

45.944
J. Słupecki, L. Borkowski

ELEMENTY

LOGIKI

MATEMATYCZNEJ

i TEORII

MNOGOŚCI

Pw

Ze względów dydaktycznych nie przedstawiliśmy podanych w części II wiadomości z teorii mnogości ani w ujęciu aksjomatycznym, ani w opartym na teorii typów. W „Dodatku” jednak omówione są dość szczegółowo oba te ujęcia, z zaznaczeniem ich powiązań i różnic.

Podręcznik niniejszy przeznaczony jest dla studentów filozofii. Jak się zdaje, znajomość zawartego w tym podręczniku materiału z teorii mnogości jest konieczna dla takiego czytelnika. Szczególnie istotne jest to dla studentów specjalizujących się w logice. Istnieje zresztą ścisły związek między logiką a teorią mnogości, toteż bardziej obszernie podręczniki logiki matematycznej zawierają zwykle rozdziały poświęcone teorii mnogości.

Mamy również nadzieję, że podręcznik ten okaże się pożyteczny dla studentów matematyki pragnących zaznajomić się z elementami logiki matematycznej i teorii mnogości w stosunkowo łatwym ujęciu.

Po przerobieniu tego podręcznika czytelnik będzie mógł przystąpić do lektury prac specjalistycznych i obszerniejszych podręczników. Obszerniejsze ujęcie logiki matematycznej znaleźć można w monografii A. Mostowskiego *Logika matematyczna* i w *Zarysie logiki* A. Grzegorczyka, teorii mnogości zaś — w wymienionych powyżej książkach Sierpińskiego oraz Kuratowskiego i Mostowskiego.

Na zakończenie składamy serdeczne podziękowanie Panu Docentowi Witoldowi Pogorzelskiemu za liczne i cenne uwagi, których udzielił nam przy ostatecznej redakcji podręcznika. Dziękujemy też serdecznie Panu Profesorowi Klemensowi Szaniawskiemu, którego uwagom zawartym w recenzji podręcznik zawdzięcza pewne uzupełnienia.

JERZY ŚLUPECKI
LUDWIK BORKOWSKI

Część pierwsza PODSTAWOWE RACHUNKI LOGICZNE

Rozdział I RACHUNEK ZDAŃ

§ 1. SYMBOLE I WYRAŻENIA

Wyrażenia rachunku zdań zbudowane są z symboli następujących rodzajów:

- 1) zmiennych zdaniowych, 2) stałych, 3) nawiasów.

Jako zmiennych zdaniowych będziemy używać liter:

$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$$

Stosując w jakimś konkretnym rozumowaniu wzory rachunku zdań możemy podstawiać za te zmienne dowolne zdania. Należy przy tym zaznaczyć, że termin „zdanie” w tym sensie, w jakim używamy go w podstawowych działach logiki oznacza te i tylko te wyrażenia, które są prawdziwe lub fałszywe. Zdaniem w tym sensie nie są więc ani zdania pytające, ani zdania rozkazujące — o których mowa jest w gramatyce — lecz tylko zdania orzekające.

Stałe rachunku zdań są spójnikami, przy których pomocy ze zdań składowych tworzymy zdania złożone. Najczęściej używanymi spójnikami tego rodzaju są wyrazy:

nie, i, lub, jeśli... to, wtedy i tylko wtedy, gdy

Zamiast tych wyrazów będziemy używać jako stałych rachunku zdań symboli:

$$(1) \quad \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$$

Znak „ $\sim$ ” nazywamy znakiem negacji; wyrażenie „ $\sim p$ ” czytamy: nie p (lub też: nie jest tak, że p ; lub też: nieprawda, że p). Znaki: $\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$ nazywamy odpowiednio: znakiem koniunkcji (iloczynu logicznego), alternatywy (sumy logicznej), implikacji, równoważności.

Wyrażenie „ $p \wedge q$ ” czytamy: p i q ;

„ $p \vee q$ ” „ p lub q ;

„ $p \rightarrow q$ ” „jeśli p , to q ;

„ $p \equiv q$ ” „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”

Zdania złożone utworzone z danego zdania (czy też z danych zdań) przy pomocy znaków (1) nazywamy odpowiednio: negacją, koniunkcją, alternatywą, implikacją (lub okresem warunkowym), równoważnością danych zdań.

