\pi}{2}$ lub $\theta = -\frac{\pi}{2}$ z odpowiednio ustaloną wartością $r \neq 0$ przy dowolnym φ .

Jeżeli natomiast $r = 0$ (to znaczy punkt jest początkiem układu współrzędnych), to obie wartości φ i θ są dowolne.



Rys. 8.2.1

Liczbę r nazywamy **modułem punktu P** , a liczby φ, θ odpowiednio **długością i szerokością geograficzną punktu P** , odcinek oraz wektor $\overline{OP}$ nazywamy **promieniem wodzącym punktu P** .

Między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi tego samego punktu zachodzą ściśle związki. Posługując się Rys. 8.2.1, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x &= |\overline{OP_1}| \cos \varphi = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= |\overline{OP_1}| \sin \varphi = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia zależności odwrotnych zauważmy, że $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, skąd

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ponadto kąt φ spełnia jednocześnie dwie zależności:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

natomiast θ jest kątem, dla którego

$$\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Punkty o współrzędnych

$$r = R, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

leżą na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, inaczej mówiąc, sfera ta ma równanie $r = R$, i to uzasadnia nazwę tych współrzędnych.

Przykład 8.2.1 Dany jest we współrzędnych kartezjańskich punkt $M = (\sqrt{3}, -3, -2)$. Określić jego współrzędne sferyczne.

$$r = \sqrt{3 + 9 + 4} = 4,$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3} \vee \varphi = \frac{5\pi}{3} \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \vee \varphi = \frac{5\pi}{3} \end{aligned} \right\}, \quad \text{zatem } \varphi = \frac{5\pi}{3}.$$

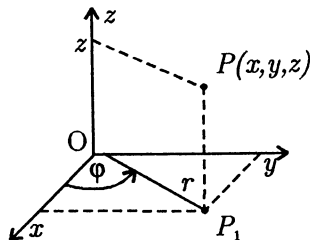
Ponadto: $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ i $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, zatem $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Otrzymujemy więc $P = (4, \frac{5}{3}\pi, -\frac{\pi}{6})$.

8.2.2 Współrzędne walcowe (cylindryczne)

Obierzmy dowolny punkt P o współrzędnych kartezjańskich x, y, z , Rys. 8.2.2. Położenie punktu P nie leżącego na osi OZ może być jednoznacznie określone przez trójkę liczb (r, φ, z) , którą nazywamy **współrzędnymi walcowymi** lub **współrzędnymi cylindrycznymi** punktu P .

Liczba r , $r \geq 0$, oznacza długość rzutu wektora $\overline{OP}$ na płaszczyznę OXY , to znaczy $r = |\overline{OP_1}|$. Liczba φ oznacza miarę kąta, jaki tworzy promień r z dodatnim kierunkiem osi OX , wyrażoną w mierze łukowej; to znaczy $\varphi = \angle(OX, \overline{OP_1})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Liczba z jest kartezjańską współrzędną z punktu P , $z \in \mathbb{R}$.



Rys. 8.2.2

Z podanych informacji wynika, że współrzędne walcowe są połączeniem znanych wcześniej współrzędnych biegunowych określających na płaszczyźnie OXY punkt P_1 , tj. rzut punktu P na tę płaszczyznę, ze współrzędną z punktu P .

Równanie $r = R$, a więc zbiór punktów o współrzędnych $r = R$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \mathbb{R}$ jest równaniem powierzchni walca obrotowego w $\mathcal{E}^3$, fakt ten uzasadnia nazwę współrzędnych.

Pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a cylindrycznymi zachodzą zależności:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= z, \\\text{gdzie } r &\geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

8.3 Krzywe stożkowe na płaszczyźnie

Przypomnijmy znane z kursu szkolnego informacje o krzywych stożkowych, to znaczy o okręgu, elipsie, hiperboli i paraboli.

Wyrażenia $\cosh t := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ i $\sinh t := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, określają funkcje hiperboliczne, z którymi czytelnik zapoznał się podczas omawiania funkcji elementarnych, patrz (2.4.1) na stronie 60.

Omawiane krzywe stożkowe są opisane równaniami drugiego stopnia.

Każde równanie drugiego stopnia

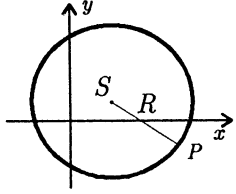
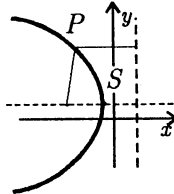
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (8.3.1)$$

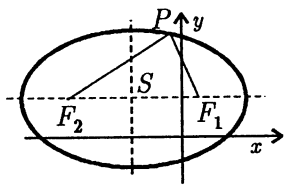
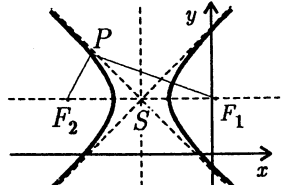
przedstawia jedną z krzywych stożkowych lub stożkową zdegenerowaną (prostą, układ dwóch prostych) albo punkt lub zbiór pusty.

W szczególności, gdy $C = 0$, równanie (8.3.1) można łatwo sprowadzić do postaci kanonicznej, i będą to odpowiednio:

- jeżeli $A \cdot B > 0$ – równanie elipsy, punktu lub zbioru pustego, jeżeli dodatkowo $A = B$ – równanie okręgu, punktu lub zbioru pustego,
- jeżeli $A \cdot B < 0$ – równanie hiperboli lub dwóch przecinających się prostych,
- jeżeli $A \cdot B = 0$ – równanie paraboli lub jednej prostej, lub dwóch prostych równoległych.

Przykład 8.3.1 *Określić, jakie krzywe określają podane równania, sprowadzić je do postaci kanonicznej.*

	okrąg	parabola
definicja geometryczna	zbiór punktów, których odległość od środka jest stała i wynosi R	zbiór punktów równoodległych od ogniska i kierownicy
wielkości charakterystyczne	$S_0 = (x_0, y_0)$ – środek R – promień	$S_0 = (x_0, y_0)$ – wierzchołek $x = x_0 - \frac{p}{2}$ – kierownica $c = \frac{p}{2} + x_0$ – ogniskowa
postać kanoniczna równania	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$
przedstawienie parametryczne	$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t, \\ y = y_0 + R \sin t, \\ t \in (0, 2\pi) \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + pt^2 \\ y = y_0 + \sqrt{2p}t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$
postać zespolona	$ z - z_0 = R$ $z = z_0 + Re^{it}, t \in (0, 2\pi)$	
mimośrodek $e = \frac{c}{a}$	$e = 1$	
rysunek		

	elipsa	hiperbola
definicja geometryczna	zbiór punktów, których suma odległości od ognisk jest stała i wynosi $2a$	zbiór punktów, których różnica odległości od ognisk jest stała i wynosi $2a$
wielkości charakterystyczne	$S_0 = (x_0, y_0)$ – środek a, b – półosie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – ogniskowa	$S_0 = (x_0, y_0)$ – środek a, b – półosie $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – ogniskowa
postać kanoniczna równania	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
przedstawienie parametryczne	$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t, \\ y = y_0 + b \sin t, \\ t \in (0, 2\pi) \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cosh t, \\ y = y_0 + b \sinh t, \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$
postać zespolona	$ z - z_1 + z - z_2 = 2a$ z_1, z_2 – ogniska	$ z - z_1 - z - z_2 = 2a$ z_1, z_2 – ogniska
mimośrodek $e = \frac{c}{a}$	$e < 1$,	$e > 1$
rysunek		

a) $x^2 + 4y^2 + 5 = 0$,

b) $x^2 - 4y^2 = 0$,

c) $4x^2 + 4y^2 + x = 0$,

d) $2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$.

Ad a) Ponieważ $A = 1$, $B = 4$, zatem $A \cdot B > 0$, $A \neq B$. Wobec tego równanie przedstawia elipsę. Ze względu jednak na to, że lewa strona równania jest stale dodatnia widać, że elipsa ta degeneruje się do zbioru pustego, można powiedzieć, że jest to **elipsa urojona**.

Ad b) Tym razem $A = 1$, $B = -4$, czyli $A \cdot B < 0$. Jest to więc przypadek hiperboli. Równanie to zapiszmy w postaci równoważnej

$$(x - 2y)(x + 2y) = 0.$$

Wynika stąd, że $x - 2y = 0$ lub $x + 2y = 0$, co świadczy, że rozważane równanie przedstawia dwie przecinające się proste (**hiperbola zdegenerowana**).

Ad c) Ponieważ $A = B = 4$, zatem jest to równanie okręgu o postaci kanonicznej

$$\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{64}.$$

Ad d) W równaniu tym nie występuje y^2 , zatem $A \cdot B = 0$; jest to więc równanie paraboli o postaci kanonicznej

$$(x + 3)^2 = \frac{-3}{2}(y - 1).$$

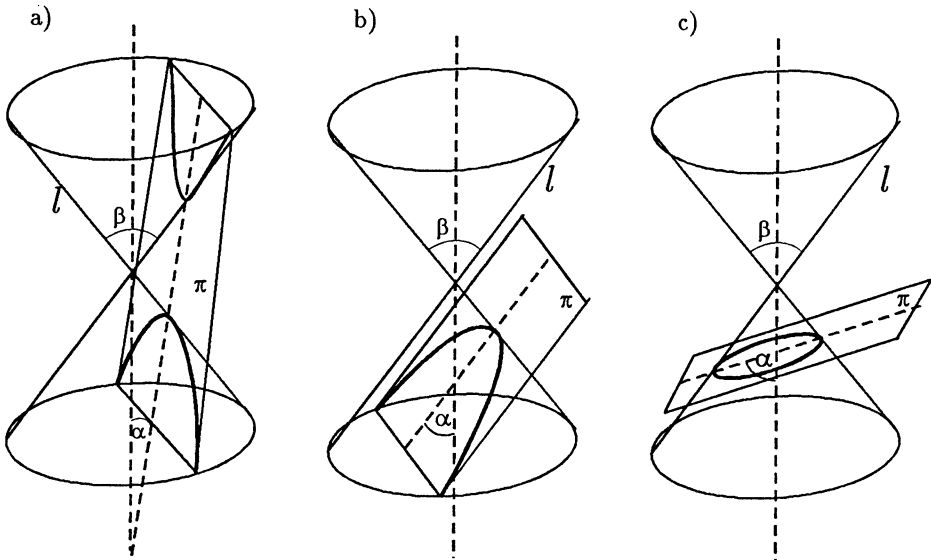
Ośią symetrii tej paraboli jest prosta $y = 1$, wierzchołkiem jest punkt $S = (-3, 1)$.

Geneza nazwy stożkowych wiąże się z płaskimi przekrojami stożka obrotowego, przedstawionymi na Rys. 8.3.1.

Jeżeli płaszczyzna π przekroju stożka tworzy z osią obrotu stożka kąt α oraz β jest kątem rozwarcia przy wierzchołku stożka, to w przekroju otrzymujemy, w zależności od kąta α , kolejno:

- jeżeli $\alpha = 0$ – hiperbolę lub układ dwóch prostych przecinających się,
- jeżeli $0 < \alpha < \frac{\beta}{2}$ – hiperbolę, patrz Rys. 8.3.1a),
- jeżeli $\alpha = \frac{\beta}{2}$ – parabolę, patrz Rys. 8.3.1b),

- jeżeli $\frac{\beta}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, - elipsę, patrz Rys. 8.3.1c),
- jeżeli $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - koło lub punkt.



Rys. 8.3.1

8.4 Przykłady innych krzywych na płaszczyźnie

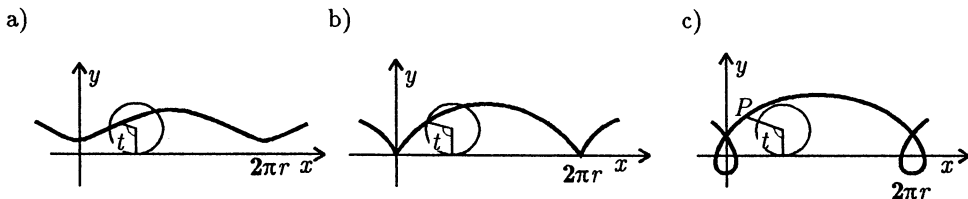
Obecnie podamy kilka przykładów krzywych na płaszczyźnie, których równania nie są równaniami drugiego stopnia. Będą to krzywe wyższych stopni lub krzywe przestępne. Z równaniami tych krzywych będziemy się spotykać w różnych zagadnieniach w dalszej nauce.

Cykloida

Cykloida jest to krzywa, jaką opisuje punkt P sztywno związany z kołem toczącym się po prostej. Otrzymałą krzywą opisują równania

$$\begin{cases} x = rt - c \sin t, \\ y = r - c \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

W równaniach cykloidy liczba $c > 0$ oznacza odległość punktu P od środka koła.



Rys. 8.4.1

Rozpatrujemy trzy przypadki:

1. Punkt P leży wewnątrz toczącego się koła ($0 < c < r$). Otrzymana cykloida nosi nazwę skróconej, patrz Rys. 8.4.1a).
2. Punkt P leży na okręgu toczącego się koła ($c = r$), patrz Rys. 8.4.1b). Otrzymana cykloida ma równania:

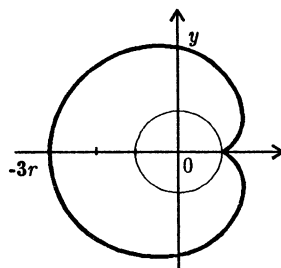
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Punkt P jest zewnętrznym punktem ($c > r > 0$) sztywno związanym z kołem. Otrzymana cykloida nosi nazwę wydłużonej, patrz Rys. 8.4.1c).

Kardioida

Kardioida jest krzywą, jaką opisuje stały punkt P ruchomego koła toczącego się zewnętrznie po stałym kole o tym samym promieniu, patrz Rys. 8.4.2. Równania kardioidy:

$$\begin{cases} x = r(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = r(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



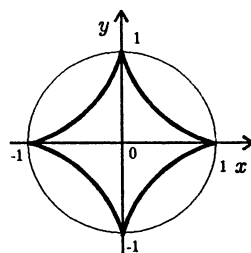
Rys. 8.4.2

Asteroida

Asteroida jest krzywą, jaką opisuje stały punkt P ruchomego koła o promieniu $\frac{1}{4}r$ toczącego się wewnątrz stałego koła o promieniu r , patrz Rys. 8.4.3.

Równania asteroidy:

$$\begin{cases} x = r \cos^3 \frac{t}{4} \\ y = r \sin^3 \frac{t}{4} \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



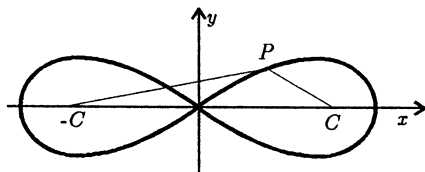
Rys. 8.4.3

Lemniskata Bernoulliego

Lemniskata jest miejscem geometrycznym punktu P , dla którego iloczyn odległości od dwóch stałych punktów $C, -C$, zwanych ogniskami, jest stały i wynosi a^2 , patrz Rys. 8.4.4.

Równanie lemniskaty:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2).$$



Rys. 8.4.4

Spirale

Ogólnie: spiralą nazywamy każdą krzywą, którą można opisać we współrzędnych biegunowych równaniem $r = f(t)$, $t > 0$, gdzie $f(t)$ jest funkcją monotoniczną. Spirala może przyjmować najróżniejsze kształty, nigdy jednak nie ma punktów "samoprzecięć" i jest krzywą nieograniczoną. Najlepiej są znane trzy spirale:

- **spirala Archimedesesa** – krzywa o równaniu $r = c \cdot t$ – zbiór punktów, które mają współrzędne biegunowe postaci

$$(c \cdot t \cos t, c \cdot t \sin t), \quad c > 0 \text{ ustalone}, t > 0.$$

Spirala ma tę własność, że każda półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych przecina się z nią w punktach $M_1, M_2, \dots$ takich, że $|M_i M_{i+1}| = 2\pi c$, dla $i = 1, 2, \dots$, gdzie $c > 0$ jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą, patrz Rys. 8.4.5a),

- **spirala hiperboliczna** – krzywa o równaniu $r = \frac{k}{t}$, – zbiór punktów, które mają współrzędne biegunowe postaci

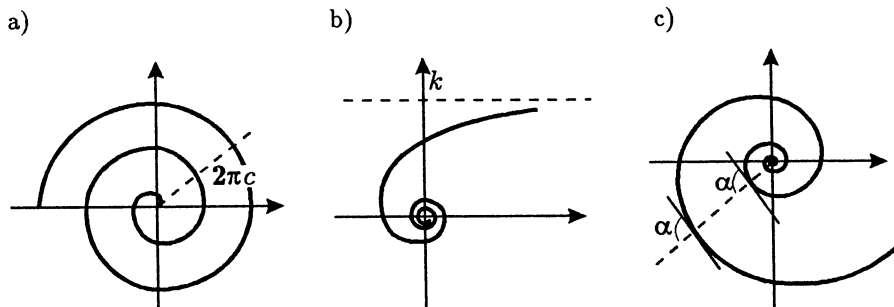
$$\left(\frac{k}{t} \cos t, \frac{k}{t} \sin t \right), \quad k > 0 \text{ ustalone}, t > 0.$$

Spirala ta ma asymptotę o równaniu $y = k$, patrz Rys. 8.4.5b),

- **spirala logarytmiczna** – krzywa o równaniu $r = ke^{tp}$ – zbiór punktów, które mają współrzędne biegunowe postaci

$$(ke^{p \cdot t} \cos t, ke^{p \cdot t} \sin t), \quad k > 0 \text{ ustalone}, p \text{ dowolne, ustalone}, t \in \mathbb{R}.$$

Spirala ta ma tę własność, że każda półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych przecina ją (nieskończenie wiele razy) zawsze pod tym samym kątem α , takim że $p = \operatorname{ctg} \alpha$, patrz Rys. 8.4.5c).



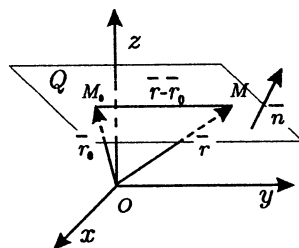
Rys. 8.4.5

8.5 Równanie płaszczyzny

Wyznaczać będziemy równanie płaszczyzny rozpatrywanej w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa $\mathcal{E}^3$. Ponieważ położenie płaszczyzny może być jednoznacznie określone na wiele sposobów, więc podamy kilka przykładów odpowiadających różnym przypadkom.

Przykład 8.5.1 *Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez ustalony punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i prostopadłej do ustalonego niezerowego wektora $\bar{n} = (A, B, C)$, zwanego wektorem normalnym płaszczyzny.*

Niech punkt $M = (x, y, z)$ oznacza dowolny zmienny punkt płaszczyzny Q , a wektor $\bar{r} = \overline{OM}$ jego wektor wodzący, to znaczy wektor zaczepiony w początku układu. Różnica $\bar{r} - \bar{r}_0 = \overline{OM} - \overline{OM}_0$ jest wektorem $\overline{M_0M}$, stąd $(\bar{r} - \bar{r}_0) \subset Q$, patrz Rys. 8.5.1.



Rys. 8.5.1

Ponieważ $\bar{n} \perp Q \wedge (\bar{r} - \bar{r}_0) \subset Q$, więc $\bar{n} \perp (\bar{r} - \bar{r}_0)$ i stąd mamy $\bar{n} \circ (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$. Ostatnia równość wyznacza równanie

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

które ze względu na dowolność punktu M jest równaniem szukanej płaszczyzny Q . Warunek niezerowości wektora normalnego $\bar{n} = (A, B, C)$ wygodnie jest zapisać w postaci $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Po wykonaniu działań w tym równaniu i dokonaniu podstawienia $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ otrzymujemy

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

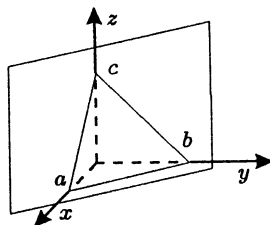
Równanie to nazywamy **postacią ogólną** równania płaszczyzny.

Rozpatrzmy szczególne przypadki tego równania.

1. Jeżeli płaszczyzna nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, to $D \neq 0$ i wtedy dzieląc stronami przez $-D$, po odpowiednich podstawieniach, otrzymamy równanie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

zwane **postacią odcinkową** równania płaszczyzny. Płaszczyzna ta przecina oś OX w punkcie $x = a$, oś OY w punkcie $y = b$ oraz oś OZ w punkcie $z = c$, patrz Rys. 8.5.2.



Rys. 8.5.2

2. Jeżeli $A = 0$, $B^2 + C^2 > 0$, to wektor $\vec{n} \perp OX$, skąd $Q \parallel OX$. Oznacza to, że równanie $By + Cz + D = 0$ przedstawia płaszczyznę Q równoległą do osi OX .

Analogicznie, równanie $Ax + Cz + D = 0$ przedstawia płaszczyznę równoległą do osi OY , a równanie $Ax + By + D = 0$ płaszczyznę równoległą do osi OZ .

3. Jeżeli $A = B = 0$, $C \neq 0$, to wektor $\vec{n}$ jest prostopadły do płaszczyzny OXY , natomiast płaszczyzna Q jest równoległa do niej i ma równanie $Cz + D = 0$. Oznacza to, że płaszczyzna ta jest zbiorem punktów odległych od płaszczyzny OXY o $|\frac{D}{C}|$.

Analogicznie, równanie $Ax + D = 0$, $A \neq 0$ przedstawia płaszczyznę równoległą do OYZ , równanie $By + D = 0$ opisuje płaszczyznę równoległą do OXZ .

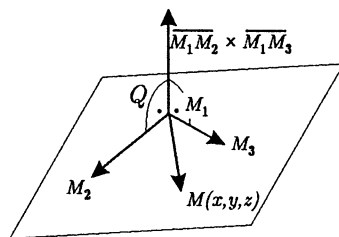
Przykład 8.5.2 Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez trzy nie-współliniowe punkty $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Niech $M(x, y, z)$ oznacza dowolny zmienny punkt płaszczyzny Q . Trzy wektory

$$\begin{aligned}\overline{M_1M} &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \\ \overline{M_1M_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \overline{M_1M_3} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),\end{aligned}$$

są wektorami komplanarnymi, Rys. 8.5.3, jest więc spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$



Rys. 8.5.3

który po rozwinięciu wyznacznika jest szukaniem równaniem płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty.

Wektor normalny tej płaszczyzny ma postać $\vec{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$ i jest prostopadły do wektora $\overline{M_1M}$, Rys. 8.5.3. Równanie przyjmuje więc postać wektorową

$$(\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) \circ \overline{M_1M} = 0.$$

Zauważmy, że warunek niewspółliniowości punktów M_1, M_2, M_3 jest istotny, gdyż w przeciwnym przypadku wektory $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ byłyby kolinearne i otrzymalibyśmy $\vec{n} = \vec{0}$, co przeczy warunkowi istnienia równania płaszczyzny.

8.6 Prosta w przestrzeni

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny o równaniach odpowiednio:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (8.6.1)$$

Wiadomo, że płaszczyzny takie przecinają się wzdłuż prostej, dlatego układ (8.6.1) określa prostą w przestrzeni i nazywamy go **postacią krawędziową** równań prostej.

Zapis ten jest mało czytelny, ponieważ nie określa wprost kierunku prostej.

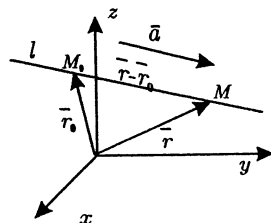
Wyznamy zatem równania prostej l , przechodzącej przez ustalony punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, której kierunek określa ustalony, niezerowy wektor $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, nazywany **wektorem kierunkowym** prostej. Jak wiadomo, prosta taka jest wyznaczona jednoznacznie.

Niech $M = (x, y, z)$ będzie punktem zmiennym szukanej prostej l . Wektory $\overline{M_0M}$ i $\vec{a}$ są kolinearne, Rys. 8.6.1, i dlatego

$$\overline{M_0M} = t \cdot \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0}$, więc

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t \cdot \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Rys. 8.6.1

Otrzymane równanie jest **postacią wektorową** równania prostej. Jest ono równoważne następującemu układowi równań:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0,$$

który nazywamy **postacią parametryczną** równań prostej.

Eliminując t z tych równań, otrzymujemy podwójną równość:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0,$$

którą nazywamy **postacią kierunkową** równań prostej.

Jeżeli w równaniach tych jeden z mianowników ma wartość zero, to przyjmujemy, że również odpowiadający mu licznik jest równy zeru.

Na przykład: równanie prostej o wektorze kierunkowym $\vec{a} \doteq (1, 0, 2)$ i przechodzącej przez punkt $M = (2, -1, 3)$ zapiszemy

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{z - 3}{2}, \quad y + 1 = 0.$$

Przykład 8.6.1 *Napisać równania prostej przechodzącej przez dwa ustalone punkty $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$.*

Zadanie ma rozwiązanie jednoznaczne, jeżeli $M_1 \neq M_2$. Wektorem kierunkowym $\vec{a}$ może być wektor $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, zatem równania kierunkowe danej prostej mają postać

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Równania parametryczne prostej przechodzącej przez dwa punkty są następujące:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8.6.2)$$

Zauważmy, że punktowi M_1 w równaniach (8.6.2) odpowiada $t = 0$, natomiast dla $t = 1$ otrzymujemy punkt M_2 . Gdy t zmienia się przyjmując wartości z przedziału $(0, 1)$, wówczas zmienny punkt M przebiega cały odcinek M_1M_2 . Dlatego równania (8.6.2) przy warunku $t \in (0, 1)$ są **równaniami odcinka**.

8.7 Wzajemne położenia prostych i płaszczyzn

8.7.1 Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Rozważmy dwie płaszczyzny Q_1 i Q_2 o równaniach odpowiednio:

$$\begin{aligned} Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Położenie tych płaszczyzn względem siebie jest określone przez wektory $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, które są odpowiednio wektorami normalnymi płaszczyzn Q_1, Q_2 , mamy więc kolejno:

1. Płaszczyzny są równoległe.

$$Q_1 \parallel Q_2 \iff \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

W zapisanej równości stosunków zakładamy, że jeśli jeden z mianowników zeruje się, to wynika stąd zerowanie się odpowiedniego licznika.

2. Płaszczyzny pokrywają się.

$$Q_1 \equiv Q_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Aby uzasadnić ten warunek zauważmy, że pierwsze dwie równości wynikają bezpośrednio z równoległości płaszczyzn, ostatnia zaś jest konsekwencją tego, że dowolny punkt płaszczyzny Q_1 należy również do Q_2 . Dla przykładu, wstawiając do obu równań punkt przecięcia się płaszczyzn z osią OZ , to znaczy punkt $(0, 0, z_0)$, otrzymamy $C_1z_0 + D_1 = 0$, $C_2z_0 + D_2 = 0$, stąd $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

3. Płaszczyzny Q_1 i Q_2 przecinają się. Miarę kąta dwuściennego między płaszczyznami wyznaczamy z następującego związku:

$$\cos \angle (Q_1, Q_2) = \cos \angle (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{\bar{n}_1 \circ \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

4. Szczególnym przypadkiem przecinania się płaszczyzn jest ich prostopadłość:

$$Q_1 \perp Q_2 \iff \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \iff \bar{n}_1 \circ \bar{n}_2 = 0 \iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

8.7.2 Wzajemne położenie dwóch prostych

Rozważmy dwie proste l_1 i l_2 o równaniach odpowiednio

$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \\ l_2 &: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Położenie tych prostych względem siebie jest określone przez wektory kierunkowe tych prostych, to jest wektory: $\bar{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\bar{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

1. Proste są równoległe.

$$l_1 \parallel l_2 \iff \bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \iff \exists k \in \mathbb{R} \bar{a}_1 = k \bar{a}_2.$$

2. Dwie proste pokrywają się, to znaczy są równoległe i mają wspólny punkt.

$$l_1 \equiv l_2 \iff \frac{x_2 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_2 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_2 - z_1}{\gamma_1}.$$

3. Dwie proste l_1 i l_2 przecinają się, to znaczy nie są równoległe i leżą w tej samej płaszczyźnie. Oznacza to, że wektory

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

są komplanarne. Wtedy iloczyn mieszany $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \overline{M_1 M_2}) = 0$, to znaczy

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.7.1)$$

gdzie $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in l_1$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in l_2$. Ponadto kąt pomiędzy tymi prostymi, jako kąt pomiędzy wektorami kierunkowymi, jest określony związkiem:

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \cos \angle(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

4. Proste l_1 i l_2 są skośne, to znaczy nie wyznaczają płaszczyzny. Obierając dowolne punkty $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in l_1$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in l_2$, stwierdzamy, że wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}$ nie są komplanarne, więc

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) \neq 0.$$

Warunek ten jest warunkiem koniecznym i dostatecznym skośności prostych.

5. Proste l_1 i l_2 w przestrzeni nazywamy prostopadłymi, jeżeli ich wektory kierunkowe są prostopadłe, zatem

$$l_1 \perp l_2 \iff \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \iff \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Proste prostopadłe mogą być skośne lub mogą się przecinać.

8.7.3 Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Rozważmy prostą l i płaszczyznę Q określone odpowiednio równaniami:

$$\begin{aligned} l &: \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \\ Q &: Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

Wektorem kierunkowym prostej l jest wektor $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, wektorem normalnym zaś płaszczyzny Q jest wektor $\vec{n} = (A, B, C)$.

1. Prosta l jest równoległa do płaszczyzny Q .

$$l \parallel Q \iff \vec{a} \perp \vec{n} \iff \alpha A + \beta B + \gamma C = 0.$$

2. Prosta l leży w płaszczyźnie Q wtedy i tylko wtedy, gdy $l \parallel Q$ i gdy dowolny punkt prostej spełnia równanie płaszczyzny, to znaczy, gdy są spełnione jednocześnie równości

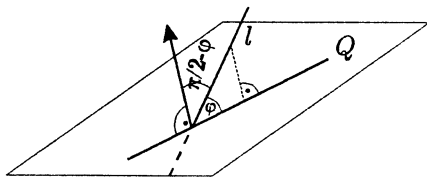
$$l \subset Q \iff \begin{cases} \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases},$$

gdzie $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in l$.

3. Kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny Q jest to kąt ostry φ , jaki tworzy ta prosta ze swoim rzutem prostokątnym na daną płaszczyznę.

Zgodnie z Rys. 8.7.1 i własnościami funkcji trygonometrycznych otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sin \angle(l, Q) &= \sin \varphi = \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right| = \\ &= |\cos \angle(\bar{a}, \bar{n})| = \frac{|\bar{a} \circ \bar{n}|}{|\bar{a}| |\bar{n}|}\end{aligned}$$



Rys. 8.7.1

i ostatecznie

$$\sin \angle(l, Q) = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Prosta l jest prostopadła do płaszczyzny Q .

$$l \perp Q \iff \bar{a} \parallel \bar{n} \iff \exists k \in \mathbb{R} \bar{a} = k \bar{n} \iff \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}.$$

Jeżeli równania prostej l dane są w postaci krawędziowej:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq 0, \quad (8.7.2)$$

równanie płaszczyzny Q ma postać: $Ax + By + Cz + D = 0$, to w celu określenia wzajemnego położenia prostej i płaszczyzny wygodnie będzie zbadać zbiór rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}. \quad (8.7.3)$$

- Jeżeli powyższy układ jest oznaczony, to prosta z płaszczyzną ma jeden punkt wspólny. Jest to punkt przecięcia.
- Jeżeli układ jest nieoznaczony, to ma nieskończenie wiele rozwiązań z jedną zmienną swobodną i każdy punkt prostej jest punktem wspólnym z płaszczyzną, czyli prosta leży w płaszczyźnie.
- Jeżeli układ (8.7.3) jest sprzeczny, to prosta jest równoległa do płaszczyzny, ale nie zawiera się w płaszczyźnie.

8.7.4 Pęk płaszczyzn

Pękiem płaszczyzn wyznaczonym przez prostą l nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez tę prostą.

Niech prosta l dana będzie w postaci krawędziowej, to znaczy

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad (8.7.4)$$

gdzie $(A_1, B_1, C_1) = \vec{n}_1$ i $(A_2, B_2, C_2) = \vec{n}_2$ są niezerowymi, niekolinearnymi wektorami normalnymi płaszczyzn Q_1 i Q_2 wyznaczających prostą l .

Jeżeli współrzędne (x, y, z) dowolnego punktu $M \in l$ spełniają równania (8.7.4), to spełniają one również każde równanie postaci

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (8.7.5)$$

dla dowolnych $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że równanie (8.7.5) przedstawia zawsze płaszczyznę przechodzącą przez prostą l . Dlatego równanie to przy zmieniających się wartościach $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ określa pęk płaszczyzn.

W szczególnym przypadku, gdy $k_1 = 0$, otrzymujemy płaszczyznę Q_2 , gdy zaś $k_2 = 0$, otrzymujemy płaszczyznę Q_1 . Jeżeli z pęku płaszczyzn chcemy wybrać płaszczyznę, o której wiemy, że nie pokrywa się z płaszczyzną Q_1 , to na pewno $k_2 \neq 0$, można więc przyjąć $k_2 = 1$ i wtedy równanie pęku płaszczyzn sprowadza się do postaci

$$k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Analogicznie, gdy na pewno $k_1 \neq 0$, otrzymamy:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Przykład 8.7.1 *Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez prostą l o równaniach*

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$$

i prostopadłej do płaszczyzny $P: x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Sprowadzamy równania prostej l do postaci krawędziowej. Mamy wtedy

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Ponieważ pierwsza z płaszczyzn tego układu na pewno nie jest szukaną płaszczyzną, więc równanie pęku płaszczyzn, wyznaczonego przez prostą l , przyjmie postać:

$$k(x - 2y + 4 = 0) + (x - z - 3) = 0,$$

skąd, po uporządkowaniu

$$(k + 1)x - 2ky - z + (4k - 3) = 0.$$

Z warunku prostopadłości płaszczyzn P, Q otrzymujemy warunek:

$$1(k + 1) + 4(-2k) - 3(-1) = 0,$$

skąd $k = \frac{4}{7}$. Podstawiając wyznaczoną wartość do równania pęku, otrzymujemy odpowiedź

$$Q : 11x - 8y - 7z - 5 = 0.$$

8.8 Odległości w przestrzeni

8.8.1 Odległość dwóch punktów

Niech dane będą dwa punkty $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$.

Odległością punktów A, B jest liczba równa długości wektora $\overline{AB}$. Zatem

$$d(A, B) := |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

8.8.2 Odległość punktu od płaszczyzny

Rozpatrzmy płaszczyznę $Q : Ax + By + Cz + D = 0$ oraz punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin Q$. Odległością punktu M_0 od płaszczyzny Q będzie długość wektora $\overline{M_0M_1}$, gdzie M_1 jest rzutem prostokątnym punktu M_0 na płaszczyznę Q . Punkt M_1 jest wynikiem przecięcia płaszczyzny Q prostą l przechodzącą przez punkt M_0 prostopadłe do Q :

$$(l \perp Q \Rightarrow \vec{a}_l = \vec{n}_Q) \wedge M_0 \in l \Rightarrow l : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązując układ równań prostej l i płaszczyzny Q , otrzymujemy

$$M_1 = (x_0 - At_0, y_0 - Bt_0, z_0 - Ct_0),$$

gdzie

$$t_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Szukana odległość $d(M_0, Q) := |\overline{M_0M_1}|$ wynosi

$$d(M_0, Q) = \sqrt{A^2t_0^2 + B^2t_0^2 + C^2t_0^2},$$

skąd, po podstawieniu t_0 i uporządkowaniu, otrzymujemy ostatecznie

$$d(M_0, Q) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Jest to szukany wzór określający odległość punktu od płaszczyzny. Jest on analogiczny do wzoru określającego odległość punktu od prostej na płaszczyźnie $z = 0$.

8.8.3 Odległość płaszczyzn równoległych

Odległością płaszczyzn równoległych jest liczba równa odległości dowolnego punktu jednej płaszczyzny od drugiej płaszczyzny.

Uwzględniając warunek równoległości płaszczyzn, możemy stwierdzić, że każde dwie płaszczyzny równoległe (jeżeli nie są np. równoległe do osi OZ) można opisać układem:

$$Q_1 : Ax + By + z + D_1 = 0,$$

$$Q_2 : Ax + By + z + D_2 = 0.$$

Stąd, jeżeli na płaszczyźnie Q_1 oberzemy dowolny punkt, np. $M = (0, 0, -D_1)$, to szukana odległość wyrazi się wzorem:

$$d(Q_1, Q_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Gdyby płaszczyzny były równoległe do osi OZ , to wystarczyłoby obrać inny punkt M , cały proces postępowania pozostaje analogiczny.

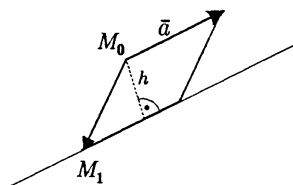
8.8.4 Odległość punktu od prostej

Dana jest prosta l i punkt M_0 nie leżący na niej,

Rys. 8.8.1,

$$l : \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma},$$

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0).$$



Rys. 8.8.1

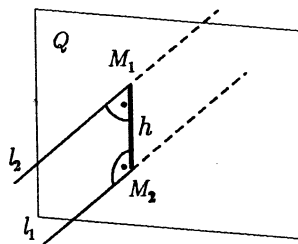
Szukana odległość punktu od prostej jest wysokością h równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ i $\overline{M_0M_1}$, gdzie $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ jest dowolnym punktem prostej l .

Ponieważ zgodnie z definicją iloczynu wektorowego pole równoległoboku wynosi $|\overline{M_0M_1} \times \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot h$, więc

$$h = d(M_0, l) = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

8.8.5 Odległość prostych równoległych

Dane są dwie proste równoległe l_1, l_2 . Budujemy dowolną płaszczyznę Q prostopadłą do kierunku prostych. Rozwiązując układ równań prostej l_1 i płaszczyzny Q , otrzymujemy współrzędne punktu M_1 . Analogicznie wyznaczamy punkt M_2 jako punkt wspólny płaszczyzny Q i prostej l_2 , Rys. 8.8.2.



Rys. 8.8.2

Odległość prostych równoległych jest długością odcinka M_1M_2 , gdzie M_1 i M_2 są punktami przecięcia, odpowiednio, prostej l_1 lub l_2 płaszczyzną prostopadłą do kierunku prostych.

8.8.6 Odległość prostych skośnych

Dane są dwie proste skośne l_1 i l_2 :

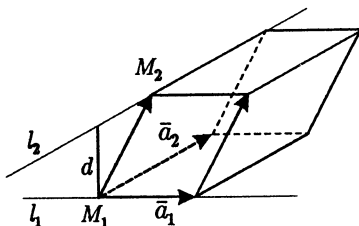
$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \\ l_2 &: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia odległości tych prostych prowadzimy przez jedną z nich, np. l_1 , płaszczyznę Q równoległą do drugiej prostej, do l_2 . Odległość prostych skośnych l_1, l_2 jest równa odległości dowolnego punktu prostej l_2 od płaszczyzny Q .

W praktyce wygodnie jest postąpić następująco: na prostych l_1, l_2 obieramy po jednym punkcie, np. $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in l_1$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in l_2$, następnie budujemy równoległoscian rozpięty na wektorach

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\vec{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad \vec{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$



Rys. 8.8.3

Szukana odległość d jest wysokością tego równoległościanu. Ponieważ, zgodnie z interpretacją iloczynu mieszanego trzech wektorów, objętość tego równoległościanu jest równa $\mathcal{V} = |(\overline{M_1 M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|$, z drugiej zaś strony jest równa iloczynowi pola podstawy P_p i wysokości d , $\mathcal{V} = P_p \cdot d$, więc szukana odległość wynosi

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{P_p}.$$

Podstawą równoległościanu jest równoległobok wyznaczony przez wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, pole jego powierzchni wynosi $P_p = |\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|$. Ostatecznie:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} = \frac{|(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \circ \overline{M_1 M_2}|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|}.$$

Jest to wzór określający odległość prostych skośnych.

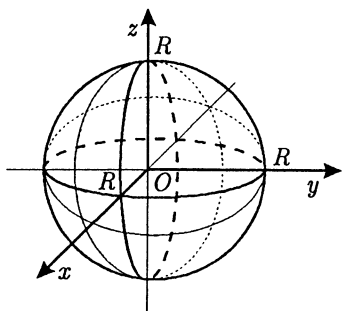
8.9 Powierzchnie drugiego stopnia

8.9.1 Równanie powierzchni kulistej (sfery)

Definicja 8.9.1 Powierzchnia kulista, czyli sfera, jest zbiorem wszystkich punktów M przestrzeni, których odległość od ustalonego punktu $S = (a, b, c)$, zwanego środkiem kuli, jest stała i wynosi R , gdzie $R > 0$ oznacza promień kuli. Rys. 8.9.1. przedstawia sferę o środku w punkcie $S = (0, 0, 0)$ i promieniu R .

$$\begin{aligned} K(S, R) &= \{M = (x, y, z) : |MS| = R\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \right\}. \end{aligned}$$

Rys. 8.9.1. przedstawia sferę o środku w punkcie $S = (0, 0, 0)$ i promieniu R .



Rys. 8.9.1

Równanie

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (8.9.1)$$

nazywamy **kanonicznym** albo **środkowym równaniem powierzchni kuli**. Jeżeli w tym równaniu wykonamy potęgowanie i podstawimy $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$, to otrzymamy postać:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \quad (8.9.2)$$

którą nazywamy **równaniem ogólnym sfery**.

Każde równanie postaci (8.9.2) opisuje sferę, jeżeli spełniony jest warunek

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

W przeciwnym przypadku równanie opisuje punkt lub zbiór pusty.

Równanie płaszczyzny Q stycznej do sfery w punkcie $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ leżącym na sferze o równaniu (8.9.1) napiszemy, korzystając z tego, że wektorem normalnym tej płaszczyzny może być wektor

$$\overrightarrow{SM_0} = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c).$$

Jeżeli przez $M = (x, y, z)$ oznaczmy dowolny punkt płaszczyzny Q , to wektor $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in Q$ i $\overrightarrow{SM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$, skąd otrzymujemy

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0. \quad (8.9.3)$$

Podkreślić musimy również fakt, że M_0 jest punktem sfery, to znaczy

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2 \quad (8.9.4)$$

Dodając stronami równania (8.9.3) i (8.9.4), otrzymujemy, po uporządkowaniu:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2. \quad (8.9.5)$$

Jest to równanie płaszczyzny stycznej do sfery (8.9.1), poprowadzonej w punkcie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ leżącym na sferze.

Przykład 8.9.1 *Napisać równanie sfery, której środek leży na osi OX i która przechodzi przez dwa punkty: $M_1(1, 1, 1)$ i $M_2(-1, 0, 2)$.*

Szukane równanie powierzchni kulistej będzie miało postać:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

a ponieważ współrzędne środka spełniają równanie osi OX , więc $b = 0$ i $c = 0$.

Ponadto, z warunku że punkty M_1, M_2 leżą na sferze, otrzymujemy

$$\begin{cases} 1^2 + 1^2 + 1^2 - 2a + d = 0 \\ (-1)^2 + 0^2 + 2^2 - 2a(-1) + d = 0 \end{cases},$$

skąd $a = -\frac{1}{2}$ oraz $d = -4$. Ostatecznie:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 4 = 0$$

lub równoważnie

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{17}{4}.$$

8.9.2 Okrąg w przestrzeni

Najprostszym sposobem określenia okręgu w przestrzeni jest określenie go jako przecięcia się powierzchni kulistej z odpowiednią płaszczyzną, Rys. 8.9.2.

Tak więc układ równań

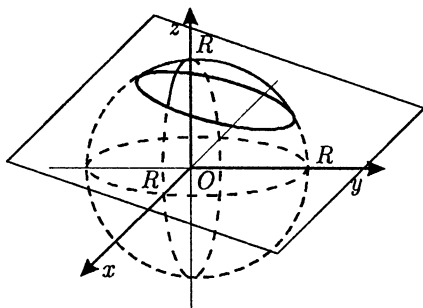
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad (8.9.6)$$

przedstawia okrąg w przestrzeni, jeżeli odległość środka $S(a, b, c)$ od płaszczyzny występującej w układzie jest mniejsza od R , to znaczy gdy

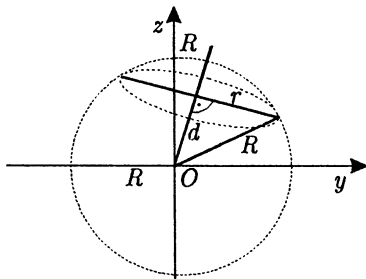
$$d = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < R.$$

Środek tego okręgu wyznaczymy jako punkt wspólny płaszczyzny okręgu i prostej l prostopadłej do tej płaszczyzny, przechodzącej przez środek kuli. Promień okręgu r wyznaczymy ze wzoru, Rys. 8.9.3,

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$



Rys. 8.9.2



Rys. 8.9.3

Jeżeli równania (8.9.6) określają pewien okrąg, to równanie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 + k(Ax + By + Cz + D) = 0, \quad (8.9.7)$$

gdzie k oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, określa pęk kul przechodzących przez ten okrąg.

Przykład 8.9.2 Wyznaczyć środek i promień okręgu powstałego w przecięciu sfery :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 13 = 0 \text{ płaszczyzną } Q : 2x - 2y + z - 6 = 0.$$

Sprowadzając równanie sfery do postaci kanonicznej, otrzymamy

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 19.$$

i stąd odczytujemy, że środek kuli $S = (1, 2, -1)$, zaś promień kuli $R = \sqrt{19}$.

Równania prostej $l \perp Q$ przechodzącej przez S mają postać:

$$l : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 1}{1},$$

natomiast współrzędne środka okręgu, to znaczy współrzędne punktu S' , wyznaczymy z układu równań prostej l i płaszczyzny Q :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases},$$

skąd $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$, to znaczy $S' = (3, 0, 0)$.

$$\text{Ponadto } d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3, \text{ zatem } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10}.$$

Oznacza to, że rozpatrywany okrąg ma środek $S' = (3, 0, 0)$, a promień $r = \sqrt{10}$.

Przykład 8.9.3 Znaleźć równanie sfery przechodzącej przez dany okrąg K i stycznej do płaszczyzny Q , gdzie:

$$\begin{aligned} K : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 5 = 0 \\ 4x - 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}, \\ Q : 2x + 2y + z - 4 = 0. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (8.9.7) piszemy równanie pęku sfer wyznaczonego przez okrąg K . Mianowicie:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 5 + k(4x - 2y - 2z + 1) = 0.$$

Z pęku tego wybieramy sferę, dla której dana płaszczyzna Q jest płaszczyzną styczną. W tym celu równanie pęku sprowadzamy do postaci kanonicznej:

$$[x - (2 - 2k)]^2 + [y - (k - 3)]^2 + [z - (k - 1)]^2 = 6k^2 - 17k + 19.$$

Odległość środka sfery wybranej z pęku od płaszczyzny Q powinna być równa promieniowi sfery. Warunek ten daje równanie z niewiadomą k :

$$\frac{|2(2 - 2k) + 2(k - 3) + (k - 1) + 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \sqrt{6k^2 - 17k + 19}.$$

Równanie to po uporządkowaniu ma postać

$$53k^2 - 167k + 122 = 0,$$

skąd $k = 2$ lub $k = \frac{61}{53}$. Istnieją więc dwie sfery spełniające warunki zadania:

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 &= 9, \\ \left(x + \frac{16}{53}\right)^2 + \left(y + \frac{90}{53}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{53}\right)^2 &= \frac{144}{53}. \end{aligned}$$

8.9.3 Powierzchnie obrotowe

Definicja 8.9.2 Powierzchnią obrotową nazywamy powierzchnię utworzoną przez obrót linii C dookoła prostej l , Rys. 8.9.4.

Okrąg utworzony przez dowolny punkt M_0 obracającej się linii C nazywamy **okręgiem tworzącym**. Gdy punkt M_0 porusza się po linii C , która obraca się dookoła prostej l , otrzymujemy całą rodzinę okręgów tworzących, wyznaczających łącznie powierzchnię obrotową.

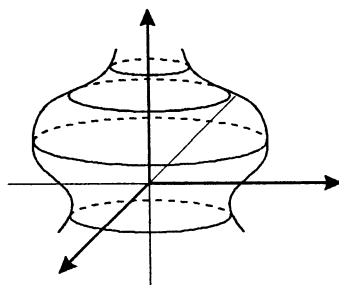
Linie C w przestrzeni można zapisać na różne sposoby.

Jednym z nich jest podanie układu równań dwóch przecinających się powierzchni:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (8.9.8)$$

Układ ten może również przyjąć postać:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$



Rys. 8.9.4

Innym, często wygodniejszym, przedstawieniem równań linii są równania parametryczne. Mianowicie trzy równania postaci:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases},$$

gdzie f, g, h są funkcjami ciągłymi parametru t w pewnym przedziale $\alpha \leq t \leq \beta$, przedstawiają linię, jeżeli odwzorowanie $T: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone tym układem jest różnowartościowe. Postawiony warunek różnowartościowości odwzorowania określa linię nie mającą punktów przecięć ze sobą.

Załóżmy, że linia C określona jest układem (8.9.8), a prosta l , będąca osią obrotu, określona jest równaniami:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Obierzmy na krzywej C dowolny, nie należący do l , punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Współrzędne tego punktu spełniają równania (8.9.8), zatem:

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, z_1) &= 0, \\ G(x_1, y_1, z_1) &= 0. \end{aligned} \quad (8.9.9)$$

Punkt ten, obracając się dookoła prostej l , zatacza okrąg, którego równania stanowią układ równań: płaszczyzny Q prostopadłej do l i zawierającej P_1 oraz kuli o środku w punkcie $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in l$ i promieniu P_1P_0 . Stąd okrąg tworzący ma równania:

$$\begin{cases} a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \end{cases} \quad (8.9.10)$$

Jeżeli punkt P_1 przebiegnie całą krzywą C , to okręgi tworzące, dane równaniami (8.9.10), wyznaczą powierzchnię obrotową.

Dlatego równanie powierzchni obrotowej otrzymamy przez wyeliminowanie z układu równań (8.9.9) (8.9.10) zmiennych x_1, y_1, z_1 .

Pokażemy, na dwóch przykładach, zastosowanie powyższej metody do wyprowadzenia równania powierzchni obrotowej, w tym przypadku: paraboloidy obrotowej i stożka obrotowego.

Przykład 8.9.4 *Dana jest parabola o równaniu $y^2 = 2pz$ leżąca na płaszczyźnie $x = 0$, Rys. 8.9.5. Napisać równanie powierzchni powstałej z obrotu tej paraboli dookoła osi OZ .*

Szukane równanie uzyskamy z układu równań:

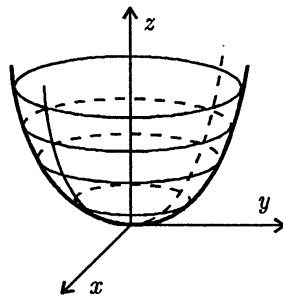
$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^2 = 2pz_1 \\ x_1 = 0 \\ z = z_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{punkt } P_1 \text{ należy do paraboli} \\ \\ \\ \text{okrąg tworzący.} \end{array}$$

Eliminując z tego układu x_1, y_1, z_1 , otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Powierzchnię przedstawioną tym równaniem nazywamy **paraboloidą obrotową**.

Jeżeli $p > 0$, to dana paraboloida obrotowa jest powierzchnią ograniczoną od dołu przez płaszczyznę $z = 0$. Jej przekroje płaszczyznami $x = c$ lub $y = c$ są parabolami, natomiast płaszczyznami $z = c > 0$, to znaczy płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu, okręgami.



Rys. 8.9.5

Przykład 8.9.5 *Dana jest prosta $l \subset OYZ$ o równaniach:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = bt \\ z = ct \end{array} \right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

Napisać równanie powierzchni powstałej z obrotu tej prostej dookoła osi OZ .

Prosta l jest prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. W wyniku obrotu wyznacza ona powierzchnię zwaną **stożkiem obrotowym**. Prostą l nazywamy **tworzącą stożka**, początek układu – **wierzchołkiem stożka**.

Równanie tego stożka otrzymujemy z układu równań

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = bt \\ z_1 = ct \\ z = z_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{cases},$$

eliminując t, x_1, y_1, z_1 .

Otrzymujemy:

$$c^2 x^2 + c^2 y^2 = b^2 z^2.$$

To jest równanie stożka obrotowego z wierzchołkiem $(0, 0, 0)$, osią obrotu jest oś OZ .

Przekroje płaszczyznami: $x = 0$ lub $y = 0$ są układem przecinających się prostych, a płaszczyznami $z = k \neq 0$ – okręgami, dla $k = 0$, to znaczy gdy $z = 0$, otrzymujemy punkt – wierzchołek stożka.

Posługując się opisaną metodą, otrzymujemy również równania innych powierzchni obrotowych. Możemy zmieniać obracane krzywe, ale również położenie tych krzywych w przestrzeni czy osie obrotu.

Do najbardziej znanych przykładów powierzchni obrotowych należą te, które powstają z obrotu krzywych stożkowych (w tym dwie proste przecinające się i dwie proste równoległe) dokoła swoich osi symetrii.

Są to: sfera, Rys. 8.9.1, elipsoida obrotowa, paraboloida obrotowa, Rys. 8.9.5, walec obrotowy, Rys. 8.9.6a), stożek obrotowy, Rys. 8.9.6b) oraz hiperboloida obrotowa jednopowłokowa, Rys. 8.9.7a) i hiperboloida obrotowa dwupowłokowa, Rys. 8.9.7b). Uzyskane opisaną metodą równania tych powierzchni są zawsze równaniami drugiego stopnia.

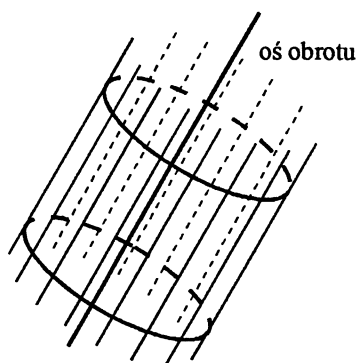
W każdym z wymienionych przypadków można dokonać uogólnienia, zastępując okręgi tworzące – elipsami. Równania tak uzyskanych powierzchni są również równaniami drugiego stopnia.

8.9.4 Powierzchnie prostokreślne

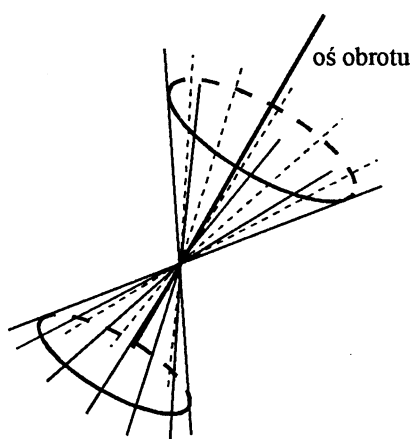
Definicja 8.9.3 Powierzchnią prostokreślną nazywamy taką powierzchnię, że przez każdy jej punkt przechodzi prosta leżąca na tej powierzchni.

Każdą prostą zawartą w powierzchni prostokreślnej nazywamy **tworzącą** powierzchni prostokreślnej.

a)

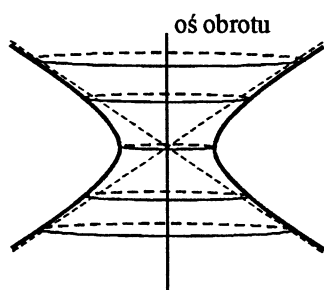


b)

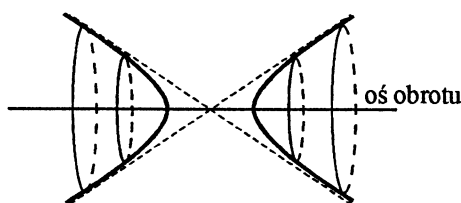


Rys. 8.9.6

a)



b)

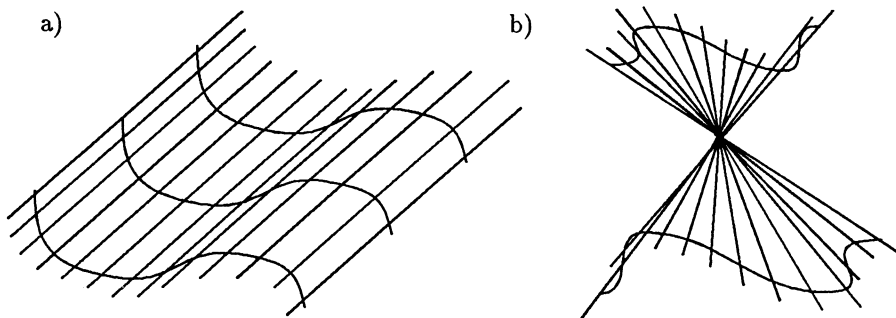


Rys. 8.9.7

Definicja 8.9.4 Powierzchnią walcową nazywamy sumę punktów zakreślonych przez prostą (tworzącą) o ustalonym kierunku ślizgającą się po krzywej – kierownicy powierzchni walcowej, Rys. 8.9.8 a).

Powierzchnią stożkową nazywamy sumę punktów zakreślonych przez prostą przechodzącą przez ustalony punkt (wierzchołek) ślizgającą się po krzywej – kierownicy powierzchni stożkowej, Rys. 8.9.8 b).

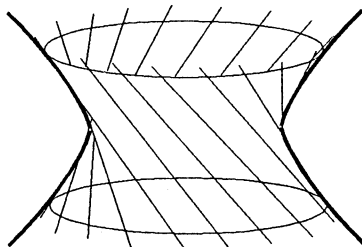
Przykład 8.9.6 Płaszczyzna jest powierzchnią walcową, kierownicą jest dowolna prosta zawarta w tej płaszczyźnie, tworzące mają kierunek różny od kierunku kierownicy.



Rys. 8.9.8

Przykład 8.9.7 *Płaszczyzna jest powierzchnią stożkową, wierzchołkiem jest dowolny punkt płaszczyzny, kierownicą dowolna prosta nie zawierająca wierzchołka.*

Przykład 8.9.8 *Hiperboloida jednopowłokowa jest przykładem powierzchni prostokreślnej, różnej od powierzchni walcowej czy stożkowej, Rys. 8.9.9.*



Rys. 8.9.9

Powierzchnie walcowe i powierzchnie stożkowe, których kierownicami są krzywe stożkowe (w tym prosta, dwie proste równoległe lub dwie proste przecinające się), opisane są równaniami drugiego stopnia.

8.9.5 Kwadryki

Każde równanie drugiego stopnia:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

opisuje pewną powierzchnię drugiego stopnia lub przypadek zdegenerowany, którym może być: zbiór pusty, punkt, prosta, jedna płaszczyzna, dwie płaszczyzny równoległe lub dwie płaszczyzny przecinające się. Powierzchnie opisane równaniami drugiego stopnia nazywamy **kwadrykami**.

Badanie ogólnego równania drugiego stopnia prowadzące do ustalenia rodzaju kwadryki, jego położenia i własności, czytelnik może znaleźć w podręczniku Geometrii Analitycznej.

W przypadku, gdy $D = E = F = 0$, otrzymujemy równanie, które sprowadzone do postaci kanonicznej, daje się przyporządkować do jednego z przypadków wyszczególnionych w klasyfikacji powierzchni drugiego stopnia. Do każdego z tych przypadków można dołączyć równania uzyskane przez odpowiednią zmianę układu współrzędnych lub przez zmianę położenia środka symetrii bądź osi symetrii.

Klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia:	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	elipsoida,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloida jednowłokowa,
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloida dwuwłokowa,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	paraboloida eliptyczna,
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	paraboloida hiperboliczna,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	powierzchnia stożkowa,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	powierzchnia walcowa eliptyczna,
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	powierzchnia walcowa hiperboliczna,
$\frac{x^2}{a^2} - z = 0$	powierzchnia walcowa paraboliczna,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	zbiór jednopunktowy,
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	para płaszczyzn przecinających się,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	prosta,

$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$	para płaszczyzn równoległych,
$x^2 = 0$	płaszczyzna,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	zbiór pusty,
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	zbiór pusty,
$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$	zbiór pusty.

8.10 Przykłady zadań

Przykład 8.10.1 *Dane są trzy płaszczyzny:*

$$\begin{aligned} Q_1 &: kx + y - z = 1, \\ Q_2 &: x + ky + 3z = k, \\ Q_3 &: 3x - 5z = 0. \end{aligned}$$

Omówić, w zależności od parametru k , wzajemne położenie tych płaszczyzn.

W celu zbadania wzajemnego położenia płaszczyzn rozpatrzmy zbiór rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x + ky + 3z = k \\ 3x - 5z = 0 \end{cases} \quad (8.10.1)$$

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = -5k^2 + 3k + 14,$$

$$-5k^2 + 3k + 14 = 0 \iff k = 2 \vee k = -\frac{7}{5}.$$

Jeżeli $k = 2$, to $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{U}) = 2$. Oznacza to (stosując Twierdzenie Kroneckera-Capelliego), że układ (8.10.1) jest układem nieoznaczonym, ma zbiór rozwiązań zależny od jednego parametru, np. od z . Wtedy

$$x = \frac{5}{3}t, \quad y = 1 - \frac{7}{3}t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Otrzymana rodzina rozwiązań, przy t przebiegającym zbiór $\mathbb{R}$, przedstawia prostą, której każdy punkt jest punktem wspólnym płaszczyzn Q_1, Q_2, Q_3 . Ta prosta jest ich wspólną krawędzią.

Jeżeli $k = -\frac{7}{5}$, to $r(\mathbf{A}) = 2$, zaś $r(\mathbf{U}) = 3$. Ponieważ $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{U})$, więc układ (8.10.1) jest układem sprzecznym, co oznacza, że nie istnieją punkty należące jednocześnie do wszystkich trzech płaszczyzn.

Jeżeli $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{7}{5}\}$, to $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{U}) = 3$. Wtedy układ (8.10.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie, określające punkt wspólny płaszczyzn Q_1, Q_2, Q_3 .

Przykład 8.10.2 *Napisać równanie płaszczyzny Q wyznaczonej przez proste l_1, l_2 , gdzie:*

$$\text{a) } l_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}, \quad l_2 : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{6}.$$

$$\text{b) } l_1 : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}.$$

Ad a) Wektory kierunkowe tych prostych wynoszą: $\bar{a}_1 = (2, 1, 3)$, $\bar{a}_2 = (4, 2, 6)$.

Widzimy, że $\bar{a}_1 = \frac{1}{2}\bar{a}_2$. Ponieważ $M_1(4, -1, 0) \in l_1$ i $M_2(0, 2, 1) \in l_2$, $M_2 \notin l_1$, więc wnioskujemy, że szukana płaszczyzna na pewno istnieje. Wektor normalny $\bar{n}$ tej płaszczyzny wyznaczymy z warunku

$$\bar{n} \perp \bar{a}_1 \wedge \bar{n} \perp \overline{M_1 M_2} \Rightarrow \bar{n} = \bar{a}_1 \times \overline{M_1 M_2},$$

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -14, -10).$$

Ponadto $M_1 \in Q$, więc $-5(x-4) - 14(y+1) - 10z = 0$. Ostatecznie:

$$5x - 14y - 10z - 6 = 0.$$

Ad b) Zbadamy wpierw, czy proste są współpłaszczyznowe. W tym celu sprowadzimy je do postaci kierunkowej:

$$\bar{a}_1 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (1, 2, -1) \times (2, -1, 1) = (1, -3, -5),$$

$$\bar{a}_2 = (1, 2, -1) \times (2, -1, -1) = (-3, -1, -5).$$

W celu znalezienia dowolnego punktu na każdej z tych prostych wyznaczamy punkt przecięcia każdej z nich z płaszczyzną $z = 0$. Wtedy $M_1 = (-1, 0, 0) \in l_1$, $M_2 = (-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0) \in l_2$, skąd

$$l_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}, \quad l_2 : \frac{x+\frac{3}{5}}{-3} = \frac{y+\frac{6}{5}}{-1} = \frac{z}{-5}.$$

Aby zbadać współpłaszczyznowość prostych l_1, l_2 , wykorzystamy warunek (8.7.1), skąd:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \\ 1 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0,$$

co oznacza, że proste l_1, l_2 są skośne, płaszczyzna Q nie istnieje.

Przykład 8.10.3 *Napisać równanie płaszczyzny wyznaczonej przez prostą l i przez punkt M , gdzie:*

$$l: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{1}, \quad M = (0, 2, 3).$$

Równanie prostej l przekształcimy do postaci krawędziowej, mianowicie:

$$l: \begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ x - 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Ponieważ punkt M nie spełnia np. pierwszego z tych równań, więc pęk płaszczyzn wyznaczony przez prostą l można zapisać w postaci:

$$k(x - 3y - 2) + (x - 3z - 5) = 0.$$

Uwzględniając, że $M \in Q$, otrzymujemy równanie: $k(0 - 6 - 2) + (0 - 9 - 5) = 0$, skąd $k = -\frac{7}{4}$. Podstawiając wynik do równania pęku, otrzymujemy po uporządkowaniu

$$Q: x - 7y + 4z + 2 = 0.$$

Przykład 8.10.4 *Napisać równanie płaszczyzny Q równoległej do płaszczyzny $\Pi: 2x + y - 2z - 1 = 0$ i oddalonej od niej o $d = 10$.*

Z warunku równoległości płaszczyzn wynika:

$$Q: 2x + y - 2z + D = 0.$$

Jednym z punktów płaszczyzny Q jest np. punkt M , dla którego $x = z = 0, y = -D$, to znaczy $M = (0, -D, 0)$. Z warunków zadania wynika, że

$$d(M, \Pi) = \frac{|0 - D + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|D + 1|}{3} = 10,$$

skąd otrzymujemy: $D = 29$ lub $D = -31$. Istnieją więc dwie płaszczyzny spełniające warunki zadania

$$\begin{aligned} Q_1: 2x + y - 2z + 29 &= 0, \\ Q_2: 2x + y - 2z - 31 &= 0. \end{aligned}$$

Przykład 8.10.5 *Napisać równania prostej k przechodzącej przez punkt M i prostopadłej do prostych l_1, l_2 , gdzie:*

$$M = (1, 1, 0), \quad l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = z, \quad l_2: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Sposób I. Wektory kierunkowe prostych l_1, l_2 wynoszą: $\bar{a}_1 = (2, 4, 1), \bar{a}_2 = (2, -1, 1) \times (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$. Ponieważ szukana prosta k ma tę własność, że $k \perp l_1 \wedge k \perp l_2$, więc jej wektor kierunkowy $\bar{a}_k = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = (5, -3, 2)$. Ponadto $M \in k$, więc

$$k: \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}.$$

Sposób II. Z równań prostej l_2 wyznaczmy najpierw wektor kierunkowy tej prostej. Mianowicie:

$$\bar{a}_2 \perp (2, -1, 1) \wedge \bar{a}_2 \perp (1, 0, 1) \Rightarrow \bar{a}_2 = (2, -1, 1) \times (1, 0, 1) = (-1, -1, 1).$$

Poszukiwana prosta jest krawędzią dwóch płaszczyzn Q_1, Q_2 takich, że

$$\begin{aligned} M \in Q_1 \wedge l_1 \perp Q_1 &\Rightarrow Q_1: 2(x-1) + 4(y-1) + 1z = 0, \\ M \in Q_2 \wedge l_2 \perp Q_2 &\Rightarrow Q_2: -1(x-1) - 1(y-1) + 1z = 0. \end{aligned}$$

Zatem, po uporządkowaniu równań, otrzymujemy:

$$k: \begin{cases} 2x + 4y + z - 6 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Uzyskane dwoma sposobami odpowiedzi są sobie równoważne.

Przykład 8.10.6 *Napisać równanie prostej k przechodzącej przez punkt M i przecinającej daną prostą l pod kątem prostym, gdzie:*

$$M = (1, -2, 0), \quad l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Poszukiwana prosta k jest krawędzią dwóch płaszczyzn Q_1, Q_2 takich, że

$$M \in Q_1 \wedge l \subset Q_1, \quad M \in Q_2 \wedge l \perp Q_2.$$

Ponieważ $l \subset Q_1$, więc każdy punkt prostej l jest również punktem płaszczyzny Q_1 , w szczególności $N = (2, -1, 0) \in l \Rightarrow N \in Q_1$. Ponadto $\bar{a}_l = (1, 2, -1)$. Wektor normalny płaszczyzny Q_1 , to znaczy wektor $\bar{n}_1$, wyznaczmy z warunków:

$$\bar{n}_1 \perp \bar{a}_l \wedge \bar{n}_1 \perp \overline{MN} \Rightarrow \bar{n}_1 = \bar{a}_l \times \overline{MN} = (1, -1, -1),$$

skąd

$$Q_1 : 1(x-1) - 1(y+2) - 1z = 0 \quad \text{lub} \quad x - y - z - 3 = 0.$$

Równanie płaszczyzny Q_2 otrzymujemy natychmiast

$$Q_2 : 1(x-1) + 2(y+2) - 1z = 0.$$

Ostatecznie

$$k : \begin{cases} x - y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Przykład 8.10.7 Znaleźć współrzędne punktu M' symetrycznego do punktu M względem płaszczyzny Q , gdzie

$$M = (2, 0, 1), \quad Q : 3x - y + z + 2 = 0.$$

W pierwszej kolejności wyznaczmy punkt N , to znaczy rzut prostokątny punktu M na płaszczyznę Q . Jest on punktem wspólnym płaszczyzny Q i prostej l przechodzącej przez M prostopadłe do Q .

$$(l \perp Q \Rightarrow \vec{a}_l = \vec{n}_Q) \wedge M \in l \Rightarrow l : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Współrzędne punktu N są rozwiązaniami układu równań prostej l i płaszczyzny Q , to znaczy:

$$N : \begin{cases} \frac{x-2}{3} = -y \\ -y = z-1 \\ 3x - y + z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \text{skąd} \quad N = \left(-\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

Współrzędne punktu M' wyznaczmy z równości wektorów:

$$\overline{MN} = \overline{NM'} \Rightarrow (-1, 3, -2) = (x-3, y-6, z-8) \Rightarrow M' = (x, y, z) = (2, 9, 6).$$

Przykład 8.10.8 Wyznaczyć taki punkt M prostej l , którego odległości od dwóch danych punktów M_1, M_2 są równe, gdzie

$$l : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}, \quad M_1 = (3, 1, -4), \quad M_2 = (0, 5, 2).$$

Załóżmy, że szukany punkt M ma postać $M = (a, b, c)$. Z warunków

$$M \in l \wedge |MM_1| = |MM_2|$$

otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a + 2b + c - 1 = 0 \\ 3a - b - 4c = 0 \\ (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c+4)^2 = a^2 + (b-5)^2 + (c-2)^2 \end{cases}$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymujemy

$$M = \left(-\frac{1}{14}, \frac{9}{14}, -\frac{3}{14} \right).$$

Przykład 8.10.9 *Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez prostą l i tworzącej z płaszczyzną Π kąt $\varphi = \frac{\pi}{4}$, gdzie*

$$l: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}, \quad \Pi: x - 4y - 8z + 12 = 0.$$

Pęk płaszczyzn wyznaczony prostą l można zapisać w postaci

$$k(x + 5y + z) + (x - z + 4) = 0$$

lub równoważnie

$$(k + 1)x + 5ky + (k - 1)z + 4 = 0.$$

Z tego pęku płaszczyzn wybieramy płaszczyznę, która z płaszczyzną Π tworzy kąt $\varphi = \frac{\pi}{4}$, to znaczy

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1(k + 1) - 4 \cdot 5k - 8(k - 1)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \sqrt{(k + 1)^2 + (5k)^2 + (k - 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wyrażenie to jest równaniem z niewiadomą k , którego rozwiązaniami są $k = 0$ i $k = -\frac{4}{3}$.

Jeżeli $k = 0$, to szukaną płaszczyznę Q jest druga z płaszczyzn określających prostą l , gdy zaś $k = -\frac{4}{3}$, wówczas otrzymujemy

$$Q: x + 20y + 7z - 12 = 0.$$

Przykład 8.10.10 *Wyznaczyć równania stycznej do okręgu $K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ poprowadzonej przez punkt $M = (2, -1, 2)$ leżącej na okręgu.*

Sprawdzamy, że punkt M faktycznie leży na okręgu, a więc spełnia oba jego równania.

Poszukiwana prosta leży w płaszczyźnie okręgu, to znaczy w płaszczyźnie $Q: x + y + z - 3 = 0$, i ponadto w płaszczyźnie Π przechodzącej przez punkt M oraz prostopadłej do wektora $\overrightarrow{MS}$, gdzie S jest środkiem okręgu K . Punkt S wyznaczamy jak w Przykładzie 8.9.2 z układu równań

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x = y = z \end{cases},$$

otrzymując $S = (1, 1, 1)$. Wektor $\overrightarrow{MS} = (-1, 2, -1)$ jest wektorem normalnym płaszczyzny Π , stąd $\Pi : -(x - 2) + 2(y + 1) - (z - 2) = 0$. Zatem szukana styczna ma równania

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Przykład 8.10.11 *Napisać równanie płaszczyzny stycznej do sfery: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 18$ w punkcie $M = (5, 2, 0)$.*

Sprawdzamy, że punkt M należy do sfery.

Korzystając z wyprowadzonego wzoru (8.9.5), otrzymujemy

$$(x - 2)(5 - 2) + (y + 1)(2 + 1) + z \cdot 0 = 18.$$

Szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna $x + y = 7$.

Przykład 8.10.12 *Sprowadzić do postaci kanonicznej i określić powierzchnię przedstawioną równaniem: $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$.*

Grupując odpowiednio składniki oraz dodając i odejmując stałe, otrzymamy

$$\begin{aligned} (x^2 - 10x + 25) - 25 + (4y^2 - 16y + 16) - 16 - (z^2 - 6z + 9) + 9 + 16 &= 0, \\ (x - 5)^2 + 4(y - 2)^2 - (z - 3)^2 &= 16, \\ \frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(z - 3)^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Korzystając z klasyfikacji powierzchni drugiego stopnia (str. 194), stwierdzamy, że dane równanie opisuje hiperboloidę jednopowłokową. Środkiem symetrii jest punkt $S = (5, 2, 3)$, osią symetrii zaś prosta $x = 5$, $y = 2$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Przykład 8.10.13 *Określić rodzaj powierzchni o równaniu $x^2 - 4y^2 - z^2 - 4x + 4 = 0$ badając jej przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn układu współrzędnych.*

Dane równanie możemy zapisać w postaci kanonicznej:

$$(x - 2)^2 - 4y^2 - z^2 = 0.$$

Przyjmując w tym równaniu $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, otrzymujemy równanie $4y^2 + z^2 = (c - 2)^2$. Zatem przecięcia badanej powierzchni płaszczyznami równoległymi do OYZ są elipsami, gdy $c \neq 2$ elipsa redukuje się do punktu $S = (2, 0, 0)$.

Przyjmując w równaniu $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, otrzymujemy równanie $(x-2)^2 - z^2 = 4c^2$. Zatem przecięcia badanej powierzchni płaszczyznami równoległymi do OXZ są hiperbolami, gdy $c = 0$ – dwiema prostymi przecinającymi się w punkcie $S = (2, 0, 0)$.

Przyjmując w równaniu $z = c$, $c \in \mathbb{R}$, otrzymujemy równanie $(x-2)^2 - 4y^2 = c^2$. Są to, podobnie jak poprzednio hiperbole.

Wnioskujemy stąd, że badana powierzchnia jest stożkiem eliptycznym o wierzchołku w punkcie $S = (2, 0, 0)$ i osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny $x = c$. Oś symetrii ma równania: $x = t$, $y = z = 0$.

8.11 Zadania

8.1. Dane są współrzędne sferyczne punktów A, B, C . Znaleźć ich współrzędne kartezjańskie. $A = (3, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{4})$, $B = (4, \frac{5}{4}\pi, -\frac{\pi}{6})$, $C = (2, \frac{11}{6}\pi, \frac{\pi}{3})$.

8.2. Dane są współrzędne walcowe punktów A, B, C . Znaleźć ich współrzędne kartezjańskie. $A = (3, \frac{3}{2}\pi, -5)$, $B = (4, \frac{5}{4}\pi, 3)$, $C = (2, \frac{11}{6}\pi, -8)$.

8.3. Dane są współrzędne kartezjańskie punktów A, B, C . Znaleźć ich współrzędne sferyczne. $A = (0, -5\sqrt{3}, -5)$, $B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, $C = (-1, 0, 1)$.

8.4. Dane są współrzędne kartezjańskie punktów A, B, C . Znaleźć ich współrzędne walcowe. $A = (3, -3, 2)$, $B = (0, -4, -3)$, $C = (-1, \sqrt{3}, 7)$.

8.5. Dane są współrzędne walcowe dwóch punktów: $A = (10, -\frac{\pi}{4}, 1)$, $B = (\sqrt{2}, \frac{3}{2}\pi, 3)$. Wyznaczyć odległość tych punktów.

8.6. Dane są współrzędne sferyczne dwóch punktów: $A = (9, -\frac{3}{4}\pi, -\arcsin \frac{1}{3})$, $B = (10, -\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{3}{5})$. Wyznaczyć odległość tych punktów.

Dane są trzy punkty: $A(1, 0, -1)$, $B(5, 3, 1)$, $C(0, 2, -6)$ (Zad. 8.7-8.10)

8.7. Na płaszczyźnie OXY znaleźć punkt D , aby wektor $\overrightarrow{CD}$ był kolinearny z wektorem $\overrightarrow{AB}$.

8.8. Na osi OZ znaleźć punkt D , aby wektor $\overrightarrow{CA}$ był prostopadły do wektora $\overrightarrow{DB}$.

8.9. Na osi OX znaleźć punkt D , by wektor $\overrightarrow{CD}$ był prostopadły do wektora $\overrightarrow{AB}$.

8.10. Punkt D taki, że $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$.

Znaleźć cosinusy kierunkowe wektorów (Zad. 8.11-8.13)

8.11. $\vec{a} = (1, -1, 2)$. **8.12.** $\vec{b} = (2, 1, -2)$. **8.13.** $\vec{c} = (0, 1, -1)$.

Sprawdzić, czy wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ są komplanarne (Zad. 8.14-8.18)

8.14. $\bar{a} = (-4, 2, 0)$, $\bar{b} = (3, 0, 1)$, $\bar{c} = (2, 5, -4)$.

8.15. $\bar{a} = (1, -2, 4)$, $\bar{b} = (3, 1, 2)$, $\bar{c} = (-3, 8, 8)$.

8.16. $\bar{a} = (0, 1, 2)$, $\bar{b} = (1, 2, 0)$, $\bar{c} = (-1, 4, 0)$.

8.17. $\bar{a} = (5, -2, 1)$, $\bar{b} = (4, -3, -1)$, $\bar{c} = (-1, 0, 4)$.

8.18. $\bar{a} = (0, 2, 6)$, $\bar{b} = (5, -10, -1)$, $\bar{c} = (-2, 1, -1)$.

Zbadać komplanarność wektorów $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, wiedząc, że wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ są komplanarne (Zad. 8.19-8.21)

8.19. $\bar{u} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{v} = \bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{w} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

8.20. $\bar{u} = 2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$, $\bar{v} = \bar{a} - 3\bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{w} = 4\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$.

8.21. $\bar{u} = 4\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{v} = \bar{a} - \bar{b} + 4\bar{c}$, $\bar{w} = 3\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

Dane są wierzchołki trójkąta ABC , $A(-3, 1, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(3, 0, 5)$ (Zad. 8.22-8.25)

8.22. Obliczyć obwód trójkąta.

8.23. Obliczyć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B na bok AC .

8.24. Obliczyć długości środkowych tego trójkąta.

8.25. Określić współrzędne środka ciężkości (punkt przecięcia środkowych).

Dane są trzy wektory $\bar{a} = (1, 2, 3)$, $\bar{b} = (2, -3, 1)$, $\bar{c} = (-3, 1, 2)$. Obliczyć wartość podanego wyrażenia (Zad. 8.26-8.29)

8.26. $\bar{a} \circ (2\bar{b} \times 3\bar{c})$.

8.27. $2\bar{a}^2 - 2(\bar{a}, \bar{b}) + 3(\bar{b}, \bar{c})$.

8.28. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

8.29. $|\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})|$.

Dane są trzy wektory: $\bar{a} = (1, 2, 3)$, $\bar{b} = (2, -3, 1)$, $\bar{c} = (-3, 1, 2)$. Wyznaczyć wektor $\bar{d}$ (Zad. 8.30-8.33)

8.30. $\bar{d} = 3(\bar{a} + \bar{c}) - \bar{b} \times \bar{c}$.

8.31. $\bar{d} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

8.32. $\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c}$.

8.33. $\bar{d} = (\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{b} - 2\bar{c})$.

Obliczyć objętość i jedną z wysokości czworościanu $OABC$ (Zad. 8.34-8.35)

8.34. $O(0, 0, 0)$, $A(3, 1, 0)$, $B(5, 2, -1)$, $C(1, 2, 1)$.

8.35. $O(0, 0, 0)$, $A(-2, -1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(-1, 2, 1)$.

8.36. Znaleźć wektor jednostkowy $\bar{n}$ prostopadły do wektorów $\bar{a} = (3, 0, -1)$, $\bar{b} = (2, 2, 1)$.

Wyznaczyć wektor jednostkowy kolinearny z danym wektorem $\bar{a}$ (Zad. 8.37-8.39)

$$8.37. \bar{a} = (1, -2, 2). \quad 8.38. \bar{a} = (-3, -5, \sqrt{2}). \quad 8.39. \bar{a} = (11, -2, -10).$$

Wykazać, że dla dowolnych wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ zachodzą tożsamości (Zad. 8.40-8.44)

$$8.40. \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{a} + \bar{c}) + \bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{0}.$$

$$8.41. \bar{a}[(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b})] = -(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

$$8.42. (\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c})[(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})] = 3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

$$8.43. (\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = 2(\bar{b}, \bar{a}).$$

$$8.44. (\bar{a} - \bar{b}, \bar{b} - \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) = 0.$$

Dane są cztery wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$. Wykazać niezależność wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Przedstawić wektor $\bar{d}$ jako kombinację liniową wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (Zad. 8.45-8.47)

$$8.45. \bar{a} = (2, 5, 0), \bar{b} = (1, -1, 1), \bar{c} = (3, 0, 0), \bar{d} = (-5, 6, -1).$$

$$8.46. \bar{a} = (-1, 0, 1), \bar{b} = (2, -2, 0), \bar{c} = (0, 0, 1), \bar{d} = (-11, 8, 8).$$

$$8.47. \bar{a} = (25, -22, 0), \bar{b} = (0, -3, 4), \bar{c} = (-6, 0, 1), \bar{d} = (25, -25, 4).$$

Sprawdzić, czy trójkąt ABC jest prostokątny. Wyznaczyć jego kąty (Zad. 8.48-8.51)

$$8.48. A = (2, -1, 3), B = (1, 1, 1), C = (0, 0, 5).$$

$$8.49. A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 3), C = (3, 3, 0).$$

$$8.50. A = (2, -1, 0), B = (0, 1, 1), C = (2, 2, 3).$$

$$8.51. A = (1, -1, 2), B = (3, 2, 1), C = (0, 1, 6).$$

Dane są cztery punkty A, B, C, D . Sprawdzić, czy można przez nie poprowadzić płaszczyznę (Zad. 8.52-8.55)

$$8.52. A = (-8, 1, 9), B = (2, 0, 0), C = (1, -3, 4), D = (1, -4, 5).$$

$$8.53. A = (1, 2, 0), B = (3, 3, 1), C = (5, 4, 2), D = (1, 0, -1).$$

$$8.54. A = (1, 2, -1), B = (13, 1, 0), C = (5, -2, 3), D = (1, 4, -1).$$

$$8.55. A = (0, -8, 4), B = (3, -3, 1), C = (4, 5, 2), D = (2, 11, 0).$$

Dane są trzy punkty A, B, C . Sprawdzić, czy można przez nie poprowadzić prostą (Zad. 8.56-8.59)

$$8.56. A = (5, -3, 1), B = (-4, 3, -2), C = (-1, 1, -1).$$

$$8.57. A = (-2, 5, 0), B = (1, 1, 1), C = (4, -3, 2).$$

8.58. $A = (-3, 0, 1)$, $B = (4, 2, -4)$, $C = (0, 9, 5)$.

8.59. $A = (7, -1, 2)$, $B = (3, 15, -4)$, $C = (9, -9, 5)$.

Określić wzajemne położenie płaszczyzn Q_1 , Q_2 , Q_3 (Zad. 8.60-8.63)

8.60. $Q_1 : 2x - y + 5z - 4 = 0$, $Q_2 : 5x + 2y - 13z - 19 = 0$, $Q_3 : 3x - z - 7 = 0$.

8.61. $Q_1 : 5x - z + 3 = 0$, $Q_2 : 2x - y - 4z + 5 = 0$, $Q_3 : 3y + 2z - 1 = 0$.

8.62. $Q_1 : -4x - 3y + 9z - 27 = 0$, $Q_2 : 3x - 4y - 3z - 5 = 0$, $Q_3 : x + 7y - 6z + 3 = 0$.

8.63. $Q_1 : 2x - y - 1 = 0$, $Q_2 : 3x - y + z - 3 = 0$, $Q_3 : y + 2z - 3 = 0$.

Tak dobrać parametr $k \in \mathbb{R}$, aby trzy płaszczyzny Q_1 , Q_2 , Q_3 przecinały się w jednym punkcie (Zad. 8.64-8.65)

8.64. $Q_1 : x - 4y - 2z + k = 0$, $Q_2 : kx + y - z - 5 = 0$, $Q_3 : kx - 12y - 3z + 7 = 0$.

8.65. $Q_1 : 5x - 2y + z + k = 0$, $Q_2 : kx + 3y - 2z + k = 0$, $Q_3 : 3x - 4z + k = 0$.

Tak dobrać parametr $k \in \mathbb{R}$, aby płaszczyzny Q_1 , Q_2 , Q_3 miały wspólną prostą (Zad. 8.66-8.67)

8.66. $Q_1 : x + 2y - z = 0$, $Q_2 : kx - y - z = 0$, $Q_3 : x - ky + z = 0$.

8.67. $Q_1 : kx - y + 3z - 9 = 0$, $Q_2 : x + ky - z - 2 = 0$, $Q_3 : x + 7y - 6z + 3 = 0$.

Omówić w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ wzajemne położenie płaszczyzn (Zad. 8.68-8.69)

8.68. $Q_1 : kx + y - z - 1 = 0$, $Q_2 : x + ky + 3z - k = 0$, $Q_3 : 3x - 5z = 0$.

8.69. $Q_1 : 3x + 2y + kz - 2 = 0$, $Q_2 : x - 6y + 2z + 1 = 0$, $Q_3 : 2x + z - k = 0$.

Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy dane punkty (Zad. 8.70-8.73)

8.70. $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 2, -5)$, $C = (-2, 3, -1)$.

8.71. $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -2, 2)$, $C = (0, -1, -1)$.

8.72. $A = (0, 0, 6)$, $B = (1, 1, 9)$, $C = (-2, 4, -6)$.

8.73. $A = (-2, 0, 3)$, $B = (3, -1, 1)$, $C = (1, -1, 0)$.

Znaleźć odległość między płaszczyznami Q_1 , Q_2 (Zad. 8.74-8.76)

8.74. $Q_1 : 11x - 2y - 10z + 30 = 0$, $Q_2 : 11x - 2y - 10z - 90 = 0$.

8.75. $Q_1 : 6x + 2y - 4z + 7 = 0$, $Q_2 : 9x + 3y - 6z + 1 = 0$.

8.76. $Q_1 : 4x - 3y - 12z + 6 = 0$, $Q_2 : 4x - 3y - 12z + 11 = 0$.

Obliczyć kąt między płaszczyznami Q_1, Q_2 (Zad. 8.77-8.79)

8.77. $Q_1: 2x + y - 9z + 5 = 0, \quad Q_2: 16x - 5y + 3z - 8 = 0.$

8.78. $Q_1: 6x + 2y - 4z + 7 = 0, \quad Q_2: 9x + 3y - 6z + 1 = 0.$

8.79. $Q_1: 2x - y - 2z + 7 = 0, \quad Q_2: 7x - y + 5 = 0.$

Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez prostą $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$ i spełniającej warunek (Zad. 8.80-8.83)

8.80. Punkt $M = (1, -2, 1)$ należy do płaszczyzny Q .

8.81. Płaszczyzna $\Pi: 4x + y + z + 1 = 0$ tworzy z płaszczyzną Q kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8.82. Płaszczyzna $\Pi: x - y = 0$ tworzy z płaszczyzną Q kąt $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

8.83. Oś OZ jest równoległa do płaszczyzny Q .

Napisać równanie płaszczyzny wyznaczonej przez proste l_1, l_2 (Zad. 8.84-8.88)

8.84. $l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{8}, \quad l_2: \frac{x-2}{-6} = \frac{y}{9} = \frac{z+1}{12}.$

8.85. $l_1: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}.$

8.86. $l_1: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} y + 4z = 4 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}.$

8.87. $l_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}, \quad l_2: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}.$

8.88. $l_1: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} 3x + y - z + 13 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$

Sprawdzić, czy dana prosta l zawiera się w płaszczyźnie $Q: 4x + 3y - z + 3 = 0$ (Zad. 8.89-8.91)

8.89. $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad 8.90. l: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-3}{3} = z.$

8.91. $l: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 6 = 0 \end{cases}.$

Napisać równania prostej przechodzącej przez dane dwa punkty A, B (Zad. 8.92-8.94)

8.92. $A = (1, 1, 1), \quad B = (-3, 2, 0). \quad 8.93. A = (4, -7, 2), \quad B = (-3, 4, 0).$

8.94. $A = (-2, 3, -3), \quad B = (0, 0, 1). \quad \square$

Podać równania kierunkowe i parametryczne prostej l opisanej równaniami krawędziowymi (Zad. 8.95-8.97)

$$8.95. l: \begin{cases} x + 4y + 5z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \quad 8.96. l: \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$8.97. l: \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ x + 4y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

Określić wzajemne położenie prostych (Zad. 8.98-8.101)

$$8.98. l_1: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \quad l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z.$$

$$8.99. l_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}, \quad l_2: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$8.100. l_1: \begin{cases} x - 5y + 6z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} 13x + y + 1 = 0 \\ 11x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$8.101. l_1: \begin{cases} 3x + 4y + z - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = +1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ określić możliwe wzajemne położenie prostych l_1, l_2 (Zad. 8.102-8.105)

$$8.102. l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{k}, \quad l_2: x + 1 = y - 1 = z.$$

$$8.103. l_1: \frac{x-1}{k} = y - 2 = \frac{z+3}{2k}, \quad l_2: x + 2 = \frac{y}{k} = \frac{z-4}{2}.$$

$$8.104. l_1: \frac{x-4}{-5} = \frac{y+1}{5k-3} = \frac{z-3}{3}, \quad l_2: \frac{x-4}{k-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1-k}.$$

$$8.105. l_1: \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - k = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ x + 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć rzut prostej l na płaszczyznę Q (Zad. 8.106-8.108)

$$8.106. l: \frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{2} = z, \quad Q: x - 2y + z - 5 = 0.$$

$$8.107. l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}, \quad Q: 3x + y - z + 5 = 0.$$

$$8.108. l: \begin{cases} 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ x + 2y - 4z - 13 = 0 \end{cases}, \quad Q: 3x - y - z + 10 = 0.$$

Znaleźć punkt N symetryczny do danego punktu M względem danej prostej l (Zad. 8.109-8.111)

$$8.109. M = (1, 0, -1), \quad l: \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-3}{-1}.$$

$$8.110. M = (3, -1, -11), \quad l: \begin{cases} x - 3y - 3z - 5 = 0 \\ x + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$8.111. M = (-2, 5, 13), \quad l: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć punkt N symetryczny do danego punktu M względem danej płaszczyzny Q (Zad. 8.112-8.114)

$$8.112. M = (0, 0, 0), \quad Q: 6x + 2y - 9z + 121 = 0.$$

$$8.113. M = (2, 7, 1), \quad Q: x - 4y + z + 7 = 0.$$

$$8.114. M = (3, -7, 5), \quad Q: 2x - 5y + 3z - 42 = 0.$$

Znaleźć odległość prostych równoległych l_1, l_2 (Zad. 8.115-8.116)

$$8.115. l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{6}, \quad l_2: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-5}{9}, \quad l_1 \parallel l_2.$$

$$8.116. l_1: \begin{cases} x - 5y + 6z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} 13x + y + 1 = 0 \\ 11x + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad l_1 \parallel l_2.$$

Znaleźć odległość prostych skośnych l_1, l_2 (Zad. 8.117-8.118)

$$8.117. l_1: \begin{cases} 3x + 4y + z - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$8.118. l_1: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \quad l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z.$$

Wyznacz kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny Q (Zad. 8.119-8.121)

$$8.119. l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}, \quad Q: 4x + y + 5z + 7 = 0.$$

$$8.120. l: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - t \\ z = 10 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad Q: y + z - 4 = 0.$$

$$8.121. l: \begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad Q: 4x + 6y - 2z - 3 = 0.$$

Napisać równanie sfery spełniającej podane warunki (Zad. 8.122-8.126)

$$8.122. \text{Środkiem sfery jest punkt } S = (3, 0, -1), \text{ promień wynosi } 10.$$

$$8.123. \text{Środkiem sfery jest punkt } S = (1, 1, -3) \text{ i jest ona styczna do płaszczyzny } 2x - 2y + z + 9 = 0.$$

$$8.124. \text{Jedna ze średnic sfery ma końce w punktach } M_1 = (3, 5, -4), M_2 = (5, -1, 0).$$

$$8.125. \text{Sfera przechodzi przez punkt } M = (0, -3, 1), \text{ natomiast jej przekrój}$$

płaszczyznę OXY jest okręgiem o równaniach $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$.

8.126. Środkiem sfery jest punkt $S = (-3, -2, 0)$ i jest ona zewnętrznie styczna do kuli $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$.

Znaleźć środek i promień okręgu K o zadanych równaniach (Zad. 8.127-8.129)

$$\mathbf{8.127.} \quad \begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 49 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{8.128.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 4 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{8.129.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 31 = 0 \\ 3x - y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do kuli $K : (x+5)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 16$ w punkcie M (Zad. 8.130-8.132)

8.130. $M = (-5, 8, 3)$. **8.131.** $M = (-5, 4, -1)$. **8.132.** $M = (-1, 8, -1)$.

Napisać równania płaszczyzny π , stycznej do kuli $K : (x+5)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 16$, spełniającej podany warunek (Zad. 8.133-8.134)

8.133. Płaszczyzna π jest równoległa do płaszczyzny $x - z = 0$.

8.134. Płaszczyzna π przechodzi przez oś OX .

Określić rodzaj powierzchni opisanej równaniem (Zad. 8.135-8.149)

$$\mathbf{8.135.} \quad z = 4x^2 + 4y^2.$$

$$\mathbf{8.136.} \quad z = 3 - x^2 - y^2.$$

$$\mathbf{8.137.} \quad z = 4x^2 + 9y^2.$$

$$\mathbf{8.138.} \quad z^2 = 4x^2 + 9y^2.$$

$$\mathbf{8.139.} \quad z = 3 - \sqrt{4x^2 + 9y^2}.$$

$$\mathbf{8.140.} \quad 4y^2 + z^2 = 1.$$

$$\mathbf{8.141.} \quad x + 9y^2 + 25z^2 + 4 = 0.$$

$$\mathbf{8.142.} \quad x^2 - y^2 + 4x = 0.$$

$$\mathbf{8.143.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0.$$

$$\mathbf{8.144.} \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36.$$

$$\mathbf{8.145.} \quad x^2 - y^2 + 9z^2 = 0.$$

$$\mathbf{8.146.} \quad (x-2)^2 - 4y^2 - z^2 = 0.$$

$$\mathbf{8.147.} \quad 4x^2 - y - 4z^2 = 0.$$

$$\mathbf{8.148.} \quad 4x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

$$\mathbf{8.149.} \quad x^2 - 4y^2 - z^2 = 1.$$

Podać równanie powierzchni (i nazwać ją) utworzonej z prostych równoległych do osi OX przechodzących przez zadaną krzywą leżącą w płaszczyźnie OYZ (Zad. 8.150-8.152)

$$\mathbf{8.150.} \quad \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1. \quad \mathbf{8.151.} \quad y^2 + 2y + z^2 - 6z + 12 = 0. \quad \mathbf{8.152.} \quad y^2 - 4z^2 = 1.$$

8.153. Podać równanie powierzchni obrotowej, której przecięcie z płaszczyzną OXY tworzy okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$, a przecięcia z płaszczyznami OXZ i OYZ są parabolami o wierzchołku w punkcie $(0, 0, -1)$.

8.154. Podać równanie stożka obrotowego, którego osią obrotu jest oś OY oraz jedną z tworzących prosta $x = y = z$.

Podać równanie kwadryki, której przecięcia płaszczyznami układu współrzędnych wynoszą odpowiednio (Zad. 8.155-8.157)

8.155. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{y^2}{4} + 4z^2 = 1$, $x^2 + 4z^2 = 1$.

8.156. $x^2 - 4x + y^2 - 5 = 0$, $x^2 - 4x - z^2 + 6z - 5 = 0$, $y^2 - z^2 + 6z - 5 = 0$.
 $(x - 2)^2 + y^2 = (z - 3)^2$.

8.157. Zbiór pusty, $y^2 - z + 1 = 0$, $x^2 - 4z + 4 = 0$.

Rozdział 9

Elementy topologii

9.1 Przestrzenie metryczne

Definicja 9.1.1 Parę (X, d) , gdzie X jest zbiorem niepustym, d zaś odwzorowaniem $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, spełniającym dla dowolnych $x, y, z \in X$ następujące warunki (aksjomaty):

- $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$,

nazywamy **przestrzenią metryczną**. Odwzorowanie d nosi nazwę **metryki** w zbiorze X . Elementy zbioru X nazywamy **punktami**, a liczbę $d(x, y)$ **odległością punktu x od punktu y** .

Aksjomaty te mówią, kolejno: odległość dwóch punktów jest nieujemna oraz punkt jest odległy od siebie samego o zero, odległość dwóch punktów jest symetryczna, długość dowolnego boku trójkąta nie jest większa od sumy długości dwóch pozostałych boków (tzw. prawo trójkąta).

Przykład 9.1.1 Dla dowolnego niepustego zbioru X i dla dowolnych $x, y \in X$ położmy:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = y \\ 1 & \text{gdy } x \neq y \end{cases}.$$

Nietrudno zauważyć, że odwzorowanie d jest metryką w X . Metrykę tę nazywamy **metryką dyskretną**, a przestrzeń (X, d) – **przestrzenią dyskretną**.

Przykład 9.1.2 Niech $X = \mathbb{R}^n$ i niech będzie dane odwzorowanie d określone następująco: dla dowolnych $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ mamy:

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (9.1.1)$$

Odwzorowanie d jest metryką w $\mathbb{R}^n$. Rzeczywiście, aksjomaty metryki są spełnione w oczywisty sposób, a aksjomat prawa trójkąta jest konsekwencją nierówności Schwarza-Buniakowskiego, patrz (5.3.5).

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z tą metryką nazywamy **przestrzenią kartezjańską n -wymiarową**. Z określenia (9.1.1) w szczególności otrzymujemy znane wzory na odległość dwóch punktów w $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, mianowicie:

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R},$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\ \text{dla } x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Metrykę określoną wzorem (9.1.1) nazywa się często metryką **naturalną** lub metryką **pitagorejską**.

Przykład 9.1.3 Metryką naturalną w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest odwzorowanie określone wzorem:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \quad \text{dla } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Zauważmy, że przyjmując $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = y_1 + iy_2$ i korzystając z definicji modułu, otrzymujemy, że odległość dwóch liczb zespolonych jest równa odległości w sensie metryki naturalnej punktów płaszczyzny jednoznacznie przyporządkowanych tym liczbom zespolonym.

Przykład 9.1.4 W $\mathbb{R}^2$ można wprowadzić metryki określone dla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ następująco:

$$d(x, y) : = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad (9.1.2)$$

$$d(x, y) : = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (9.1.3)$$

Sprawdzenie aksjomatów metryki pozostawiamy czytelnikowi. Interesujące są tutaj również interpretacja geometryczna i uogólnienie tych wzorów dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla $n > 2$.

Przykład 9.1.5 Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to (X, d_k) , gdzie

$$d_k(x, y) := kd(x, y)$$

dla $x, y \in X$, $k = \text{const}$, $k > 0$, jest również przestrzenią metryczną.

Przykład 9.1.6 Przestrzeniami metrycznymi są również zespoły (X, d_1) , (X, d_2) , gdzie dla dowolnych $x, y \in X$ jest:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\}, \\ d_2(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \end{aligned}$$

Metryki d_1 i d_2 są ograniczone przez 1, to znaczy, że odległość dwóch punktów jest nie większa od 1.

Z powyższych przykładów wynika między innymi i to, że danemu zbiorowi X można nadać charakter przestrzeni metrycznej na ogół na wiele sposobów. Wprowadźmy zatem następującą relację:

Definicja 9.1.2 Metryki d_1 i d_2 określone w zbiorze X nazywamy metrykami równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists c_1, c_2 > 0 \quad c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y).$$

Nietrudno sprawdzić, że ta relacja jest równoważnością w zbiorze wszystkich metryk określonych w ustalonym zbiorze X . Prosty dowód tego faktu (oraz spostrzeżenie, że np. metryki określone wzorami (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3) są równoważne w $\mathbb{R}^2$ i nie są równoważne w metryce dyskretnej w $\mathbb{R}^2$) pozostawiamy czytelnikowi.

Łatwo zauważyć, że jeżeli X jest przestrzenią metryczną z metryką d , a $M \neq \emptyset$ jest podzbiorem X , $M \subset X$, to para (M, d_M) , gdzie d_M jest odwzorowaniem d zawężonym do $M \times M$, to znaczy

$$d_M := d(x, y) \quad \text{dla } x, y \in M$$

jest przestrzenią metryczną. Przestrzeń (M, d_M) nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni (X, d) .

I tak np. zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ z metryką określoną wzorem:

$$d_N := |n - m| \quad \text{dla } n, m \in \mathbb{N}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną.

Utożsamiając punkty x przestrzeni $\mathbb{R}$ z punktami $(x, 0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, można łatwo pokazać, że przestrzeń $\mathbb{R}$ z metryką naturalną jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką naturalną lub z metryką daną wzorem (9.1.2) albo wzorem (9.1.3).

9.2 Przestrzenie unormowane

Niech K będzie ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K .

Definicja 9.2.1 *Odzworowanie Φ przestrzeni X w $\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in X$, $a \in \mathbb{R}$, następujące warunki (aksjomaty):*

- $\Phi(x) \geq 0$ i $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$,
- $\Phi(ax) = |a| \Phi(x)$

nazywamy **normą** (w przestrzeni X), a liczbę $\Phi(x)$ – **normą wektora x** .

Normę wektora zazwyczaj zaznaczamy za pomocą pionowych kresek, pojedynczych lub podwójnych. My oznaczamy przez $\| \cdot \|$, (patrz (5.3.1)). Zatem dla normy $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dla dowolnych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$ jest:

- $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$.

Łatwo sprawdzić, że np. wartość bezwzględna jest normą w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}$, moduł jest normą w przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}$, natomiast normą wektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ jest liczba

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

patrz (5.3.3).

Definicja 9.2.2 *Parę $(X, \| \cdot \|)$, gdzie X jest przestrzenią wektorową, a $\| \cdot \|$ jest normą, nazywamy **przestrzenią unormowaną**.*

Nietrudne do sprawdzenia i istotne jest spostrzeżenie, że każdej przestrzeni unormowanej można nadać charakter przestrzeni metrycznej. Mianowicie:

Twierdzenie 9.2.1 *Każda przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.*

Dowód. Jeżeli $(X, \| \cdot \|)$ jest przestrzenią unormowaną, to (X, d) , gdzie

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in X \tag{9.2.4}$$

jest przestrzenią metryczną. Pierwszy aksjomat z definicji przestrzeni metrycznej wynika bezpośrednio z pierwszego aksjomatu normy, pozostałe dwa wynikają z drugiego aksjomatu normy oraz faktu, że dodawanie, zarówno w przestrzeni X , jak i w $\mathbb{R}$ jest przemienne.

Bardzo często, jeżeli w przestrzeni wektorowej X dana jest metryka d , to można w niej określić normę wzorem:

$$\|x\| := d(x, 0) \quad \text{dla } x \in X.$$

Na przykład w $\mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad \|x\| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Nie jest tak zawsze, wskazuje na to następujący przykład.

Niech d będzie metryką w $\mathbb{R}$ określoną następująco:

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Kładąc dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$:

$$\|x\|_* = d(x, 0) = \frac{|x|}{1 + |x|},$$

nie otrzymamy normy, gdyż np. dla $x = 1$ i $a = 2$ mamy:

$$\begin{aligned} \|2x\|_* &= \frac{|2x|}{1 + |2x|} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3}, \\ 2\|x\|_* &= 2 \cdot \frac{|x|}{1 + |x|} = 2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1, \end{aligned}$$

czyli $\|2x\|_* \neq 2\|x\|_*$.

Uwaga 9.2.1 Pokazaliśmy, że pojęcie przestrzeni metrycznej jest istotnie ogólniejsze od pojęcia przestrzeni unormowanej.

9.3 Przestrzeń topologiczna

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, d) .

Definicja 9.3.1 Kulą otwartą (kulą, otoczeniem kulistym) o środku w punkcie $a \in X$ i promieniu $r > 0$ w przestrzeni (X, d) nazywamy zbiór:

$$K(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Kulę domkniętą o tym samym środku i promieniu nazywamy zbiór:

$$\overline{K}(a, r) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

Zbiór

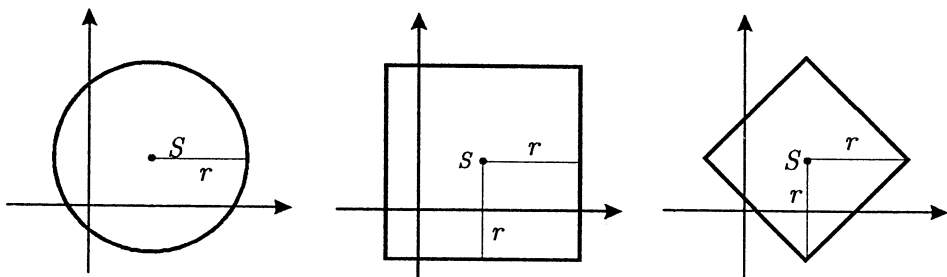
$$S(a, r) := \{x \in X : d(a, x) = r\} = \overline{K}(a, r) - K(a, r)$$

nazywamy sferą o środku w punkcie a i promieniu r .

I tak np. w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną:

$$\begin{aligned} K(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r), \\ \overline{K}(a, r) &= [a - r, a + r], \\ S(a, r) &= \{a - r, a + r\} - \text{zbiór dwuelementowy.} \end{aligned}$$

Rys. 9.3.1 przedstawia kule o środku w punkcie $S \in \mathbb{R}^2$ i promieniu r , $r > 0$, w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ odpowiednio z metrykami określonymi wzorami: (9.1.1), przy $n = 2$ – metryka naturalna w $\mathbb{R}^2$, (9.1.2), (9.1.3).



Rys. 9.3.1

Łatwo zauważyć, że w przestrzeni dyskretnej X dla dowolnego $a \in X$ jest:

$$K(a, r) = \begin{cases} \{a\} & \text{gdy } r \leq 1 \\ X & \text{gdy } r > 1 \end{cases}.$$

Definicja 9.3.2 Punkt $a \in A$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru $A \subset X$ w przestrzeni (X, d) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r > 0$ takie, że $K(a, r) \subset A$.

Zbiór punktów wewnętrznych zbioru A oznaczamy przez $\text{Int } A$ i nazywamy wnętrzem zbioru A .

Innymi słowy: punkt a nazywamy punktem wewnętrznym zbioru A , jeżeli punkt ten zawiera się w zbiorze A wraz z pewnym otoczeniem.

Definicja 9.3.3 Zbiór $A \subset X$ nazywamy **zbiorem otwartym** przestrzeni (X, d) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru A jest jego punktem wewnętrznym.

Twierdzenie 9.3.1 Każda kula otwarta w przestrzeni (X, d) jest zbiorem otwartym tej przestrzeni.

Dowód. Niech $a \in X$ i $r > 0$ będą dowolnie ustalone. Niech x będzie dowolnym punktem kuli $K(a, r)$. Pokażemy, że x jest punktem wewnętrznym tej kuli. Przyjmijmy $\varepsilon := d(x, a)$. Oczywiście $0 < \varepsilon < r$. Połóżmy $\delta := \frac{1}{2}(r - \varepsilon)$ i rozważmy kulę $K(x, \delta)$. Dla dowolnego $y \in K(x, \delta)$ na podstawie nierówności trójkąta mamy:

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < \varepsilon + \delta = \varepsilon + \frac{1}{2}(r - \varepsilon) = \frac{1}{2}(r + \varepsilon) < r,$$

czyli $y \in K(a, r)$. Zatem $K(x, \delta) \subset K(a, r)$, co kończy dowód.

Uwaga 9.3.1 Zauważmy, że własność otwartości zbioru zależy nie tylko od kształtu tego zbioru, ale również od przestrzeni X i od metryki zadanej w X .

Przykład 9.3.1 Zbiór $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ nie jest otwarty w $X = \mathbb{R}$ z metryką naturalną ($a = 1$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru A), jest natomiast otwarty w $X = (0, 1)$ z dowolną metryką (tutaj $A = X$, a cała przestrzeń jest otwarta w sobie, gdyż każda kula jest z definicji jej podzbiorem) i jest otwarty w $X = \mathbb{R}$ z metryką dyskretną (wystarczy rozważyć kule o promieniach nie większych od 1):

Przykład 9.3.2 Odcinek $B = (0, 1)$ jest zbiorem otwartym w $X = \mathbb{R}$ z metryką naturalną, ale ten sam odcinek (dokładniej: zbiór $\tilde{B} = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$) na płaszczyźnie nie jest otwarty w $X = \mathbb{R}^2$ z metryką naturalną.

Podane przykłady pokazują również sens Twierdzenia 9.3.1. Mówi ono, że kula, to znaczy zbiór punktów spełniających pewien warunek (którego kształt zależy od przestrzeni X i od metryki w X), ma własność otwartości właśnie w tej przestrzeni metrycznej, w której została zbudowana.

Zauważmy na koniec, że jeżeli d_1 i d_2 są metrykami równoważnymi w przestrzeni X , to zbiór $A \subset X$ jest otwarty w przestrzeni (X, d_1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty w przestrzeni (X, d_2) .

Biorąc pod uwagę to, co już zostało powiedziane, przyjmijmy w dalszym ciągu umowę odnoszącą się również do następnych pojęć wprowadzonych w tym rozdziale, że jeżeli nie będzie obawy o nieporozumienie, o jaką przestrzeń metryczną chodzi,

będziemy mówić krótko: A jest otwarty w przestrzeni (X, d) . Przez przestrzeń $\mathbb{R}^n$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z metryką naturalną.

Niech więc przestrzeń metryczna (X, d) będzie w dalszym ciągu dowolnie ustalona. Dalsze rozważania prowadzić będziemy dla zbiorów i punktów tej przestrzeni.

Definicja 9.3.4 Punkt a nazywamy punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r > 0$ w kuli $K(a, r)$ znajduje się przynajmniej jeden punkt zbioru A różny od a .

Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczamy przez A' .

Punkt $a \in A$ i nie będący punktem skupienia zbioru A nazywamy punktem izolowanym zbioru A .

Zbiór A nazywamy zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt skupienia zbioru A należy do A .

Zbiór $\bar{A}$ utworzony ze zbioru A oraz wszystkich punktów skupienia zbioru A nazywamy domknięciem zbioru A .

Przykład 9.3.3 Dla zbioru $A = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ punkt $x = 0$ jest jedynym jego punktem skupienia w przestrzeni $\mathbb{R}$. Wszystkie punkty zbioru A są zatem punktami izolowanymi. Zbiór A nie jest domknięty, gdyż $0 \notin A$.

Przykład 9.3.4 Zbiorem punktów skupienia zbioru $B = (0, 1)$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ jest cały zbiór B . Zbiór ten jest zatem domknięty i nie ma punktów izolowanych.

Przykład 9.3.5 Dla zbioru $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zbiór $C' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest zbiorem jego punktów skupienia. Zbiór C nie ma punktów izolowanych i nie jest domknięty.

Definicja 9.3.5 Punkt a nazywamy punktem brzegowym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall r > 0 \quad K(a, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(a, r) \cap (X - A) \neq \emptyset.$$

Innymi słowy: punkt brzegowy zbioru A to taki punkt, którego każde otoczenie zawiera przynajmniej jeden punkt ze zbioru A i przynajmniej jeden punkt z jego dopełnienia, to znaczy ze zbioru $X - A$.

Definicja 9.3.6 Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru A nazywamy brzegiem zbioru A i oznaczamy ∂A .

Dla zbiorów A, B, C rozważanych w Przykładach: 9.3.3, 9.3.4, 9.3.5 mamy:

$$\partial A = A \cup \{0\}, \quad \partial B = \{0, 1\}, \quad \partial C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Nietrudno zauważyć, że punkt skupienia zbioru nie należący do zbioru jest punktem brzegowym tego zbioru oraz że punkt izolowany zbioru jest jego punktem brzegowym.

Definicja 9.3.7 *Zbiór A nazywamy zbiorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a \in A$ i $r > 0$ takie, że $A \subset K(a, r)$. Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, to liczbę*

$$\text{diam } A := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

nazywamy średnicą zbioru A .

Dodatkowo przyjmuje się, że $\text{diam } \emptyset = 0$.

Zbiory A, B, C określone w Przykładach 9.3.3, 9.3.4, 9.3.5 są ograniczone i

$$\text{diam } A = 1, \quad \text{diam } B = 1, \quad \text{diam } C = 2.$$

Wykażemy teraz ważne:

Twierdzenie 9.3.2 *Zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $(X - A)$ jest domknięte.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór $(X - A)$ jest domknięty i weźmy dowolny punkt $a \in A$ (jeżeli A jest pusty, to A jest otwarty). Oczywiście $a \notin (X - A)$ i tym samym a nie jest punktem skupienia domkniętego zbioru $(X - A)$. Oznacza to, że istnieje $r > 0$ takie, iż $K(a, r) \cap (X - A) = \emptyset$, czyli że $K(a, r) \subset A$. Zatem a jest punktem wewnętrznym zbioru A . Stąd i z dowolności wyboru punktu $a \in A$ wynika, że A jest zbiorem otwartym.

Założmy teraz, że zbiór A jest otwarty. Niech a będzie dowolnie ustalonym punktem skupienia zbioru $(X - A)$ (gdyby takiego nie było, to nie byłoby czego dowodzić). Oznacza to, że w każdej kuli $K(a, r)$ znajduje się przynajmniej jeden punkt zbioru $(X - A)$, czyli że a nie jest punktem wewnętrznym zbioru A . Ponieważ A jest otwarty, więc $a \notin A$, to znaczy $a \in (X - A)$. Zatem zbiór $(X - A)$ jest domknięty, co kończy dowód.

Uwaga 9.3.2 *Na podstawie Twierdzenia 9.3.2 nie można oczywiście wnioskować, że każdy podzbiór przestrzeni metrycznej jest albo otwarty, albo domknięty. Na ogół w*

danej przestrzeni metrycznej istnieją również takie jej podzbiory, które nie są ani otwarte, ani domknięte. Z poprzedniego i z następnego twierdzenia wynika, że w każdej przestrzeni metrycznej zbiór pusty i cała przestrzeń są takimi jej podzbiarami, które są jednocześnie zarówno otwarte, jak i domknięte (na ogół nie muszą to być jedyne podzbiory przestrzeni metrycznej o tej własności).

W dalszym ciągu skupimy naszą uwagę na pewnych własnościach zbiorów otwartych. Wykażemy następujące:

Twierdzenie 9.3.3 *W dowolnej przestrzeni metrycznej:*

1. *Zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami otwartymi.*
2. *Suma dowolnej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*
3. *Iloczyn skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Przeprowadzimy, dla przykładu, rozumowanie uzasadniające punkt 2. Twierdzenia 9.3.3.

Niech I będzie dowolnym zbiorem wskaźników. Mamy wykazać, że

$$\forall i \in I \quad A_i \text{ jest otwarty} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ jest zbiorem otwartym.}$$

Niech $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Wynika stąd, że istnieje wskaźnik $i_0 \in I$ taki, że $a \in A_{i_0}$. Ponieważ A_{i_0} jest zbiorem otwartym, więc istnieje $r > 0$ takie, że $K(a, r) \subset A_{i_0}$. Stąd i z definicji sumy zbiorów mamy: $K(a, r) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, co dowodzi tezy.

Uwaga 9.3.3 Punkt 3. Twierdzenia 9.3.3 nie przenosi się na przypadek iloczynu nieskończonej liczby zbiorów. Już przeliczalna rodzina zbiorów otwartych może nie mieć iloczynu (przecięcia) otwartego. Każdy ze zbiorów $A_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, jest otwarty w $\mathbb{R}$ (z metryką naturalną), natomiast $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1)$ nie jest otwarty w tej przestrzeni.

Definicja 9.3.8 Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Przez τ oznaczamy rodzinę podzbiorów zbioru X , spełniającą warunki:

- $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$,
- $A_i \in \tau$ dla $i \in I$ (dowolny zbiór wskaźników) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$,
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \tau$.

Parę (X, τ) nazywamy **przestrzenią topologiczną**, rodzinę τ – **topologią** zbioru X , elementy rodziny – **zbiorami otwartymi** przestrzeni topologicznej (X, τ) . Każdy zbiór otwarty zawierający punkt $a \in X$ nazywamy **otoczeniem punktu a** .

Uwaga 9.3.4 Z Twierdzenia 9.3.3 wynika, że każdej przestrzeni metrycznej można nadać charakter przestrzeni topologicznej. Wystarczy za τ przyjąć rodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów otwartych określonych jak w Definicji 9.3.2. Tak otrzymaną topologię nazywamy **topologią indukowaną przez metrykę**.

Przestrzeń topologiczna z topologią indukowaną przez metrykę staje się przestrzenią Hausdorffa.

Definicja 9.3.9 Mówimy, że przestrzeń (X, τ) ma **własność Hausdorffa** (lub inaczej jest **przestrzenią Hausdorffa**), jeżeli dla różnych, dowolnych dwóch punktów przestrzeni istnieją takie ich otoczenia, których przecięcie jest puste.

Przestrzeń topologiczna z topologią indukowaną przez metrykę ma własność Hausdorffa.

Wychodząc od pojęcia zbioru otwartego i otoczenia, można w dowolnej przestrzeni topologicznej zdefiniować wszystkie pojęcia wprowadzone w tym paragrafie. Pojęcie przestrzeni topologicznej jest jednak istotnie ogólniejsze od pojęcia przestrzeni metrycznej, przestrzeń (X, τ) , gdzie $\tau = \{\emptyset, X\}$, jest trywialnym przykładem przestrzeni topologicznej, w której nie można wprowadzić takiej metryki, by topologia indukowana przez nią pokrywała się z rodziną τ . Przestrzeń ta nie ma własności Hausdorffa. Ponieważ jednak przestrzenie nie mające własności Hausdorffa nie będą nas interesowały, ograniczymy się w dalszym ciągu do przestrzeni topologicznych z topologią indukowaną przez metrykę, czyli (aby nie komplikować zapisu) po prostu do przestrzeni metrycznych. Czytelników chcących zająć się szerzej zasygnalizowaną problematyką odsyłamy do podręczników z topologii ogólnej. Pewnym uzupełnieniem problematyki omawianej w tym rozdziale jest zbiór zadań umieszczony na jego końcu.

9.4 Zbiory zwarte i spójne w przestrzeni metrycznej

Definicja 9.4.1 Rodzinę $\{U_i\}_{i \in I}$ podzbiorów otwartych przestrzeni metrycznej X nazywamy **pokryciem otwartym** zbioru $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definicja 9.4.2 Podzbiór K przestrzeni metrycznej X nazywamy podzbiorem **zwartym** wtedy i tylko wtedy, gdy każde pokrycie otwarte zbioru K zawiera podpokrycie skończone, to znaczy jeżeli $\{U_i\}_{i \in I}$ jest pokryciem zbioru K , to istnieje skończona liczba wskaźników $i_1, i_2, \dots, i_k$ takich, że $K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

Zauważmy, że każdy skończony podzbiór przestrzeni metrycznej jest zbiorem zwartym.

W dalszym ciągu wykażemy kilka twierdzeń dotyczących struktury zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych.

Twierdzenie 9.4.1 *Każdy zbiór zwarty jest domknięty.*

Dowód. Niech K będzie podzbiorem zwartym przestrzeni metrycznej X z metryką d . Wykażemy, że zbiór $(X - K)$ jest otwarty w X (porównaj Twierdzenie 9.3.2).

Niech więc punkt $a \in (X - K)$ będzie dowolnie ustalony. Dla każdego $b \in K$ oznaczamy przez $r_b := \frac{1}{2}d(a, b)$. Oczywiście $r_b > 0$ oraz $K(a, r_b) \cap K(b, r_b) = \emptyset$ dla $b \in K$. Ponieważ K jest zwarty i rodzina $\{K(b, r_b)\}_{b \in K}$ jest otwartym pokryciem zbioru K , więc istnieje skończona liczba punktów $b_1, \dots, b_k \in K$ takich, że:

$$K \subset U := K(b_1, r_{b_1}) \cup \dots \cup K(b_k, r_{b_k}).$$

Biorąc $r := \min\{r_{b_1}, \dots, r_{b_k}\}$, zauważymy, że $r > 0$ i $K(a, r) \cap U = \emptyset$. Zatem kula $K(a, r) \subset (X - K)$, czyli punkt a , jest punktem wewnętrznym zbioru $(X - K)$, co dowodzi tezy.

Twierdzenie 9.4.2 *Każdy domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.*

Dowód. Niech $H \subset K \subset X$ i niech zbiór H będzie domknięty w przestrzeni X , a zbiór K niech będzie zwarty w X . Niech dalej $\{U_i\}_{i \in I}$ będzie otwartym pokryciem zbioru H . Dołączając do rodziny $\{U_i\}_{i \in I}$ zbiór (otwarty) $(X - H)$, otrzymujemy otwarte pokrycie zbioru K . Ponieważ K jest zwarty, więc z pokrycia tego można wybrać podpokrycie skończone zbioru K , a tym samym i zbioru H , gdyż $H \subset K$. Jeżeli zbiór $(X - H)$ wchodzi w skład tego pokrycia, to odrzucamy go i otrzymujemy w ten sposób skończone podpokrycie pokrycia $\{U_i\}_{i \in I}$ będące w dalszym ciągu pokryciem zbioru H . Ostatnia konkluzja kończy dowód.

Twierdzenie 9.4.3 *Każdy nieskończony podzbiór F zbioru zwartego K ma punkt skupienia należący do K .*

Dowód. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że nie istnieje w K punkt skupienia zbioru F . W takim razie dla każdego punktu $a \in K$ istniałaby liczba $r_a > 0$ taka, że kula $K(a, r_a)$ zawierałaby nie więcej niż jeden punkt zbioru F ; w szczególności tylko punkt a , gdy $a \in F$. Oczywiście, żadna skończona rodzina takich kul nie pokryłaby zbioru F (F jest nieskończony), a tym bardziej nie pokryłaby zbioru K ($F \subset K$). Przeczy to zwartości zbioru K i tym samym kończy dowód twierdzenia.

Aby scharakteryzować zbiory zwarte w przestrzeni $\mathbb{R}$ (z metryką naturalną), zauważymy najpierw, że z aksjomatu ciągłości zbioru liczb rzeczywistych (patrz 1.3.1) wynika następujący:

Lemat 9.4.1 *Jeżeli $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującym ciągiem przedziałów domkniętych w $\mathbb{R}$, to znaczy $E_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $E_{n+1} \subset E_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ jest niepusty.*

Dowód (szkic). Oznaczamy przez F zbiór wszystkich a_n -lewych końców przedziałów E_n i niech $x := \sup F$ (F jest niepusty oraz ograniczony z góry). Z definicji kresu górnego i z monotoniczności ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ wynika, że $a_n \leq x \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a to dowodzi tezy.

Wykażemy teraz

Twierdzenie 9.4.4 *Każdy przedział domknięty jest zwarty w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $E = [a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są dowolnie ustalone i niech $a < b$, gdyż w przypadku gdy $a = b$, nie ma czego dowodzić. Oznaczmy przez δ długość (średnicę) przedziału E , $\delta := b - a$ i zauważmy, że $x - y < \delta$ dla $x, y \in E$.

Przypuśćmy teraz, że E nie jest zwarty, to znaczy, że istnieje otwarte pokrycie $\{U_i\}_{i \in I}$ zbioru E nie zawierające skończonego podpokrycia zbioru E . Przyjmijmy $c = \frac{1}{2}(a + b)$ i rozważmy przedziały $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$ o długościach $\frac{\delta}{2}$. Przynajmniej jeden z nich, oznaczmy go przez E_1 , nie może być pokryty skończoną podrodziną rodziny $\{U_i\}_{i \in I}$. Rozbijmy przedział E_1 na dwa domknięte podprzedziały o długościach $\frac{\delta}{2^2}$. Niech E_2 będzie podprzedziałem przedziału E_1 , nie dającym się pokryć skończoną podrodziną rodziny $\{U_i\}_{i \in I}$. Kontynuując ten proces, otrzymamy ciąg przedziałów $E_n, n \in \mathbb{N}$, o następujących własnościach:

- $E \supset E_1 \supset \dots \supset \dots$,
- E_n nie da się pokryć żadną skończoną podrodziną rodziny $\{U_i\}_{i \in I}$,
- $x, y \in E_n \Rightarrow |x - y| \leq \frac{\delta}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Z Lematu 9.4.1 i z pierwszej własności wynika, że istnieje punkt x_0 należący do wszystkich przedziałów E_n . Ponieważ $\{U_i\}_{i \in I}$ jest pokryciem przedziału E , więc istnieje $i_0 \in I$ takie, że $x_0 \in U_{i_0}$. Ale U_{i_0} jest otwarty, istnieje więc $r > 0$ takie, że $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U_{i_0}$. Zauważmy, że musi istnieć $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $r > \frac{\delta}{2n_0}$, gdyż w przeciwnym razie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $2n < \frac{\delta}{r}$, a to jest niemożliwe. Z trzeciej własności wynika, że $E_{n_0} \subset U_{i_0}$ – otrzymujemy sprzeczność z drugą własnością i tym samym koniec dowodu.

Twierdzenie 9.4.5 (Heinego-Borela) *Podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Dowód. Niech K będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Załóżmy najpierw, że K jest zwarty, z Twierdzenia 9.4.1 wynika, że K jest domknięty. Gdyby K nie był ograniczony, wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istniałby w K punkt x_n taki, że $|x_n| > n$. Zbiór F , złożony z tych punktów, nie ma punktu skupienia w $\mathbb{R}$, a tym bardziej w K , otrzymujemy więc sprzeczność z Twierdzeniem 9.4.3.

Uwaga 9.4.1 *Implikacja: „ K zwarty $\Rightarrow K$ domknięty i ograniczony” jest prawdziwa w dowolnej przestrzeni metrycznej. Przypuśćmy teraz na odwrót, że K jest domknięty i ograniczony. Zbiór K jest zatem zwarty w pewnym przedziale $\langle a, b \rangle$. Na podstawie Twierdzenia 9.4.4 wiadomo, że $\langle a, b \rangle$ jest zwarty, K jako domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty (na podstawie Twierdzenia 9.4.2).*

Analogicznie można wykazać, że implikacja: „ K – domknięty i ograniczony $\Rightarrow K$ – zwarty” jest prawdziwa w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (z metryką naturalną). W dowolnych przestrzeniach metrycznych implikacja ta nie musi być prawdziwa. Dla przykładu rozważmy przestrzeń X złożoną z dowolnego nieskończonego ciągu różnych punktów z metryką dyskretną. Z definicji metryki dyskretnej wynika, że przestrzeń X jest zbiorem ograniczonym. X jako cała przestrzeń jest także zbiorem domkniętym. Łatwo zauważyć, że rodzina kul $\{K(x_i, 1)\}$, $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$ jest otwartym pokryciem zbioru X , z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego zbioru X , czyli że X nie jest zbiorem zwartym.

Twierdzenie 9.4.6 (Weierstrassa) *Każdy nieskończony i ograniczony podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}$ ma punkt skupienia w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie nieskończony i ograniczony zbiór $F \subset \mathbb{R}$. F jako ograniczony zawiera się w pewnym przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, który, na podstawie

Twierdzenia 9.4.4 jest zwarty. Zgodnie z Twierdzeniem 9.4.3 zbiór F jako nieskończony podzbiór zbioru zwartego ma w nim, a więc i w $\mathbb{R}$, punkt skupienia.

Na zakończenie zajmiemy się krótko zbiorami spójnymi.

Definicja 9.4.3 Podzbiór E przestrzeni metrycznej nazywamy **zbiorem spójnym** wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją dwa otwarte podzbiory A, B przestrzeni X takie, że:

- $A \cap B = \emptyset$,
- $A \cap E \neq \emptyset, \quad B \cap E \neq \emptyset$,
- $E \subset A \cup B$.

Można wykazać (dowód pominiemy), że:

Twierdzenie 9.4.7 Zbiór $E \subset \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem. Dokładniej: jedynymi zbiorami spójnymi w $\mathbb{R}$ są zbiory postaci: $\{a\}$, (a, b) , $\langle a, b \rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b \rangle$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $\langle a, +\infty \rangle$, $(-\infty, +\infty)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definicja 9.4.4 Zbiór otwarty i spójny nazywamy **obszarem**. Jeżeli do obszaru dołączymy jego wszystkie punkty skupienia, to otrzymamy zbiór, który nazywamy **obszarem domkniętym**.

9.5 Zadania

Zbadać, które z odwzorowań jest metryką w $\mathbb{R}$ (Zad. 9.1-9.4)

9.1. $d(x, y) := |x^2 - y^2|$.

9.2. $d(x, y) := |2x - 2y|$.

9.3. $d(x, y) := |x - 2y|$.

9.4. $d(x, y) := (x - y)^2$.

9.5. Sprawdzić, że odwzorowania:

$$d_1(x, y) := \left| \log \frac{x}{y} \right|, \quad d_2 := \left| \log \frac{x^3}{y^3} \right|, \quad d_3(x, y) := \left| \log_2 \frac{x}{y} \right|, \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}_+$$

są metrykami równoważnymi w $\mathbb{R}_+$.

9.6. W przestrzeniach metrycznych z poprzedniego zadania znaleźć:

$$K_i(1, 1) = \{x \in \mathbb{R}_+ : d_i(x, 1) < 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

9.7. Sprawdzić, czy odwzorowanie $d(m, n) := \frac{n - m}{n \cdot m}$ w zbiorze $\mathbb{N}$ tworzy przestrzeń metryczną.

9.8. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{N}, d)$, gdzie d zostało określone w poprzednim zadaniu, wyznaczyć zbiory:

$$K_1\left(10, \frac{1}{10}\right), \overline{K_1}\left(10, \frac{1}{10}\right), S_1\left(10, \frac{1}{10}\right), K_2(10, 1), \overline{K_2}(10, 1), S_2(10, 1).$$

Sprawdzić, czy dane odwzorowania w $\mathbb{R}^2$ są metrykami. Określić kształt otoczenia punktów dla tych przestrzeni (Zad. 9.9-9.10)

9.9. $d_1(A, B) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$

9.10. $d_2(A, B) := \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$

W przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną znaleźć punkty wewnętrzne, punkty skupienia, punkty izolowane i punkty brzegowe zbioru A (Zad. 9.11-9.13)

9.11. $A = \{x : x = k + 1/n\}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$

9.12. $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1).$

9.13. $A = (0, 2) \setminus \{1\}.$

9.14. Niech w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ będzie zadana metryka określona następująco: dla $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d(P_1, P_2) := \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{gdy } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{gdy } x_1 \neq x_2 \end{cases}.$$

Sprawdzić, czy zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^2$, gdzie: $A = \{(x, y) : x \in (-1, 1) \wedge y = 0\}$, $B = \{(x, y) : x = 1 \wedge y \in (1, 2)\}$, są zbiorami otwartymi w $(\mathbb{R}^2, d)$.

9.15. Znaleźć brzeg zbioru $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką naturalną, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.

9.16. Niech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ będą podprzestrzeniami metrycznymi. Oznaczmy $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ i określmy

$$d(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

dla $x, y \in X, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), x_i, y_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n.$

Wykazać, że zespół (X, d) jest przestrzenią metryczną. Przestrzeń tę nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni metrycznych.

9.17. Niech $(X, || \cdot ||)$ będzie przestrzenią unormowaną. Zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem **wypukłym** wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ dla dowolnych $x, y \in A$ i $0 < \lambda < 1$. Wykazać, że kula i kula domknięta są zbiorami wypukłymi.

Niech $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorów trójwymiarowych. Czy podane określenia dobrze definiują normę w tej przestrzeni (Zad. 9.18-9.20)

$$9.18. (a_1, a_2, a_3) = \max \{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}.$$

$$9.19. (a_1, a_2, a_3) = \min \{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}.$$

$$9.20. (a_1, a_2, a_3) = |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

Wykazać, że w dowolnej przestrzeni metrycznej mają miejsce następujące fakty (Zad. 9.21-9.23)

9.21. Kula domknięta i brzeg zbioru są zbiorami domkniętymi.

9.22. Iloczyn dowolnej ilości zbiorów domkniętych jest domknięty.

9.23. Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

9.24. Podać przykład, że w przestrzeni metrycznej suma nieskończonej liczby zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że dla dowolnego podzbioru A tej przestrzeni prawdziwe są twierdzenia (Zad. 9.25-9.30)

9.25. $\text{Int } A$ jest zbiorem otwartym.

9.26. A – otwarty $\Leftrightarrow \text{Int } A = A$,

9.27. $B \subset A \wedge B$ – otwarty $\Rightarrow B \subset \text{Int } A$,

9.28. $\text{Int}(A \cap B) = (\text{Int } A) \cap (\text{Int } B)$,

9.29. $\text{Int}(A \cup B) \supset (\text{Int } A) \cup (\text{Int } B)$; podać przykład, że inkluzji tej nie można zastąpić równością.

9.30. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $A \subset X$ oraz A' jest zbiorem punktów skupienia zbioru A , to: $\overline{A} := A \cup A'$, patrz Definicja 9.3.4. Wykazać, że (Zad. 9.31-9.36)

9.31. $\overline{A}$ jest zbiorem domkniętym.

9.32. A – domknięty $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.

9.33. $A \subset B \wedge B$ – domknięty $\Rightarrow \overline{A} \subset B$.

9.34. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

9.35. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ oraz podać przykład, że inkluzji nie można zastąpić równością.

9.36. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

9.37. Wykazać, że $(\mathbb{R}, \tau)$, gdzie τ jest rodziną złożoną ze zbioru pustego, zbioru $\mathbb{R}$ i przedziałów postaci $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, jest przestrzenią topologiczną nie mającą własności Hausdorffa, patrz Definicja 9.3.8.

9.38. Udowodnić na podstawie definicji, że zbiór $K = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ jest zwarty w $\mathbb{R}$ z metryką naturalną i nie jest zwarty w $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną.

9.39. Niech zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ będzie przestrzenią metryczną z metryką naturalną i niech $A \subset \mathbb{Q}$, $A = \{x : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$. Wykazać, że zbiór A jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{Q}$, lecz nie jest zwarty.

9.40. Wykazać, że zbiór E jest spójny w przestrzeni metrycznej X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rozkładu zbioru E na sumę rozłącznych i niepustych zbiorów C, D zachodzi: $(C \cap \overline{D}) \cup (\overline{C} \cap D) \neq \emptyset$.

9.41. Wykazać, że każdy zbiór wypukły w $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||)$, gdzie

$$||x|| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ dla } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

jest spójny.

9.42. Zbiór A nazywamy zbiorem **gęstym** w przestrzeni metrycznej X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru X jest albo punktem skupienia zbioru A , albo należy do A , albo jedno i drugie. Wykazać, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną.

Rozdział 10

Odpowiedzi

10.1 Elementy logiki

1.6. Tautologia. 1.7. Tautologia. 1.8. Nie tautologia. 1.9. Tautologia. 1.10. Tautologia. 1.11. Tautologia. 1.12. Tautologia. 1.13. Tautologia.

1.14. $p \wr q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$, $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$.

1.15. *Odwrótne*: Trójkąt równoramienny ma dwa kąty równe (prawda). *Przeciwstawne*: trójkąt nie będący trójkątem równoramiennym nie ma dwóch kątów równych (prawda). *WKW*: Warunkiem koniecznym i wystarczającym równoramienności trójkąta jest równość dwóch kątów (prawda).

1.16. *Odwrótne*: Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ (prawda). *Przeciwstawne*: Jeżeli liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $x - a$ (prawda). *WKW*: Warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest, aby liczba a była pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (prawda).

1.17. *Odwrótne*: Liczba nieujemna jest liczbą naturalną (fałsz). *Przeciwstawne*: Liczba ujemna nie jest liczbą naturalną (prawda). *WW*: Warunkiem wystarczającym, aby liczba była nieujemna, jest, aby była ona naturalna.

1.18. *Odwrótne*: Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez dziesięć, to jest podzielna przez dwa i pięć (prawda). *Przeciwstawne*: Liczba niepodzielna przez dziewięć jest niepodzielna przez dwa lub niepodzielna przez pięć (prawda). *WKW*: Warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności liczby przez dziesięć jest podzielność tej liczby przez dwa i pięć.

1.19. Odwrotne: Jeżeli liczba całkowita jest podzielna przez 10, to jest podzielna przez 5 i 9 (fałsz). **Przeciwstawne:** Liczba niepodzielna przez 10 nie jest podzielna przez 5 lub nie jest podzielna przez 9 (fałsz).

1.20. Odwrotne: Pierwiastek trójkątny kwadratowego jest liczbą rzeczywistą (fałsz, gdyż pierwiastek może być liczbą zespoloną, gdy $\Delta < 0$). **Przeciwstawne:** Jeżeli nie istnieje trójkątny kwadratowy, dla którego x jest pierwiastkiem, to x nie jest liczbą rzeczywistą (prawda). **WK:** Warunkiem koniecznym, aby x była liczbą rzeczywistą, jest, aby była pierwiastkiem pewnego trójkątny kwadratowego.

1.21. $x = 0$. **1.22.** $x \in \mathbb{R}$. **1.23.** $x = 0$. **1.24.** $x \in \mathbb{R}$. **1.25.** $x \in \mathbb{R}$. **1.26.** $x \in \emptyset$. **1.27.** $x < 0$ lub $x > 1$. **1.28.** $x \in \langle -2, -1 \rangle$. **1.29.** $x \in \langle -1, 1 \rangle$. **1.30.** $x \leq 0 \vee x \geq 1$.

1.31. $\forall m \exists x x^2 + mx - 2m^2 = 0$ (prawda). Zaprzeczenie: $\exists m \forall x x^2 + mx - 2m^2 \neq 0$ (fałsz). **1.32.** $\sim \forall x x^2 > x$ lub $\exists x x^2 \leq x$ (prawda). Zaprzeczenie: $\forall x x^2 > x$ (fałsz). **1.33.** $\forall x |x| \geq 0$ (prawda). Zaprzeczenie: $\exists x |x| < 0$ (fałsz). **1.34.** $\forall n (n|10) \Rightarrow (n|2)$ (prawda). Zaprzeczenie: $\exists n (n|10) \wedge \sim (n|2)$ (fałsz).

1.35. $\forall n (n - \text{nieparzyste}) \Rightarrow (n|3)$ (fałsz). Zaprzeczenie: $\exists n \sim (n|3) \wedge (n|2)$ (prawda).

1.36. $\forall W_3 \exists x W_3(x) = 0$ (prawda). Zaprzeczenie: $\exists W_3 \forall x W_3(x) \neq 0$ (fałsz), W_3 – wielomian stopnia trzeciego. **1.37.** $\forall x x < x^2$ (fałsz). Zaprzeczenie: $\exists x x > x^2$ (prawda). **1.38.** $\forall n \in \mathbb{N} \exists x n < x$ (prawda). $\exists n \in \mathbb{N} \forall x n > x$ (fałsz).

1.39. $\exists m \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R} x^2 + 2mx \geq 0$ (prawda). Zaprzeczenie: $\forall m \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{R} x^2 + 2mx < 0$ (fałsz). **1.40.** $\sim \forall x |x - 2| > 2 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} x + y = 0$ (prawda). Zaprzeczenie: $\forall x (|x - 2| > 2 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} x + y = 0)$ lub $\sim \exists x (\exists y \in \mathbb{N} x + y = 0) \wedge |x - 2| \leq 2$ (fałsz). **1.41.** $\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{R} \sim (n^2 < m)$ (prawda). Zaprzeczenie: $\forall m \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{R} n^2 < m$ (fałsz).

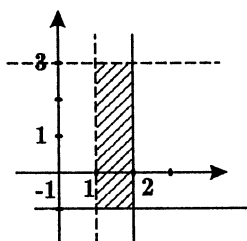
1.42. $\sim [(p \wedge \sim q) \wedge q]$. **1.43.** $(q \wedge r) \vee (r \wedge \sim p) \Leftrightarrow r \wedge (\sim p \vee q)$.

1.44. $(p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow q$. **1.45.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$.

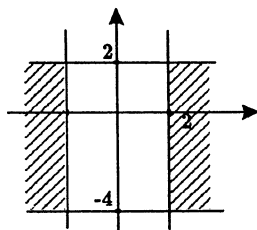
1.46. Ad 1.1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup B)$ – prawo rozdzielności sumy względem iloczynu zbiorów, **Ad 1.2.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – prawo rozdzielności iloczynu względem sumy zbiorów, **Ad 1.3.** $A \subset B \Leftrightarrow \bar{A} \cup B = \Omega$, gdzie Ω jest przestrzenią zawierającą A i B , **Ad 1.4.** $[(A = B) \wedge (B = C)] \Rightarrow (A = C)$, **Ad 1.5.** $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup D)$.

1.47. Dysjunkcji.

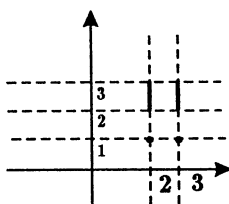
1.48.



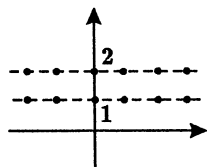
1.49.



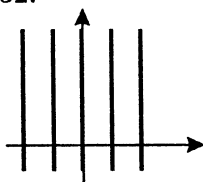
1.50.



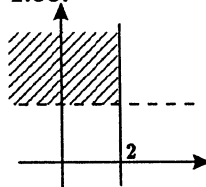
1.51.



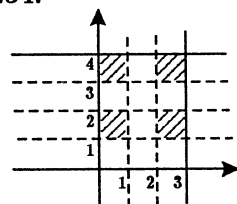
1.52.



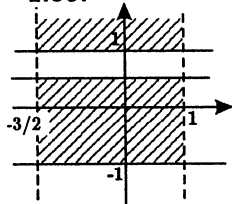
1.53.



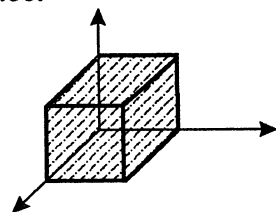
1.54.



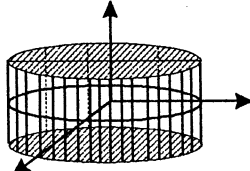
1.55.



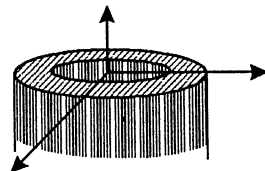
1.56.



1.57.



1.58.



$$1.59. \bigcup A_n = (4, 9), \bigcap A_n = \{5, 8\}. \quad 1.60. \bigcup B_n = (1, 3), \bigcap B_n = \emptyset.$$

$$1.61. \bigcup C_n = (1, 3) \times (0, 3), \bigcap C_n = (1, 2) \times \{1, 3\}.$$

$$1.62. \bigcup A_t = (0, +\infty), \bigcap A_t = \emptyset. \quad 1.63. \bigcup B_t = (-1, 1), \bigcap B_t = \emptyset.$$

$$1.64. \bigcup C_t = (-10, 1), \bigcap C_t = (-1, 0).$$

$$1.65. \bigcup D_t = \{(x, y) : x \leq y \leq 0 \vee 0 \leq y \leq x\}, \bigcap D_t = \{(0, 0)\}.$$

$$1.66. \bigcup A_t = \{(x, y) : x \leq y \leq x + 1\}, \bigcap A_t = \emptyset.$$

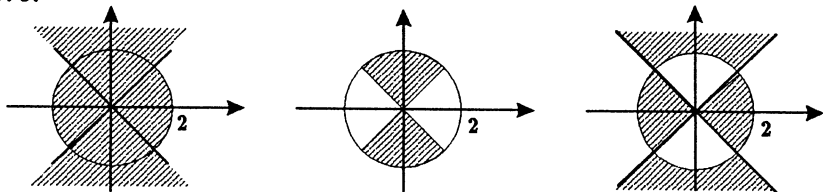
$$1.67. \bigcup B_t = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}, \bigcap B_t = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$1.68. \bigcup C_t = \{(x, y) : -2 \leq y \leq 2 \wedge -1 - \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{4 - y^2}\}.$$

$$\bigcap C_t = \{(x, y) : -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \wedge 1 - \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq -1 + \sqrt{4 - y^2}\}.$$

$$1.69. \bigcup D_t = \{(x, y) : 1 \leq y < 3 \wedge 1 < x \leq 1 + y\}, \bigcap D_t = (1, 2) \times (2, 3).$$

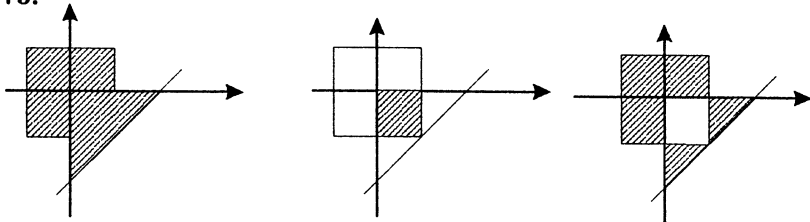
1.70.



1.71. $A \cup B = \{(x, y) : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$, $A \cap B$ – cięciwa okręgu leżąca na prostej $y = x$, $A \div B$ – koło bez wspomnianej cięciwy.

1.72. A – elipsa o półosiach $a = 4$, $b = 2$, B – koło o środku w $(0, 0)$ i promieniu 2, $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \div B = A \setminus B$.

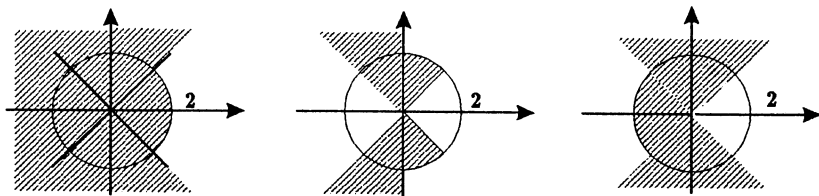
1.73.



1.74. $A \cup B$ – zbiór prostych $y = x + k\pi$, $y = k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$; $A \cap B$ – zbiór punktów $(k\pi, n\pi)$ dla $k, n \in \mathbb{Z}$, $A \div B$ – zbiór wypisanych prostych z usuniętymi punktami $(k\pi, n\pi)$.

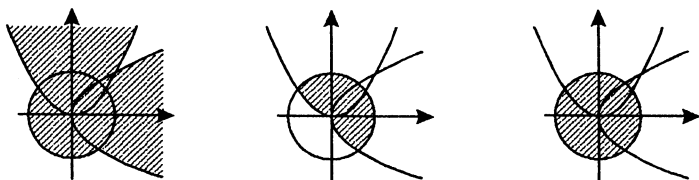
1.75. $A \cup B$ – zbiór prostych $y = -x + k\pi$, $x = \pi/2 + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, $A \cap B$ – zbiór punktów $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + n\pi)$ dla $k, n \in \mathbb{Z}$, $A \div B$ – zbiór wypisanych prostych z usuniętymi punktami $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + n\pi)$.

1.76.



1.77. $A \cup B \cup C = \{(x, y) : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$ – koło, $A \cap (B \cup C)$ – odcinek łączący punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$, $A \cup (B \cap C) = A$ – odcinek koła.

1.78.

1.79. $A = B = \emptyset$.1.80. $A = \{-9, -8, \dots, -3, 3, 4, \dots, 9\}$, $n(A) = 14$, $B = \{-8, -7, \dots, -2, 2, 3, \dots, 8\}$, $n(B) = 14$.1.83. Równoliczność A i $\mathbb{R}$ pokazuje np. $x \rightarrow \log(-x)$.1.84. Równoliczność A i $\mathbb{R}$ pokazuje np. $x \rightarrow \operatorname{ctg}(\pi x)$.1.85. $A = \{m : |m| \geq 2\} = A' + \{-2, 2\}$, $n(A) = n(A') = \mathcal{C}$, równoliczność pokazuje np. $m \rightarrow \log(|m| - 2)$.1.86. Kres dolny 0, górny 1. 1.87. Kres dolny $-4/5$, górny $16/25$.1.88. Kres dolny $-\sqrt{3}$, górny $\sqrt{3}$. 1.89. Kres dolny 0, górny $1/\pi$.1.90. Kres dolny -1 , górny 1. 1.91. Kres dolny $1/4$, górny 1.1.92. Kres dolny -3 , górny 6. 1.93. Kres dolny $-2\sqrt{3}$, górny $2\sqrt{3}$.1.94. Kres dolny 0, górny $1/2$. 1.95. Kres dolny 0, górny nie istnieje.1.96. Kres dolny $3 - \sqrt{2}$, górny $3 + \sqrt{2}$. 1.97. Kres dolny 1, górny 7.

1.98. Kres dolny 6, górny nie istnieje.

1.99. Klasami abstrakcji są zbiory liczb o jednakowej liczbie cyfr (np. zbiór liczb jedno-, dwu-, trzy-, czterocyfrowych itd.).

1.101. Dla $l = 2$ są dwie klasy abstrakcji: liczby parzyste, liczby nieparzyste, dla $l = 3$ są trzy klasy abstrakcji: liczby podzielne przez 3, liczby podzielne przez 3 z resztą 1, liczby podzielne przez 3 z resztą 2.1.102. $[5] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$, $[7] = \{\dots - 5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$, $[12] = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$.1.103. Klasami abstrakcji są punkty leżące na wspólnym okręgu o środku w $(0, 0)$, np.: $[(1, 2)] = K((0, 0), \sqrt{5})$.1.104. Klasami abstrakcji są punkty leżące na wspólnej prostej $y = kx$, np. $[(1, 2)] = \{(x, y) : y = 2x\}$, $[(-3, 2)] = \{(x, y) : y = -2x/3\}$.1.105. Klasami abstrakcji są punkty leżące na wspólnych prostych pionowych, np. $[(2, -1)] = \{(x, y) : x = 2\}$.

1.106. Klasami abstrakcji są punkty leżące na wspólnych prostych poziomych, np. $[(2, -1)] = \{(x, y) : y = -1\}$.

1.107. Klasami abstrakcji są punkty leżące na wspólnej hiperboli, np. $[(1, 2)] = \left\{ (x, y) : y = \frac{2}{x} \right\}$, $[(-3, 2)] = \left\{ (x, y) : y = \frac{-6}{x} \right\}$.

1.108. a) Jest bijekcją, b) $f^{-1}(u, v) = ((u + v)/3, (2u - v)/3)$,

c) $f(A) = \{(0, 0), (2, 1), (2, -8)\}$, $f^{-1}(B) = \{(1, 2), (2/3, 1/3)\}$, d) $f(C)$ – prosta o równaniu $v = 0$ (zależność znajdziemy z równania $f(t, 2t) = (u, v)$, $f^{-1}(D)$ – prosta $y = x/2 - 1/2$ (zależność znajdujemy z równania $f(x, y) = (t, t + 1)$).

1.109. a) Jest bijekcją, b) $f^{-1}(u, v) = ((u + 2v)/3, (u - v)/3)$, c) $f(A) = \{(2, 2), (5, 2), (0, 3)\}$, $f^{-1}(B) = \{(0, 0), (4/3, 1/3)\}$, d) $f(C)$ – prosta $u + 5v + 3 = 0$, $f^{-1}(D)$ – krzywa o równaniu $x^2 + 4y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$ (zależność dostaniemy z równania $f^{-1}(x, y) = (t^2 + 1, t)$).

1.110. Przesunięcie o wektor $[1, -2]$. **1.111.** Symetria względem osi OY .

1.112. Symetria względem osi OX . **1.113.** Symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$. **1.114.** Symetria względem prostej $y = x$. **1.115.** Symetria względem osi OY , złożona z przesunięciem o wektor $[2, -3]$. **1.116.** Powinowactwo względem osi OY o skali -2 .

1.117. $T(x, y) = (-x + 2, -y + 2)$. **1.118.** $T(x, y) = (-x + 2, y)$.

1.119. $T(x, y) = (x, -y - 2)$. **1.120.** $T(x, y) = (2x - a, 2y - b)$.

1.121. a) Przesunięcie równoległe o wektor $[a, b]$, b) $T^{-1} : (x, y) \rightarrow (u, v)$, $u = x - a, v = y - b$, c) $T(\overline{AB})$ – odcinek o końcach $T(A) = (1 + a, 1 + b)$, $T(B) = (2 + a, 3 + b)$, $T(K(0, 0), 6) = K((a, b), 6)$, d) $T^{-1}(\overline{MN})$ – odcinek o końcach $T^{-1}(M) = (-a, 2 - b)$ i $T^{-1}(N) = (2 - a, -4 - b)$.

1.122. a) Powinowactwo osiowe względem osi OX o skali 2, b) $T^{-1} : (x, y) \rightarrow (u, v)$, $u = x, v = y/2$, – powinowactwo o skali $1/2$, c) $T(\overline{AB})$ – odcinek o końcach $(1, 2)$, $(2, 6)$, $T(K(0, 0), 6)$ – elipsa o środku $(0, 0)$ i półosiach $a = 6, b = 12$, d) $T^{-1}(\overline{MN})$ – odcinek o końcach $(0, 1)$ i $(1, -2)$.

1.123. a) Powinowactwo względem osi OY o skali 3, b) $T^{-1} : (x, y) \rightarrow (u, v)$, $u = x/3, v = y$, – powinowactwo o skali $1/3$, c) $T(\overline{AB})$ – odcinek o końcach $(3, 1)$, $(6, 3)$, $T(K(0, 0), 6)$ – elipsa o środku $(0, 0)$ i półosiach $a = 18, b = 6$, d) $T^{-1}(\overline{MN})$ – odcinek o końcach $(0, 2)$ i $(2/3, -4)$.

1.124. a) Jednokładność o środku w $(0, 0)$ i skali 2, złożona z symetrią środkową o środku $(0, 0)$, b) $T^{-1} : (x, y) \rightarrow (u, v)$, $u = -x/2, v = -y/2$, – jednokładność o skali $1/2$, połączona z symetrią środkową, c) $T(\overline{AB})$ – odcinek o końcach $(-2, -2)$,

$(-4, -6)$, $T(K(0, 0), 6) = K((0, 0), 12)$, d) $T^{-1}(\overline{MN})$ – odcinek o końcach $(0, -1)$ i $(-1, 2)$.

1.125. a) Jednokładność o środku w $(0, 0)$ i skali $1/2$, b) $T^{-1} : (x, y) \rightarrow (u, v)$, $u = 2x$, $v = 2y$, – jednokładność o skali 2, c) $T(\overline{AB})$ – odcinek o końcach $(1/2, 1/2)$, $(1, 3/2)$, $T(K(0, 0), 6) = K((0, 0), 3)$, d) $T^{-1}(\overline{MN})$ – odcinek o końcach $(0, 4)$ i $(4, -8)$.

10.2 Funkcje zmiennej rzeczywistej

2.1. $D = \mathbb{R}$. **2.2.** $D = (-\infty, 3)$. **2.3.** $D = (-3, 5) \setminus \{-2\}$. **2.4.** $D : x \neq 0$.

2.5. $D : x \neq \pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$. **2.6.** $D : x \neq 3\pi/2 + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

2.7. $D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(D) = (-1, 1)$. **2.8.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(D) = \mathbb{R}$.

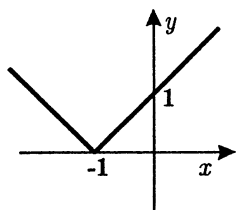
2.9. $D = \langle -3, -1 \rangle \cup (2, +\infty)$, $f(D) = \langle 0, +\infty \rangle$. **2.10.** $D = \langle -2, -1 \rangle \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$, $f(D) = \langle 0, +\infty \rangle$.

2.11. $D = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \setminus \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **2.12.** $D : x > 4$, $f(D) = \mathbb{R}$. **2.13.** $D : x > -2$, $f(D) : y > 0$. **2.14.** $D : x \leq 0$, $f(D) : y \in \langle 0, 1/2 \rangle$.

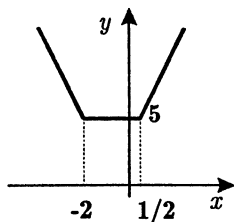
2.15. $D : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $f(D) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **2.16.** $D = \langle -1, 1 \rangle$, $f(D) = \langle 0, \pi \rangle$. **2.17.** $D : x \leq 0$, $f(D) = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. **2.18.** $D = \mathbb{R}$, $f(D) = (-\arctg 2, \pi/2)$. **2.19.** $D = \langle -1, 1 \rangle = f(D)$. **2.20.** $D : \langle -\pi/6 + k\pi, \pi/6 + k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(D) = \langle 0, \pi \rangle$. **2.21.** $D : x \in \mathbb{R}$, $f(D) = \langle -\tg 1, \tg 1 \rangle$. **2.22.** $D : x \neq 1$, $f(D) = (-\infty, -2/\pi) \cup (2/(3\pi), +\infty)$. **2.23.** $D = \langle \cos 1, 1 \rangle$, $f(D) = \langle 0, \pi/2 \rangle$.

2.24. $D = \mathbb{R}$, $f(D) = \langle 1, +\infty \rangle$. **2.25.** $D = \emptyset$. **2.26.** $D = \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$, $f(D) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **2.27.** $D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(D) : y \geq 0$. **2.28.** $D = (-1, 0)$, $f(D) = \langle 0, +\infty \rangle$.

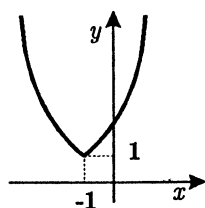
2.29.



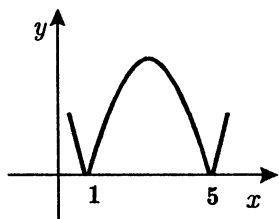
2.30.



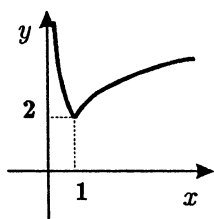
2.31.



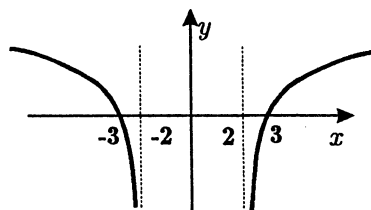
2.32.



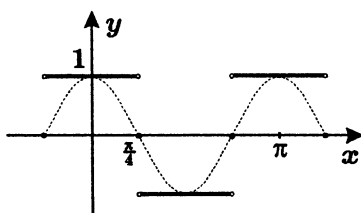
2.33.



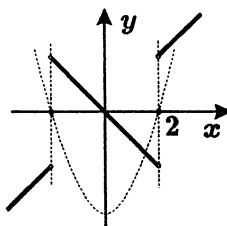
2.34.



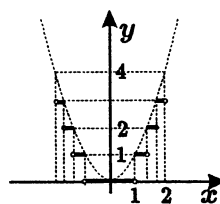
2.35.



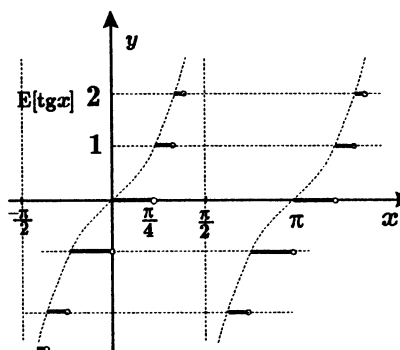
2.36.



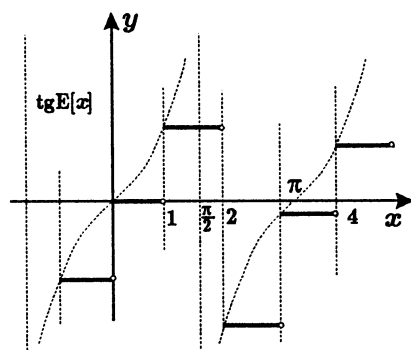
2.37.



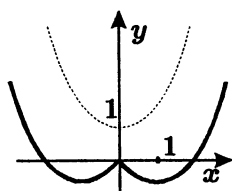
2.38.



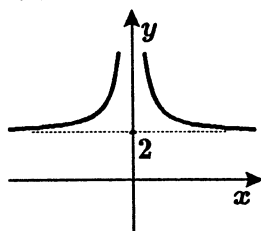
2.39.



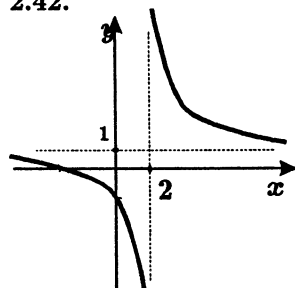
2.40.



2.41.



2.42.



2.43. Rosnąca w $(-\infty, 0)$ malejąca w $(0, +\infty)$. 2.44. Rosnąca w $(-\infty, 0)$, malejąca w $(0, +\infty)$. 2.45. Rosnąca dla $b > a$, malejąca dla $b < a$, stała dla $a = b$.

2.46. Rosnąca dla $b < 0$, malejąca dla $b > 0$. 2.47. Malejąca dla $x \leq -2$, rosnąca dla $x \geq 2$. 2.48. Przedziałami rosnąca, 2.49. Przedziałami malejąca.

2.50. Parzysta. 2.51. Nieparzysta, 2.52. Parzysta, 2.53. Parzysta. 2.54. Parzysta. 2.55. Nieparzysta. 2.56. Parzysta. 2.57. Parzysta. 2.58. Nieparzysta.

2.59. Nieparzysta. 2.60. Nieparzysta.

2.61. $T = 20\pi$. 2.62. $T = \frac{2}{a}\pi$. 2.63. $T = a\pi$. 2.64. Funkcja nieokresowa.

2.65. $T = 2\pi$. 2.66. $T = 2\pi$. 2.67. $T = 2\pi$. 2.68. $T = 1/3$. 2.69. Funkcja nieokresowa. 2.70. $T = \pi$. 2.71. $T = \pi$. 2.72. $T = 12\pi$.

2.73. $M = 1$, $m = 0$. 2.74. $M = 3$, $m = -4$. 2.75. $M = 1/2$, $m = 1/4$.

2.76. $M = \sqrt{2}$, $m = -\sqrt{2}$. 2.77. $M = 2$, $m = -1$. 2.78. $M = e$, $m = 0$.

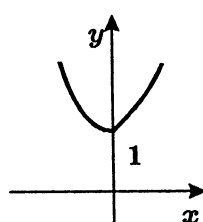
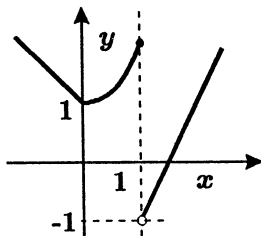
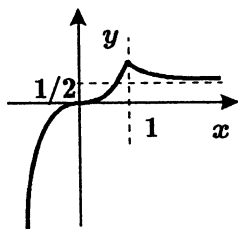
2.79. $\operatorname{tg} x$, $\frac{-1}{m[x]}$, $-\operatorname{ctg} x$. 2.80. $\operatorname{ctg} x$, $\frac{1}{m[x]}$, $-\operatorname{tg} x$. 2.81. $m[x]$, $\operatorname{sgn}[\cos x] \sin x$.

2.82. $-m[x]$, $\operatorname{sgn}[\sin x] \cos x$. 2.83. $E[x]$, $E[x^3 + 4]$. 2.84. $E[-x]$, $-E[x^3 + 4]$.

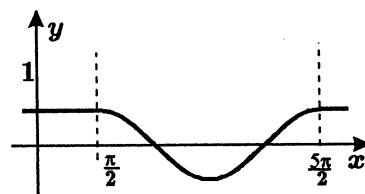
2.85.

2.86.

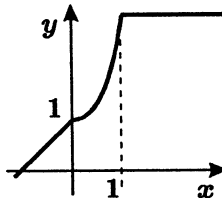
2.87.



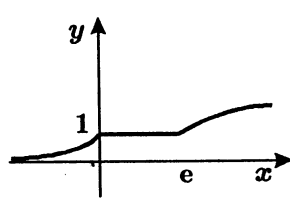
2.88.



2.89.



2.90.



2.91. $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{e^y - 1}$, $y \in \mathbb{R}$. 2.92. $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \arcsin((-4 + y)/3)$, $y \in \langle 4, 7 \rangle$.

2.93. $f^{-1}(y) = 1/\operatorname{arcosh} y$, $y > 1$. 2.94. $f^{-1}(y) = (\operatorname{tg} y/2 - 3)/2$, $y \in (-\pi, \pi)$.

2.95. $f^{-1}(y) = \frac{6+5y}{3-2y}$, $y \neq 3/2$. 2.96. $f^{-1}(y) = -1 - y$, $y \geq 0$.

2.97. $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} - 1$, $y \in \mathbb{R}$. 2.98. $f^{-1}(y) = \sqrt{1 + \ln(y - 2)}$, $y \geq 2 + 1/e$.

2.99. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = \operatorname{sgn}(y) \sqrt{|y|}$.

2.100. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = y + 2$ dla $y \in \langle -4, -3 \rangle$, $f^{-1}(y) = y + 1$ dla $y \in \langle -2, -1 \rangle$, $f^{-1}(y) = y$ dla $y \in (0, 1)$, $f^{-1}(y) = y - 1$ dla $y \in \langle 2, 3 \rangle$, $f^{-1}(y) = 2$ dla $y = 4$. 2.101. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = 1 + \log_2(y - 3)$.

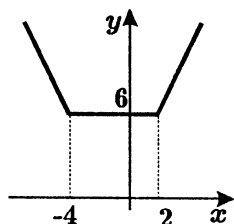
2.102. Nie jest różnowartościowa. 2.103. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = 10^y + 2$.

2.104. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} - 2$. 2.105. Nie jest różnowartościowa.

2.106. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = \frac{2-5y}{3y-5}$. 2.107. Różnowartościowa, $f^{-1}(y) = 2^{\frac{1}{y}}$.

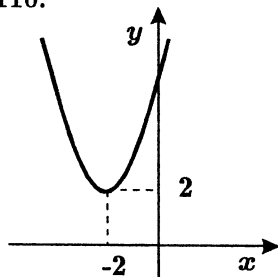
2.108. Nie jest różnowartościowa.

2.109.



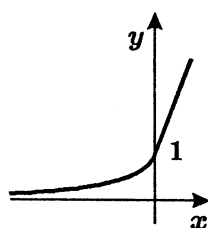
$$\begin{aligned} D_1 : x &\leq -4, \\ f^{-1}(y) &= -y/2 - 1; \\ D_2 : x &\geq 2, \\ f^{-1}(y) &= y/2 - 1. \end{aligned}$$

2.110.



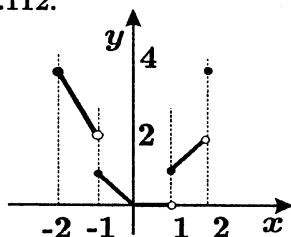
$$\begin{aligned} D_1 : x &\leq -2, \\ f^{-1}(y) &= -2 - \sqrt{y-2}; \\ D_2 : x &> -2, \\ f^{-1}(y) &= -2 + \sqrt{y-2}. \end{aligned}$$

2.111.



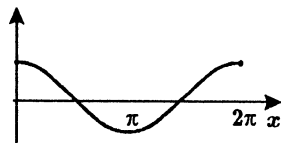
$$\begin{aligned} D : x &\in \mathbb{R}, \\ f^{-1}(y) &= \begin{cases} \log_2 y, & y \in (0, 1) \\ (y-1)/3, & y > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.112.



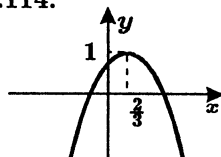
$$\begin{aligned} D : x &\in \langle -2, 0 \rangle \cup (1, 2), \\ f^{-1}(y) &= \begin{cases} -y & \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle \\ y & \text{dla } y \in (1, 2) \\ -y/2 & \text{dla } y \in (2, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

2.113.



$$\begin{aligned} D_1 : x &\in \langle 0, \pi \rangle \\ f^{-1}(y) &= \arccos y; \quad D_2 : x \in \langle \pi, 2\pi \rangle, \\ f^{-1}(y) &= \pi + \arccos(-y). \end{aligned}$$

2.114.



$$\begin{aligned} D_1 : x &\leq 2/3, \\ f^{-1}(y) &= (2 - \operatorname{arccosh}((3-y)/2))/3; \\ D_2 : x &\geq 2/3, \\ f^{-1}(y) &= (2 + \operatorname{arccosh}((3-y)/2))/3. \end{aligned}$$

2.115. $f(A) = \langle \log 2, \log 3 \rangle$, $f^{-1}(B) = \langle -2 - 10^{10}, -3 \rangle \cup \langle -1, 10^{10} - 2 \rangle$.

2.116. $f(A) = \langle 2, 2^7 \rangle$, $f^{-1}(B) = \langle -1/3, 0 \rangle$.

$$2.117. f(A) = \langle 0, 3 \sinh 2 \rangle, f^{-1}(B) = \langle -2, +\infty \rangle.$$

$$2.118. f(A) = \langle -8, 16 \rangle, f^{-1}(B) = (-2 - \sqrt{17}, -5) \cup (1, -2 + \sqrt{17}).$$

$$2.119. f(A) = \langle -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 3 \rangle, f^{-1}(B) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \pi/2 + k\pi, (k+1)\pi \rangle.$$

$$2.120. f(A) = \langle 2, 3 \rangle \cup \langle 9, 16 \rangle, f^{-1}(B) = \langle 2, 3 \rangle.$$

$$2.121. f(A) = (1/2, 1), f^{-1}(B) = \langle -2, -1 \rangle \cup \{0\} \cup (1, 2).$$

$$2.122. h(g(x)) = 2\sqrt{x-4} + 3, x \geq 4; g(h(x)) = \sqrt{2x-1}, x \geq 1/2.$$

$$2.123. h(g(x)) = \sin x^2, x \in \mathbb{R}; g(h(x)) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}.$$

$$2.124. h(g(x)) = 4x, x > 0; g(h(x)) = x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

$$2.125. h(g(x)) = 2 \log_2 x, x > 0; g(h(x)) = 1 + \log_2 x, x > 0.$$

$$2.126. h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}, |x| \geq 1; g(h(x)) = x - 1, x \geq 0.$$

$$2.127. h(g(x)) = 4, x \geq 0; g(h(x)) = 2, x \in \mathbb{R}.$$

$$2.128. f(g(x)) = \sin(x+1) + 2, x \in \mathbb{R}; g(f(x)) = \sin(|x+2|+1), x \in \mathbb{R}.$$

$$2.129. f(g(x)) = \frac{x(1+a)+a^2+b}{x(1+b)+b(1+a)}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -a, \frac{-b(a+1)}{b+1} \right\};$$

$$g(f(x)) = \frac{x(1+b)+b^2+a}{x(1+a)+a(1+b)}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -b, \frac{-a(b+1)}{a+1} \right\}.$$

$$2.130. f(g(x)) = \frac{a}{(x^2+b)^2+a}, x \in \mathbb{R}; g(f(x)) = \frac{a^2}{(x^2+a)^2} + b, x \in \mathbb{R}.$$

$$2.131. f(g(x)) = x + 2 + \ln 2, x \in \mathbb{R}; g(f(x)) = 2e^2 x, x > 0.$$

$$2.132. f(g(x)) = 2 + \frac{3}{2}x. \quad 2.133. f(g(x)) = x. \quad 2.134. f(g(x)) = 4x^3 - 3x.$$

$$2.135. f(g(x)) = 4x^4 - 4x^2. \quad 2.136. f(g(x)) = \frac{2x}{1-x^2}. \quad 2.137. f(g(x)) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$$2.138. f(x) = \frac{(x+1)^6 - 1}{(x+1)^6 + 1}. \quad 2.139. f(g(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}.$$

$$2.140. f(g(x)) = \frac{x^2+x+2}{1-2x^2-x^3}. \quad 2.141. f(g(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

$$2.142. f(g(x)) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}. \quad 2.143. f(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

$$2.144. f(g(x)) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 0 \\ e^{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 2e - e^{x^2}, & 1 < x \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 1 \\ (2e - e^{-x})^2, & x > 1 \end{cases}.$$

$$2.145. f(g(x)) = \begin{cases} x-2, & x \leq -2 \\ x^4, & x > 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ -(x+2)^2, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$2.146. f(g(x)) = \begin{cases} \frac{-3x}{2x+1} & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ \left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 & \text{dla } x \in (0, 2) \\ (x+1)^2 & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{3x^2}{x^2+1} & \text{dla } x \in (0, \sqrt{2}) \\ x^2+1 & \text{dla } x \in (\sqrt{2}, +\infty) \end{cases}.$$

$$2.147. 5\pi. \quad 2.148. \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad 2.149. \frac{3}{2}\pi. \quad 2.150. 0.$$

$$2.159. f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} + x + 1. \quad 2.160. f(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-4} - 2.$$

- 2.161. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2+4} + x^2$. 2.162. $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+2} - x$.
 2.163. $f(x) = -\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1}$. 2.164. $f(x) = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)} + 2\frac{x}{x^2+1}$.
 2.165. $f(x) = 1 + \frac{2}{x+3} - 2\frac{x}{x^2+x+1}$. 2.166. $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2x - 1$.
 2.167. $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}$. 2.168. $f(x) = \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$.
 2.169. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$. 2.170. $f(x) = \frac{1}{8} \frac{2-x}{x^2+2-2x} + \frac{1}{8} \frac{x+2}{x^2+2+2x}$.

10.3 Elementy algebry

- 3.1. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.2. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.3. Przemienne, nie jest łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.4. Przemienne, nie jest łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.5. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.6. Nie jest przemienne, nie jest łączne, ma element neutralny $e = 1$, nie ma elementu odwrotnego.
 3.7. Przemienne, łączne, $e = 0$, $a^* = -a$.
 3.8. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.9. Przemienne, łączne, $e = 0$, $a^* = -a$.
 3.10. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.11. Przemienne, łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.12. Przemienne, łączne, $e = (1, 1)$, $(x_1, x_2)^* = (1/x_1, 1/x_2)$ dla $(x_1, x_2) \neq (0, x_2)$, $(x_1, x_2) \neq (x_1, 0)$.
 3.13. Nie jest przemienne, nie jest łączne, ma element neutralny $e = (1, 1)$, $(x_1, x_2)^* = (1/x_2, 1/x_1)$, dla $(x_1, x_2) \neq (0, x_2)$, $(x_1, x_2) \neq (x_1, 0)$.
 3.14. Nie jest przemienne, nie jest łączne, nie ma elementu neutralnego.
 3.15. Przemienne, łączne, $e = (1, 0)$, $(x_1, x_2)^* = \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$ dla $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
 3.16. Przemienne, łączne, $e = (0, 0)$, $(x_1, x_2)^* = (-x_1, -x_2)$.
 3.17. Nie jest przemienne, nie jest łączne, $e = (0, 0)$, $(x_1, x_2)^* = (-x_2, -x_1)$.
 3.18. Tak. 3.19. Tak. 3.20. Tak. 3.21. Nie. 3.22. Tak. 3.23. Nie.
 3.24. Przemienne, łączne, zdanie prawdziwe jest elementem neutralnym, zdanie fałszywe nie ma inwersu.
 3.25. Przemienne, łączne, zdanie fałszywe jest elementem neutralnym, zdanie prawdziwe nie ma inwersu.
 3.26. Nie jest przemienne, nie jest łączne, nie ma elementu neutralnego.

3.27. Przemienne, łączne, zdanie prawdziwe jest elementem neutralnym, każdy element jest swoim inwersem.

3.28. $*$ – przemienne, łączne, $e = 1$, inwers tylko dla e , Δ – przemienne, łączne, $e = 6$, inwers tylko dla e .

3.29. Tak. **3.30.** Tak. **3.31.** Tak. **3.32.** Tak.

3.33. a) Przemienne, $e = a$, każdy element ma inwers, b) nie jest przemienne, nie ma elementu neutralnego.

3.34. Tak, $e = -2$, $a^* = -4 - a$. **3.35.** Tak, $e = 0$, $(a + b\sqrt{2})^* = -a - b\sqrt{2}$.

3.36. Tak, $e = 2$, $a^* = a/(a - 1)$. **3.37.** Nie. **3.38.** Tak, $e = 0$, $a^* = -a$. **3.39.** Nie.

3.40. Nie. **3.41.** Nie. **3.42.** Nie, grupa w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. **3.43.** Nie.

3.44. Zbiór liczb parzystych. **3.45.** $X = \{0\}$. **3.46.** $\mathbb{Z}$. **3.47.** Zbiór liczb podzielnych przez n .

3.48. Zbiory liczb podzielnych przez n , $n \in \mathbb{N}$ oraz zbiór jednoelementowy $\{0\}$.

3.49. Tak, $\ker f = \{0, 0\}$. **3.50.** Nie. **3.51.** Tak, $\ker f = \{0, 0\}$, **3.52.** Tak, $\ker f = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$.

3.53. $f(x) = x$. **3.54.** $f(x) = e^x$.

3.55. Homomorfizm, $\ker f = \{0\}$, $\text{Im } f$ – zbiór liczb podzielnych przez 3.

3.56. Nie jest homomorfizmem. **3.57.** Homomorfizm $\ker f = \mathbb{Z}$, $\text{Im } f = \{0\}$.

3.58. Nie jest homomorfizmem.

3.59. Izomorfizm $\ker f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}_+$. **3.60.** Nie jest homomorfizmem.

3.61. Element neutralny $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, element odwrotny $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

3.62. Zbiór macierzy $\begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3.63. Zbiór macierzy $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

3.64. Zawsze, $f(x) = x$.

3.65. Tak. **3.66.** Nie. **3.67.** Nie. **3.68.** Nie. **3.69.** Nie. **3.70.** Q. **3.71.** Q. **3.72.** Q.

10.4 Działania na liczbach zespolonych

4.1. $42 + 5i$. **4.2.** $8 + 2i$. **4.3.** $-1 + i$. **4.4.** $-\frac{54}{65} - \frac{127}{65}i$. **4.5.** $-\frac{1}{25} - \frac{32}{25}i$. **4.6.** $\frac{187}{25} - \frac{543}{50}i$.

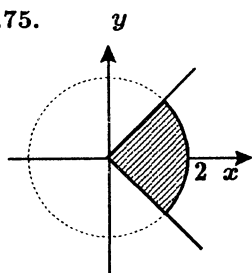
4.7. $2 \exp(i\pi/3)$. **4.8.** $\exp(i\frac{7}{4}\pi)$. **4.9.** $2\sqrt{2} \exp(i\frac{1}{4}\pi)$. **4.10.** $4 \exp(i\pi)$.

4.11. $2 \exp(i\pi/2)$. **4.12.** $\exp(i\pi)$. **4.13.** $\exp(i\frac{3}{2}\pi)$. **4.14.** $\exp(i\frac{4}{3}\pi)$. **4.15.** $4 \exp(i\frac{5}{6}\pi)$.

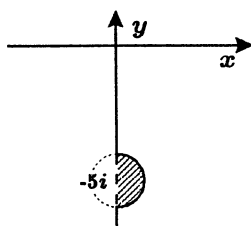
4.16. $40i$. **4.17.** $2^5\sqrt{2} \exp(i\frac{5}{12}\pi)$. **4.18.** 1. **4.19.** $2^{16} \exp(i\frac{2}{3}\pi)$.

- 4.29. $\pm 2i$. 4.30. $\pm(2-2i)$. 4.31. $\pm(2-i)$. 4.32. $\pm(1+4i)$. 4.33. $\pm(5+6i)$.
 4.34. $\pm(1-3i)$. 4.35. $\pm(1+i)$, lub $\pm(1-i)$. 4.36. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $-i$.
 4.37. $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(\sqrt{3}-i)$, $\pm(2i)$.
 4.38. $\frac{2}{5}$. 4.39. 8. 4.40. $\frac{1}{2}$. 4.41. 2. 4.42. $\frac{3}{4}\pi$. 4.43. $-3i + 2(4+i)^3 = 104 + 91i$.
 4.44. $-\frac{17}{5}$.
 4.45. $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$, $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.
 4.46. $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$, $\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x$.
 4.47. $z = 3 - i$, $z = -1 + 2i$. 4.48. $z = 2 + i$, $z = 1 - 3i$. 4.49. $z = -2 - 3i$, $z = 1 - i$.
 4.50. $z = 1 - i$, $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. 4.51. $z = -1 - 3i$, $z = 1 - 3i$. 4.52. $z = 2$, $z = -2i$.
 4.53. $z = -1 + i$, $z = -4i$. 4.54. $z = -2$, $z = 1 + i\sqrt{2}$, $z = 1 - i\sqrt{2}$.
 4.55. $z = 3$, $z = i$, $z = -i$. 4.56. $z = -2$, $z = -1 + i$, $z = -1 - i$.
 4.57. $z = -1 - 3i$, $z = 1 - 3i$, $z = 1$. 4.58. $z = 1 - i$, $z = i$, $z = -2 - 3i$.
 4.59. $z = i$, $z = -1 - i$, $z = -2 - i$. 4.60. $z = 1 + i$, $z = i$, $z = -2i$.
 4.61. $z = -4 + i$, $z = -4 - i$, $z = 4 + i$, $z = 4 - i$.
 4.62. $z = \sqrt[4]{2} \exp(\pi/8)$, $z = \sqrt[4]{2} \exp(9\pi/8)$, $z = \sqrt[4]{2} \exp(7\pi/8)$, $z = \sqrt[4]{2} \exp(15\pi/8)$.
 4.63. $z = -2 + i$, $z = -2 - i$, $z = 2 + i$, $z = 2 - i$. 4.64. $z = -1 - 2i$, $z = 1 + 2i$,
 $z = -1$, $z = 1$.
 4.65. $z = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$, $z = i$, $z = 1$, $z = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$,
 $z = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$. 4.66. $z = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$, $z = -i$, $z = -1$,
 $z = 1$, $z = i$, $z = i$.
 4.67. $z = \sqrt{2}$, $z = -\sqrt{2}$, $z = i\sqrt{2}$, $z = -i\sqrt{2}$, $z = 1 + i$, $z = 1 - i$, $z = -1 + i$,
 $z = -1 - i$. 4.68. $z = -3$, $z = \frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$, $z = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$. 4.69. $z = 0$, $z = \sqrt{2}$,
 $z = -\sqrt{2}$. 4.70. $z = 0$, $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $z = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+i)$, $z = -i$. 4.71. $z = t$,
 $z = it$, $t \in \mathbb{R}$. 4.72. $z = 2$, $z = -1 - i\sqrt{3}$, $z = -1 + i\sqrt{3}$. 4.73. $z = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$,
 $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $z = -i$. 4.74. $z = 0$, $z = 2(1+i)$, $z = -2(1+i)$, $z = 2(1-i)$,
 $z = -2(1-i)$.

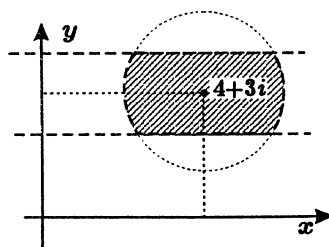
4.75.



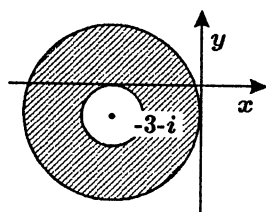
4.76.



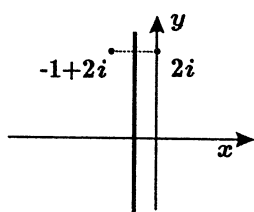
4.77.



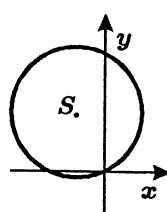
4.78.



4.79.

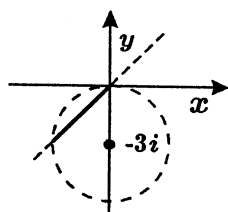


4.80.

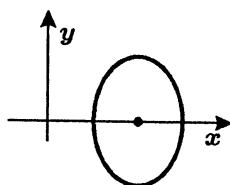


$$S = \frac{-2}{3} + \frac{4}{3}i, r^2 = \frac{20}{9}$$

4.81.

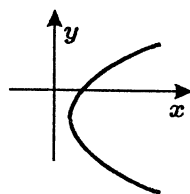


4.82.



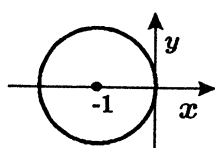
$$(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

4.83.

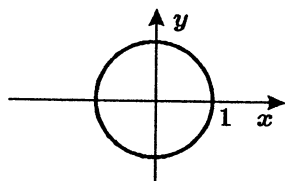


$$(y+1)^2 = 2(x - \frac{1}{2})$$

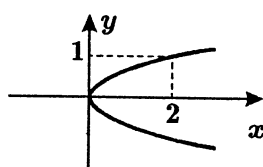
4.84.



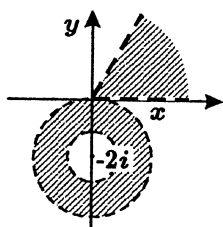
4.85.



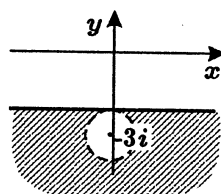
4.86.



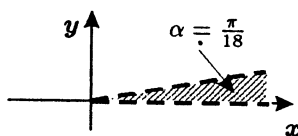
4.87.



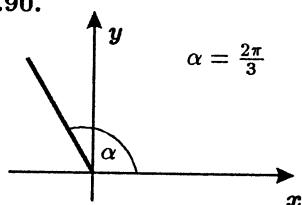
4.88.



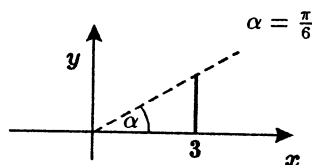
4.89.



4.90.



4.91.

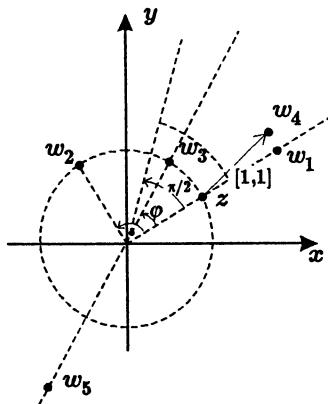


4.92. $z = 2 + i$, $z = 2 - i$, $z = 2 + i$, $w(z) = (z^2 - 4z + 5)^2$. 4.93. $z = i$, $z = -i$, $z = 1 - 2i$, $w(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 5)$. 4.94. $z = 2i$, $z = -2i$, $z = 3 - 2i$, $w(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 13)$. 4.95. $z = 1 - i$, $z = 2 + i$, $z = 2 - i$, $w(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 5)$.

4.96. -4 . 4.97. 64 . 4.98. $-5 + 12i$. 4.99. 1 . 4.100. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$.

4.101. 4 . 4.102. 6 . 4.103. 13 .

4.110.



4.111. $z = 1 + i$, $w = 1 - i$.

4.112. $z = 2 - i$, $w = 0$,

4.113. $z = i$, $w = 1$,

4.114. $z = i$, $w = 1 - i$, $t = 1$.

4.115. $z = 1 - i$, $w = 2 + i$, $t = -3i$.

10.5 Przestrzenie wektorowe

5.1. Niezależne. 5.2. Niezależne. 5.3. Niezależne. 5.4. Zależne.

5.5. Niezależne. 5.6. Niezależne.

5.7. $\bar{x} = \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2$. 5.8. $\bar{x} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$.

5.9. $\bar{x} = 2\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3$. 5.10. $\bar{x} = \bar{a}_1 - \bar{a}_3$.

5.11. Baza dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$. 5.12. Baza dla $k \neq 0$.

5.13. Dla żadnego k wektory nie tworzą bazy. 5.14. Baza dla $k \in \mathbb{R}$.

5.15. $f = \frac{17}{4}f_1 - 3f_2 + \frac{1}{2}f_3$. 5.16. $f = -5f_1 + 3f_2$.

5.17. $f = -f_1 + 2f_3$. 5.18. $f = 4f_1 - 2f_2 - f_3$.

5.19. $12 + 7\sqrt{6}$. 5.20. $19a^2 + 5a + 3$. 5.21. $\frac{\sqrt{21}}{21}(3, 2\sqrt{3})$.

5.22. Tak. 5.23. Nie. 5.24. Nie. 5.25. Tak. 5.26. Nie.

5.27. $(-1, 4, 7)$. 5.28. $(a, 2, a^2 + 4)$. 5.29. $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{6}\sqrt{2}, \frac{1}{6}\sqrt{2})$. 5.30. $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

5.31. Układ nie jest ortogonalny. 5.32. Układ nie jest ortogonalny.

5.33. Nie jest przestrzenią. 5.34. Jest przestrzenią. 5.35. Jest przestrzenią.

5.36. Jest przestrzenią. 5.37. $L_1 : y = x$, $L_2 : y = 1$. 5.38. Nie jest.

10.6 Macierze, działania na macierzach

$$6.1. \begin{bmatrix} -3 & -16 \\ 4 & -23 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.2. \begin{bmatrix} a-3p & b-3q \\ c-3r & d-3s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}.$$

$$6.3. \begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 8 & 9 & -1 \\ 13 & 12 & 5 \end{bmatrix}. \quad 6.4. \begin{bmatrix} 11 & -6 & -46 \\ 24 & 8 & -56 \\ 13 & 16 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$6.5. \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.6. \begin{bmatrix} 14 & 37 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$6.7. \begin{bmatrix} 17 & 26 & 4 \\ 8 & -6 & 11 \\ -23 & -24 & -11 \end{bmatrix}. \quad 6.8. \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a+a^2+3 & a^2+1 \\ 2a+a^2+3 & 9+a^2 & 2a+a^2+3 \\ a^2+1 & 2a+a^2+3 & a^2+1 \end{bmatrix}.$$

$$6.9. \begin{bmatrix} 3+9i & 2-2i \\ -15 & 20i \end{bmatrix}. \quad 6.10. \begin{bmatrix} 1-i & 3+3i \\ 2+4i & -2-4i \end{bmatrix}. \quad 6.11. [0].$$

$$6.12. \begin{bmatrix} 12 & 22 & 3 \\ -7 & 40 & 3 \\ 15 & -14 & -6 \end{bmatrix}. \quad 6.13. \begin{bmatrix} 11 & 23 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$6.14. \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}. \quad 6.15. \begin{bmatrix} -14 & 20 & 5 \\ -9 & -9 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.16. \begin{bmatrix} 4-2i & -2+4i & 4-2i \\ -1+3i & 3+i & -1+i \\ 3-3i & 1-i & 3-3i \end{bmatrix}. \quad 6.17. \begin{bmatrix} 1+5i & 3+3i & -2+2i \\ 5+2i & 2-3i & 2+2i \\ -2+i & 1-3i & 1+4i \end{bmatrix}.$$

$$6.18. \begin{bmatrix} 3i & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -i \\ 1 & -i & 2i \end{bmatrix}. \quad 6.19. \begin{bmatrix} 0 & -i & -1 \\ i & 0 & i \\ 1 & i & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.20. \begin{bmatrix} 27 & 21 & 1 \\ 21 & 18 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad 6.21. \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 21 \end{bmatrix}. \quad 6.22. [4].$$

$$6.23. \begin{bmatrix} 17 & 14 & 11 & -4 \\ 14 & 13 & 12 & -3 \\ 11 & 12 & 13 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad 6.24. \begin{bmatrix} 14+4i & 8-3i \\ 8-3i & 11 \end{bmatrix}.$$

$$6.25. \begin{bmatrix} -13 & -2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}. \quad 6.26. \begin{bmatrix} a^4 & a^3+ba^2+b^2a+b^3 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix}.$$

$$6.27. \begin{bmatrix} -1 & 12 & -8 \\ -12 & 19 & -8 \\ 8 & 8 & -9 \end{bmatrix}. \quad 6.28. \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 6.29. \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}.$$

$$6.30. \begin{bmatrix} 1 & ni \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 6.31. \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

$$6.32. 15. \quad 6.33. 22. \quad 6.34. 85. \quad 6.35. 24. \quad 6.36. -3. \quad 6.37. 18. \quad 6.38. -120. \quad 6.39. 9.$$

$$6.40. 4^4. \quad 6.41. 840. \quad 6.42. 160. \quad 6.43. 0. \quad 6.44. 120. \quad 6.45. -360. \quad 6.46. -468.$$

$$6.47. n!. \quad 6.48. 2n+1. \quad 6.49. (1-x)(2-x)\dots(n-1-x).$$

$$6.50. \lambda = 2\sqrt{2}, \lambda = -2\sqrt{2}. \quad 6.51. \lambda = \frac{1}{2}, \lambda = 2. \quad 6.52. \lambda = -2, \lambda = 1.$$

$$6.53. \lambda = 1. \quad 6.54. \lambda = \frac{1}{2} + 2i. \quad 6.55. \lambda = i, \lambda = 2 - i.$$

$$6.56. x = 3 \text{ lub } x = -3. \quad 6.57. x = -1. \quad 6.58. x \in \mathbb{R}. \quad 6.59. x = 0.$$

$$6.60. p = 9 - 12i. \quad 6.61. p = 4i. \quad 6.62. p = -1 + 2i. \quad 6.63. p = -2.$$

$$6.64. rA = 2. \quad 6.65. rA = 3. \quad 6.66. rA = 2. \quad 6.67. rA = 2.$$

$$6.68. rA = 2. \quad 6.69. rA = 2. \quad 6.70. rA = 4. \quad 6.71. rA = 3.$$

$$6.72. rA = 3. \quad 6.73. rA = 4. \quad 6.74. rA = 3. \quad 6.75. rA = 6.$$

$$6.76. \text{Dla } \lambda \neq 1 \quad rA = 3, \text{ dla } \lambda = 1 \quad rA = 2.$$

$$6.77. \text{Dla } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \quad rA = 3, \text{ dla } \lambda = -2 \quad rA = 2, \text{ dla } \lambda = 1 \quad rA = 1.$$

$$6.78. \text{Dla } \lambda \neq \pm(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \quad rA = 3, \text{ Dla } \lambda = \pm(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \quad rA = 2.$$

$$6.79. \text{Dla } \lambda \neq 0 \quad rA = 4, \text{ dla } \lambda = 0 \quad rA = 3.$$

$$6.80. \text{Dla } \lambda \neq 4 \quad rA = 4, \text{ dla } \lambda = 4 \quad rA = 2.$$

$$6.81. \text{Dla } \lambda \neq 1 \quad rA = 3, \text{ dla } \lambda = 1 \quad rA = 2.$$

$$6.82. \text{Dla dowolnych } \lambda \quad rA = 2.$$

$$6.83. \text{Dla } \lambda \neq 1 \quad rA = 3, \text{ dla } \lambda = 1 \quad rA = 1.$$

$$6.84. A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad 6.85. B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6.86. C^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad 6.87. D^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9-3i & -3+i \\ 3-i & -1-3i \end{bmatrix}.$$

$$6.88. A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 6.89. B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$6.90. C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad 6.91. D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$6.92. \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -1 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad 6.93. \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$6.94. \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 6.95. \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5i & -2-3i & 3+2i \\ -2-3i & i & 1 \\ 3+2i & 1 & -i \end{bmatrix}.$$

$$6.96. \mathbf{A} = \frac{1}{65} \begin{bmatrix} -12 & -8 & 27 & 18 \\ -8 & -27 & 18 & 12 \\ 27 & 18 & -12 & -8 \\ 18 & 12 & -8 & -27 \end{bmatrix}.$$

10.7 Układy równań liniowych

7.1. $(1, -5/4, -5/4)$. 7.2. $(2, -2, 3)$. 7.3. $(1, 1, 1)$. 7.4. $(1, 1, 1)$. 7.5. $(1, -1, 2)$.

7.6. $(2, 2, 0)$. 7.7. $(-1, 4, 3)$. 7.8. $(2, 1, -1)$. 7.9. $(1, 2, 1, -1)$. 7.10. $(-2, 0, 1, -1)$.

7.11. $(-2/5, -6/5, 17/5, 1)$. 7.12. $(-1, -1, 3, 1)$. 7.13. $(2, 1, 1, 1)$.

7.14. $(0, 2, 5/3, -4/3)$. 7.15. $(-1, 3, -1, -1)$. 7.16. $(2, -2, -4, 0)$.

7.17. Sprzeczne. 7.18. Oznaczony $(1, 2, 1)$. 7.19. Nieoznaczony, dwa stopnie swobody
 $x = x, y = y, z = -(1/4)x - (9/4)y + 2, t = -(5/4)x - (1/4)y, x, y \in \mathbb{R}$.

7.20. Nieoznaczony, dwa stopnie swobody $x = x, y = y, z = -x - y + 3, t = -2,$
 $u = x + y - 4, x, y \in \mathbb{R}$. 7.21. Oznaczony, $x = 1, y = 0, z = -2$. 7.22. Sprzeczne.

7.23. Nieoznaczony, dwa stopnie swobody, $x = x, y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{24}t - \frac{1}{3}, z = -\frac{11}{8}t,$
 $t = t, x, t \in \mathbb{R}$. 7.24. Nieoznaczony, dwa stopnie swobody $x = x, y = 2x + 1 - u,$

$z = 3 - 4u, t = 0, u = u, u, x \in \mathbb{R}$. 7.25. Nieoznaczony, trzy stopnie swobody,
 $x_1 = \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}, x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 + \frac{1}{3}, x_3 = x_3, x_4 = x_4, x_5 = x_5, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

7.26. Nieoznaczony, jeden stopień swobody $x = 0, y = 0, z = 0, t = u, u = u, u \in \mathbb{R}$.

7.27. Nieoznaczony, trzy stopnie swobody, $x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4, x_2 = x_2, x_3 = x_3,$
 $x_4 = x_4, x_5 = x_2 + 2x_4, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

$$7.28. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad 7.29. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}. \quad 7.30. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$7.31. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -26/7 \\ 53/14 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad 7.32. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 16/41 \\ 1/41 \\ 76/41 \end{bmatrix}. \quad 7.33. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 11/34 \\ 117/34 \\ 5/34 \end{bmatrix}.$$

$$7.34. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad 7.35. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ 4/3 \\ -20/9 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

$$7.36. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 7.37. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$7.38. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 7.39. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.40. Dla $k = 1$ układ nieoznaczony, $x = -2z + 1$, $y = -3z - 3$, $z = z$, $z \in \mathbb{R}$.

7.41. Dla $k = 1$ układ nieoznaczony, $x = -2y + 1$, $y = y$, $z = 4y - 1$, $y \in \mathbb{R}$.

7.42. Dla $k \in \mathbb{R}$ układ oznaczony $x = k$, $y = 1 - \frac{1}{2}k$, $z = 1 - \frac{1}{2}k$.

7.43. Dla $k \neq 19/3$ układ oznaczony $x_1 = \frac{48+k}{19+3k}$, $x_2 = 4 \frac{-2+k}{19+3k}$, $x_3 = -\frac{25}{19+3k}$.

7.44. Dla $k = 5$ układ nieoznaczony $x_1 = -\frac{1}{3}x_2 + 1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = \frac{5}{3}x_2 - 1$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

7.45. Dla $k = 2$ układ nieoznaczony $x = -3z - 1$, $y = -3z - 1$, $z = z$, $t = z + 1$, $z \in \mathbb{R}$.

7.46. Dla $k \neq 1$ i $k \neq -2$ układ oznaczony, dla $k = 1$ układ oznaczony, dwa stopnie swobody, dla $k = -2$ układ sprzeczny.

7.47. Dla $a \neq 1/2$ i $a \neq 2$ układ oznaczony, dla $a = 1/2$ lub $a = 2$ układ sprzeczny.

7.48. Dla $\lambda \neq 3$ i $\lambda \neq \pm\sqrt{2}$ układ oznaczony, dla $\lambda = 3$ lub $\lambda = \pm\sqrt{2}$ układ sprzeczny.

7.49. Dla $m \neq 3$ i $m = -2$ układ oznaczony, dla $m = 3$ lub $m = -2$ układ sprzeczny.

7.50. Sprzeczny dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-6/7, 1\}$, oznaczony dla $m = -6/7$ lub $m = 1$.

7.51. Dla $p \neq 1/2$ i $p \neq 2$ układ oznaczony, dla $p = 2$ układ nieoznaczony, dla $p = 1/2$ układ sprzeczny.

7.52. Dla $a \neq -3$ układ oznaczony, dla $a = -3$ układ sprzeczny.

7.53. $k \neq 1$ i $k \neq 2$. 7.54. $k \neq 0$. 7.55. $k \neq 1$. 7.56. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$.

7.57. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 7.58. $m \in \emptyset$.

7.59. $\bar{x} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3$. 7.60. $\bar{x} = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3$.

7.61. $\bar{x} = -\bar{u}_1 + \bar{u}_3$. 7.62. $\bar{x} = 3\bar{u}_2 + 3\bar{u}_4$.

10.8 Geometria analityczna w przestrzeni

8.1. $A = (0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$, $B = (-\sqrt{2}\sqrt{3}, -\sqrt{2}\sqrt{3}, -2)$, $C = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3})$.

8.2. $A = (0, -3, -5)$, $B = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 3)$, $C = (\sqrt{3}, -1, -8)$.

8.3. $A = (10, 3\pi/2, -\pi/6)$, $B = (2\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/4)$, $C = (\sqrt{2}, -\pi, \pi/4)$.

8.4. $A = (3\sqrt{2}, -\pi/4, 2)$, $B = (4, \frac{3}{2}\pi, -3)$, $C = (2, 2\pi/3, 7)$.

8.5. $\sqrt{86}$. 8.6. 11.

8.7. $(12, 11, 0)$. 8.8. $(0, 0, 4/5)$. 8.9. $(-3/2, 0, 0)$. 8.10. $(-4/3, 1, -20/3)$.

8.11. $\cos \alpha = 1/\sqrt{6}$, $\cos \beta = -1/\sqrt{6}$, $\cos \gamma = 2/\sqrt{6}$. 8.12. $\cos \alpha = 2/3$, $\cos \beta = 1/3$, $\cos \gamma = -2/3$. 8.13. $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 1/\sqrt{2}$, $\cos \gamma = -1/\sqrt{2}$.

8.14. Nie są. 8.15. Są. 8.16. Są. 8.17. Nie są. 8.18. Nie są.

8.19. Są. 8.20. Są. 8.21. Są.

8.22. $\sqrt{26} + \sqrt{30} + \sqrt{62}$. 8.23. $h = \frac{1}{62}\sqrt{771}\sqrt{62}$.

8.24. $\frac{1}{2}\sqrt{158}$, $\frac{1}{2}\sqrt{146}$, $\frac{5}{2}\sqrt{2}$. 8.25. $(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3})$.

8.26. -252 . 8.27. 9. 8.28. -42 . 8.29. $7\sqrt{6}$.

8.30. $(1, 16, 22)$. 8.31. $(17, -1, 26)$. 8.32. $(-16, 17, 11)$. 8.33. $(23, 41, -7)$.

8.34. $|V| = 6$, $h_A = \frac{3}{29}\sqrt{29}$. 8.35. $|V| = 22$, $h_A = \frac{11}{30}\sqrt{30}$. 8.36. $\bar{n} = \frac{\sqrt{65}}{65}(2, -5, 6)$.

8.37. $\frac{1}{3}(1, -2, 2)$. 8.38. $\frac{1}{6}(-3, -5, \sqrt{2})$. 8.39. $\frac{1}{15}(11, -2, -10)$.

8.45. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$. 8.46. $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c}$. 8.47. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$.

8.48. Jest prostokątny, $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/4$. 8.49. Jest prostokątny, $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/4$. 8.50. Nie jest prostokątny. 8.51. Jest prostokątny, $\alpha = \pi/2$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

8.52. Można. 8.53. Można. 8.54. Nie można. 8.55. Nie można.

8.56. Można. 8.57. Można. 8.58. Nie można. 8.59. Można.

8.60. Płaszczyzny nie przecinają się i nie są równoległe. 8.61. Płaszczyzny przecinają się. 8.62. Płaszczyzny nie przecinają się i nie są równoległe. 8.63. Płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej.

8.64. $k \neq \frac{5}{6}$. 8.65. $k \neq -\frac{57}{8}$.

8.66. $k = -1$, $k = 4$. 8.67. $k = 2$.

8.68. Dla $k = -7/5$ lub $k = 2$ płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, dla pozostałych k płaszczyzny mają jeden punkt wspólny. 8.69. Dla $k = 1$ płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, dla $k \neq 1$ mają jeden punkt wspólny.

8.70. $x + y + z = 0$. 8.71. $8x + y - 5z - 4 = 0$.

8.72. $4x - y - z + 6 = 0$. 8.73. $x + 9y - 2z + 8 = 0$.

8.74. 8. 8.75. $\frac{19}{84}\sqrt{14}$. 8.76. $\frac{5}{13}$.

8.77. $\alpha = \pi/2$. 8.78. $\alpha = 0$. 8.79. $\alpha = \pi/4$.

8.80. $3x + 2y + 1 = 0$. 8.81. $x - 2y - 2z - 5 = 0$. 8.82. $9x - 2y - 6z - 13 = 0$ lub $x - 2y - 2z - 5 = 0$. 8.83. $3x + 2y + 1 = 0$.

8.84. $22x + 16y - z - 45 = 0$. 8.85. $y + 4z - 4 = 0$. 8.86. $y + 4z - 4 = 0$.

8.87. $x - y + z + 1 = 0$. 8.88. $3x + 4y + 5z - 11 = 0$.

8.89. Zawiera się. 8.90. Zawiera się. 8.91. Nie zawiera się.

8.92. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. 8.93. $\frac{x-4}{-7} = \frac{y+7}{11} = \frac{z-2}{-2}$. 8.94. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-4}$.

8.95. $\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-1}{-13}, \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -1 + 14t \\ z = 1 - 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. 8.96. $x = \frac{y}{-2} = z - 4$,

$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

8.97. $\frac{x+2}{-4} = z - 1, y = 1, \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

8.98. Skośne. 8.99. Przecinające się. 8.100. Równoległe. 8.101. Skośne.

8.102. Dla $k = 5/4$ proste przecinają się, dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{5/4\}$ proste skośne, dla $k = -3$ skośne prostopadłe.

8.103. Dla $k = 1$ lub $k = -1$ proste równoległe, dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ proste skośne, dla $k = 0$ proste skośne prostopadłe.

8.104. Dla $k = -2$ proste przecinają się, dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ proste skośne, dla $k = -6$ skośne prostopadłe.

8.105. Dla $k = 5$ proste przecinające się, dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ proste skośne.

8.106. $\frac{x}{-7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{11}$. 8.107. $\frac{x+1/3}{-25} = \frac{y+8/3}{10} = \frac{z-4/3}{-65}$.

8.108. $\begin{cases} x = -61/19 + 4t \\ y = 56/19 + 39t \\ z = -49/19 - 27t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

8.109. $(5, -2, 5)$. 8.110. $(7, 3, 9)$. 8.111. $(-4, -23, 1)$.

8.112. $M = (-12, -4, 18)$. 8.113. $(4, -1, 3)$. 8.114. $(\frac{43}{19}, -\frac{98}{19}, \frac{74}{19})$.

8.115. $\frac{4}{7}\sqrt{42}$. 8.116. $\sqrt{\frac{458}{97}}$. 8.117. $\frac{207}{130}\sqrt{26}$. 8.118. $\frac{2}{113}\sqrt{339}$.

8.119. $\alpha = \pi/3$. 8.120. $\alpha = \pi/6$. 8.121. $\alpha = 0$.

8.122. $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 100$. 8.123. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$.

8.124. $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 14$.

8.125. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. 8.126. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$.

8.127. $S = (4, -1, 3)$, $R = \sqrt{43}$. 8.128. $S = (4, 3, 1)$, $r = \sqrt{22}$.

8.129. $S = (2, -1, 1)$, $r = 5$.

8.130. $z - 3 = 0$. 8.131. $y - 4 = 0$. 8.132. $x + 1 = 0$.

8.133. $x - z + 4(1 + \sqrt{2}) = 0$ lub $x - z + 4(1 - \sqrt{2}) = 0$. **8.134.** $4x(10 - \sqrt{73}) + 9y = 0$ lub $4x(10 + \sqrt{73}) + 9y = 0$.

8.135. Paraboloida obrotowa, wierzchołek $(0, 0, 0)$.

8.136. Paraboloida obrotowa, wierzchołek $(0, 0, 3)$.

8.137. Paraboloida eliptyczna, wierzchołek $(0, 0, 0)$.

8.138. Stożek eliptyczny, wierzchołek $(0, 0, 0)$.

8.139. Dolna połowa stożka eliptycznego, wierzchołek $(0, 0, 3)$.

8.140. Walec eliptyczny, oś symetrii – oś OX .

8.141. Paraboloida eliptyczna, wierzchołek $(-4, 0, 0)$.

8.142. Powierzchnia walcowa – walec hiperboliczny.

8.143. Sfera.

8.144. Elipsoida.

8.145. Stożek eliptyczny.

8.146. Stożek eliptyczny.

8.147. Paraboloida hiperboliczna.

8.148. Hiperboloida jednopowłokowa.

8.149. Hiperboloida dwupowłokowa.

8.150. $\frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1$. **8.151.** $y^2 + 2y + z^2 - 6z + 12 = 0$. **8.152.** $y^2 - 4z^2 = 1$.

8.153. $x^2 + y^2 = z + 1$. **8.154.** $x^2 + z^2 = 2y^2$.

8.155. Elipsoida $x^2 + \frac{y^2}{4} + 4z^2 = 1$. **8.156.** Stożek $(x-2)^2 + y^2 = (z-3)^2$.

8.157. Paraboloida eliptyczna $x^2 + 4y^2 = 4(z-1)$.

10.9 Elementy topologii

9.1. Nie jest. **9.2.** Jest. **9.3.** Nie jest. **9.4.** Nie jest.

9.6. $K_1 = (1/10, 10)$, $K_2 = (1/\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10})$, $K_3 = (1/2, 2)$. **9.7.** Tak, tworzy.

9.8. $K_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > 5\}$, $\overline{K_1} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\}$, $S_1 = \{5\}$, $K_2 = \mathbb{N}$, $\overline{K_2} = \mathbb{N}$, $S_2 = \emptyset$.

9.9. Kwadrat o wierzchołkach $(x_0 + \varepsilon, y_0)$, $(x_0, y_0 + \varepsilon)$, $(x_0 - \varepsilon, y_0)$, $(x_0, y_0 - \varepsilon)$.

9.10. Kwadrat o wierzchołkach $(x_0 + \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $(x_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $(x_0 - \varepsilon, y_0 - \varepsilon)$, $(x_0 + \varepsilon, y_0 - \varepsilon)$. **9.11.** $\text{Int } A = \emptyset$, $A' = \mathbb{Z}$, $A - A' = A - \mathbb{Z}$, $\partial A = A$.

9.12. $\text{Int } A = \emptyset$, $A' = \langle 0, 1 \rangle$, $A - A' = \emptyset$, $\partial A = \langle 0, 1 \rangle$.

9.13. $\text{Int } A = (0, 1) \cup (1, 2)$, $A' = \langle 0, 2 \rangle$, $A - A' = \emptyset$, $\partial A = \{0, 1, 2\}$.

9.14. A nie jest otwarty, B jest otwarty. **9.15.** $\partial(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

9.18. Jest. **9.19.** Nie jest. **9.20.** Jest.

Literatura

- [1] Berman G. N., *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, tłumaczenie z j. ros., Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalskiego, Gliwice 1999.
- [2] Białynicki-Birula A., *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1976.
- [3] Encyklopedia szkolna, *Matematyka*, WSiP, Warszawa 1990.
- [4] Engelking R., *Topologia ogólna I*, PWN Warszawa 1989.
- [5] Engelking R., Sieklucki K., *Geometria i topologia*, PWN Warszawa 1980.
- [6] Gdowski B., Pluciński E., *Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, wyd. IV, PWN, Warszawa 1972.
- [7] Górniewicz L., Ingarden R., *Algebra z geometrią dla fizyków*, Wydawnictwo Uniwersytetu Toruńskiego, Toruń 1995.
- [8] Kącki E., Sadowski D., Siewierski L., *Geometria analityczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1975.
- [9] Klukowski J., Nabiałek I., *Algebra dla studentów*, WNT, Warszawa 1999.
- [10] Kostrikin A. I., Manin J. I., *Algebra liniowa i geometria*, PWN, Warszawa 1993.
- [11] Kryszwicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, Część I, wyd. XXIV, PWN, Warszawa 1998.
- [12] Leja F., *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1970.
- [13] Mostowski A., Stark M., *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1970.
- [14] Otto E., *Krzywe stożkowe, zajęcia fakultatywne*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1971.

- [15] Otto E., *Matematyka dla wydziałów budowlanych i mechanicznych*, Tom I, wyd. III, PWN, Warszawa 1977.
- [16] Przybyło S., Szlachetowski A., *Algebra wielowymiarowa i geometria analityczna w zadaniach*, wyd. V, WNT, Warszawa 1993.
- [17] Siemaszko W., Stankiewicz Z., *Algebra z Geometrią, zbiór zadań*, wyd. III, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1997.
- [18] Słupecki J., Borkowski L., *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa 1969.
- [19] Stankiewicz J., Stankiewicz Z., Habrat S., *Matematyka dla wyższych szkół technicznych*, Część I, wyd. IV, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1995.
- [20] Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, Część A, wyd. X, PWN, Warszawa 1999.
- [21] Trajdos T., *Matematyka*, Część III, wyd. IV, WNT, Warszawa 1981.

Indeks

- alef zero $\aleph_0$ 21
- alternatywa 9
- aksjomat 12
- Archimedesowa spirala 171
- argument główny 93
 - liczby zespolonej 93
- asteroida 170

- baza kanoniczna 112, 157
 - przestrzeni 111
- bazowe niewiadome 148
- bazowy minor 147
- Bernoulliego lemniskata 171
- bijekcja 32

- ciało 82
 - liczbowe 83
- continuum 22
- cosinusy kierunkowe 159
- cykloida 169
- cylindryczne współrzędne 165
- Cramera układ 145
 - wzory 145
- część wspólna zbiorów 17
 - rzeczywista liczby zespolonej 92
 - urojona liczby zespolonej 92

- definicja 12
- długość geograficzna punktu 164
- dopełnienie algebraiczne 127
 - zbioru 17
- dowód 12
 - nie wprost 15
 - wprost 15
- działanie addytywne 83
 - dwuczłonowe 73
 - łączne 74, 76
 - multiplikatywne 83
 - przemienne 74
 - wewnętrzne 73
- dziedzina funkcji 30
 - naturalna funkcji 31
 - relacji 26

- eksponens, funkcja 54
- ekstremum lokalne funkcji 46
- element 16
 - neutralny 73
 - odwrotny 83
 - przeciwny 74, 83
- elipsa 166
 - urojona 168
- elipsoida 194

- Euklidesowa przestrzeń 113, 116
- funkcja 29
 - area 62
 - cyklometryczna 59
 - elementarna 43
 - eksponens 54
 - hiperboliczna 60
 - kołowa 59
 - liniowa 43
 - logarytmiczna 55
 - malejąca 45
 - monotoniczna 45
 - niemalejąca 45
 - nieparzysta 45
 - nierosnąca 45
 - odwrotna 34
 - ograniczona 44
 - okresowa 44
 - parametryczna 45
 - parzysta 45
 - potęgowa 43, 49
 - — niewymierna 49

- przedziałami monotoniczna 45
- rosnąca 45
- słabo malejąca 45
- — monotoniczna 45
- — rosnąca 45
- stała 43, 48
- ściśle malejąca 45
- — monotoniczna 45
- — rosnąca 45
- trygonometryczna 43, 55
- wielomianowa 50
- wewnętrzna 32
- wykładnicza 43, 54
- wymierna 51
- — niewłaściwa 52
- — właściwa 52
- zewnętrzna 32
- zdaniowa 11
- złożona 32
- funkcjonał 30
- funktor zdaniotwórczy 9

- generować przestrzeń 111
- gęstość zbioru 24
- grupa 77
 - abelowa 77
 - przemienna 77
- grupy homomorficzne 79
 - izomorficzne 78

- Hausdorffa przestrzeń 221
 - własność 221
- Heinego-Borela Twierdzenie 224
- hiperbola 51, 166
 - zdegenerowana 168
- hiperboliczna spirala 171
- hiperboloidea dwupowłokowa 191, 194
 - jednopowłokowa 191, 193
- homografia 51
- homomorfizm grup 79
- homomorfizmu jądro 80
 - obraz 80

- iloczyn kartezjański 25
 - macierzy 123
 - — przez liczbę 122
 - mieszany 162
 - skalarny 113, 157
 - wektorowy 161
- imaginarius 92
- implikacja 9
- indukcja matematyczna, zasada 15
- infimum 23
- injekcja 32
- inkluzja 16
- inwers 74
- inwersja 125
- izomorfizm grup 78

- jądro homomorfizmu 80
- jednostka urojona 90
- jedność ciała 83

- kanoniczna baza przestrzeni 112, 157
- kardioida 170
- kartezjańska płaszczyzna 25
 - przestrzeń 26
- kartezjański iloczyn 25
- kąt dwuścienny 176
 - między wektorami 115
- kierownica paraboli 166
 - powierzchni stożkowych 192
 - — walcowych 192
- klasa abstrakcji 28
- kolinearność wektorów 159
- kombinacja liniowa wektorów 108
- komplanarność wektorów 160
- koniunkcja 9
- kontrapozycja 13
- kontraprzykład 15
- kresy zbioru 23
- Kroneckera-Capellego Twierdzenie 147
- Kroneckera symbol 115
- krotność miejsca zerowego 101
- kula 184, 215
- kwadryki 193
- kwantifikator 11
 - duży 11
 - mały 11
 - ogólny 11
 - szczegółowy 11
- Laplace'a reguła 128

- lemat 15
- lemniskata Bernoulliego 171
- liczba i 90
 - sprzężona do z 91
- liczby sprzężone 91
 - zespolone 89
- liczebność zbioru 20
- liniowa niezależność wektorów 109
 - zależność wektorów 109
- logarytm dziesiętny 55
 - naturalny 55
- logarytmiczna funkcja 55

- macierz 121
 - diagonalna 122
 - jednostkowa 122
 - kwadratowa 121
 - nieosobliwa 129
 - niewiadomych 143
 - odwrotna 134
 - osobliwa 129
 - symetryczna 121
 - transponowana 121
 - trójkątna 121
 - uzupełniona 146
 - współczynników 143
 - wyrazów wolnych 143
 - zerowa 121
 - , iloczyn 123
 - , — przez liczbę 122
 - , rząd 132
 - , suma 122
 - , wymiar 121
- maksimum lokalne funkcji 46
- miejsce zerowe funkcji 46
 - — , krotność 101
- minimum lokalne funkcji 46
- metoda zero-jedynkowa 10
 - czynników nieoznaczonych 53
- metryka 211
 - dyskretna 211
 - naturalna 212
 - pitagorejska 212
- minor bazowy 147
 - macierzy 127
 - — kwadratowej 127
- mimośród 166
- moc zbioru 20
- moduł działania 73
 - liczby zespolonej 92
- Moivre'a wzór 94, 95
- monotoniczność funkcji 45

- następnik implikacji 9
 - pary 24
- nauka aksjomatyczno-dedukcyjna 13
- negacja 9
- nieparzystość funkcji 45
- nierówność Schwarza Buniakowskiego 114
 - trójkąta 115
- niewiadome bazowe 148
 - swobodne 148
- norma 214
 - wektora 113, 214

- obraz homomorfizmu 80
- obszar domknięty 225
 - otwarty 225
- odległość płaszczyzn 181
 - prostych równoległych 183
 - prostych skośnych 183
 - punktów 181, 211
 - punktu i płaszczyzny 181
- odwrotna macierz 134
- ognisko 166
- ograniczenie zbioru 23
- okrąg 166
 - tworzący 188
 - w przestrzeni 186
- okres funkcji 44
- operator 29
- ortogonalność wektorów 113
- otoczenie punktu 221
 - kuliste 215

- para uporządkowana 24
- parabola 166
- paraboloida eliptyczna 194
 - obrotowa 191, 190
- parzystość funkcji 45
- permutacja 125
- pewnik 12

- pęk płaszczyzn 180
- pierwiastek zespolony 98
- pierwiastki równania 46
- Pitagorasa Twierdzenie 114
- płaszczyzna 172
 - Gaussa 96
 - kartezjańska 25
 - zespolona 96
 - , wektor normalny 172
- płaszczyzny pokrywające się 176
 - prostopadłe 177
 - równoległe 176
- początek układu współrzędnych 158
- podgrupa 78
- Podstawowe Twierdzenie Algebry 101
- podprzestrzeń 213
- podzbiór 16
 - właściwy 17
- pojęcie pierwotne 12
- pokrycie otwarte zbioru 221
- poprzednik implikacji 9
 - pary 24
- porządkująca relacja 29
- postać kartezjańska liczby zespolonej 91
 - kierunkowa równań prostej 175
 - krawędziowa równań prostej 174
 - odcinkowa równania płaszczyzny 173
 - ogólna równania płaszczyzny 173
 - parametryczna równań prostej 175
 - trygonometryczna 92
 - wykładnicza 95
- powierzchnia drugiego stopnia 194
 - kuli 184
 - obrotowa 191
 - prostokreślna 191
 - stożkowa 192
 - walcowa 192
- prawa deMorgana dla kwantyfikatorów 12
 - dla zdań 11
 - rachunku zdań 10
- prawo trójkąta 115
- promień wodzący 164
- prosta 175
- proste prostopadłe 178
 - przecinające się 177
 - równoległe 178
 - skośne 178
- prostopadłość płaszczyzn 177
 - prostych 178
- przeciwdziedzina funkcji 30
 - relacji 26
- przeciwobraz zbioru 30
- przedział 16
- przekrój zbiorów 17
- przekształcenie 29
 - tożsamościowe 144
- przestrzeń 17
 - dyskretna 211
 - Euklidesa 113, 116
 - Hausdorffa 221
 - kartezjańska 26, 212
 - liniowa 26
 - metryczna 211
 - skończenie wymiarowa 110
 - topologiczna 221
 - unormowana 214
 - wektorowa 26
 - , baza 111, 112
 - , wymiar 26
 - , zero 107
- punkt brzegowy 218
 - izolowany 218
 - skupienia 218
 - wewnętrzny 216
- realis 92
- reguła Laplace'a 128
 - Sarrusa 126
- reguły wnioskowania 14
- relacja 26
 - antysymetryczna 27
 - częściowo porządkująca 29
 - dwuczłonowa 26
 - lewostronnie jednoznaczna 27
 - porządkująca 29
 - prawostronnie jednoznaczna 27
 - przechodnia 27
 - równoważności 28
 - spójna 27
 - symetryczna 27
 - zwrotna 27
- relacji dziedzina 26

- przeciwdziedzina 26
- wykres 27
- rozwiązanie układu równań 144
- zerowe 151
- trywialne 151
- równania prostej 175
- równanie płaszczyzny 173
- równość zbiorów 16
- równoległość płaszczyzn 176
- prostych 177
- równoważność 9
- , relacja 28
- różnica symetryczna zbiorów 17
- różnica zbiorów 17
- rząd macierzy 132

- Sarrusa reguła 126
- schemat zdaniowy 10
- Schwarza-Buniakowskiego nierówność 114
- sfera 184
- skalar 107
- składowe wektora 157
- spirala 171
- Archimedesesa 171
- hiperboliczna 171
- logarytmiczna 171
- spójny zbiór 225
- sprężenie liczby 91
- stopień wielomianu 50, 100
- stożek eliptyczny 194
- obrotowy 190
- struktura algebraiczna 76
- suma mnogościowa zbiorów 19
- przeliczalna zbiorów 19
- zbiorów 17
- superpozycja 32
- supremum 23
- surjekcja 31
- symbol Kroneckera 115
- szerokość geograficzna punktu 164
- średnica zbioru 219

- tautologia 10
- teza 13
- topologia 221
- indukowana 221

- tożsamościowe przekształcenie 144
- tożsamość 34
- twierdzenie 12
- Heinego-Borela 224
- Kroneckera-Capellego 147
- odwrotne 13
- Pitagorasa 114
- proste 13
- przeciwne 13
- przeciwstawne 13
- , Podstawowe Twierdzenie Algebry 101
- Weierstrassa 224
- tworząca powierzchni prostokreślnych 191
- — stożkowych 192
- — walcowych 192
- stożka 190

- układ Cramera 145
- kartezjański 158
- lewoskrętny 158
- liniowo niezależny 109
- — zależny 109
- ortogonalny 115
- ortonormalny 115, 158
- prawoskrętny 158
- równań liniowych 143
- — — nieoznaczony 144, 149
- — — oznaczony 144, 149
- — — sprzeczny 144, 149
- — — zgodny 144, 149
- — jednorodnych 151
- ułamek prosty 51

- warunek konieczny 9
- konieczny i wystarczający 10
- wystarczający 9
- wartość logiczna 9
- Weierstrassa Twierdzenie 224
- wektor 107
- swobodny 28, 158
- normalny płaszczyzny 172
- zaczepiony 28
- , norma 113, 214
- , współrzędne 111
- wektory kolinearne 159

- komplanarne 160
- współliniowe 159
- współpłaszczyznowe 160
- wersory 158
- wielomian 50
- zespolony 100
- wierzchołek powierzchni stożkowych 192
- własność Hausdorffa 221
- wnętrze zbioru 216
- wniosek 15
- współczynniki wielomianu 50
- współrzędne cylindryczne 165
- kartezjańskie 158
- sferyczne 164
- walcowe 164
- wektora 111, 157
- wykres funkcji 31
- relacji 27
- wymiar przestrzeni 110
- wyznacznik 126
- wzory Cramera 145
- wzór Moivre'a 94, 95

- zależność układu 109
- założenie 13
- zaprzeczenie 9
- zasada indukcji matematycznej 15
- zawężenie funkcji 31
- zbiorów, część wspólna 17
- , iloczyn 17
- , przekrój 17
- , równoliczność 20
- , równość 16
- , różnica 17
- , — symetryczna 17
- , suma 17
- , — mnogościowa 19
- , — przeliczalna 19
- zbiór 16
- domknięty 218
- liczb rzeczywistych 23
- mocy alef zero 21
- — continuum 22
- nieskończony 20
- ograniczony 23, 219
- otwarty 217
- przeliczalny 21
- rozwiązań układu równań 144
- skończony 20
- spójny 225
- , domknięcie 218
- , dopełnienie 17
- , gęstość 24
- , kresy 23
- , liczebność 20
- , moc 20
- , pokrycie otwarte 221
- , średnica 219
- zdanie 9
- złożone 9
- zero ciała 82
- , przestrzeni 107
- złożenie odwzorowań, funkcji 32
- zmienna zdaniowa 9