Zdania składowe, z których utworzone jest zdanie złożone, nazywamy jego członami. Człony koniunkcji nazywamy często czynnikami, członów alternatywy — składnikami. Pierwszy człon implikacji nazywamy jej poprzednikiem, a drugi — następnikiem.

Stałe rachunku zdań należą do tych wyrazów, które są przydatne i potrzebne przy formułowaniu twierdzeń w każdej dziedzinie wiedzy. Dzięki tej okoliczności oraz dzięki temu, że za zmienne zdaniowe można podstawiać dowolne zdania, prawa i reguły rachunku zdań stosowane być mogą w każdej nauce, jak też w rozumowaniach potocznych.

Stałe rachunku zdań zaliczamy do wyrażeń zwanych funktorami. Funktory są wyrażeniami, które wraz z pewnymi wyrażeniami składowymi, zwanymi ich argumentami, tworzą wyrażenia złożone poprawnie zbudowane. Stałe rachunku zdań zaliczamy do funktorów zdaniotwórczych o argumentach zdaniowych, gdyż wraz ze zdaniem składowymi tworzą nowe zdania. Funktor negacji jest funktorem jednoargumentowym, znak ten bowiem wraz z jednym zdaniem tworzy zdanie złożone; funktory: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ są funktorami dwuargumentowymi, gdyż łączą dwa zdania w nowe zdanie złożone. W rachunku zdań występować mogą tylko funktory zdaniotwórcze o argumentach zdaniowych. Funktory, które wymieniliśmy, są najważniejszymi, lecz nie jedynymi funktorami tego rachunku.

Wyrażeniami zdaniowymi rachunku zdań są zmienne zdaniowe oraz wyrażenia złożone utworzone z nich przy pomocy funktorów rachunku zdań. Dokładniej pojęcie wyrażenia zdaniowego (rachunku zdań) możemy określić przy pomocy następującej definicji, złożonej z trzech warunków*:

- 1) Zmienne zdaniowe są wyrażeniami zdaniowymi;
- 2) Jeśli ϕ i ψ są wyrażeniami zdaniowymi, to $\sim(\phi)$, $(\phi) \wedge (\psi)$, $(\phi) \vee (\psi)$, $(\phi) \rightarrow (\psi)$, $(\phi) \equiv (\psi)$ są wyrażeniami zdaniowymi;
- 3) Każde wyrażenie zdaniowe rachunku zdań bądź jest zmienną zdaniową, bądź też jest utworzone ze zmiennych zdaniowych przez jedno- lub wielokrotne stosowanie reguły 2).

Litery greckie „ ϕ “, „ ψ “, „ χ “ są użyte tutaj jako zmienne, za które można podstawiać nazwy dowolnych wyrażeń rachunku zdań, podczas gdy za zmienne zdaniowe „ p “, „ q “ itd. można podstawiać w obrębie rachunku zdań dowolne wyrażenia zdaniowe tego rachunku. Zestawienia symboli: $\sim\phi$, $\phi \wedge \psi$ itp., oznaczają odpowiednio: wyrażenie złożone zbudowane ze znaku negacji i następującego po nim wyrażenia ϕ , wyrażenie zbudowane z wyrażenia ϕ , znaku koniunkcji i wyrażenia ψ (następujących po sobie kolejno) itp. Zmienne „ ϕ “, „ ψ “, „ χ “, jak też złożone wyrażenia, takie jak np. „ $\sim\phi$ “, „ $\phi \wedge \psi$ “, nie należą do symboli i wyrażeń rachunku zdań, lecz do symboli i wyrażeń systemu, w którym mówimy o rachunku zdań i o jego wyrażeniach. System taki nazy-

wamy metasystemem rachunku zdań. Do metasystemu należą też nazwy określonych symboli i wyrażeń systemu. Jak już czytelnik mógł zauważyć, nazwy te tworzymy ujmując nazywane wyrażenia w cudzysłów. Cudzysłowy tego rodzaju będziemy nieraz pomijać w tych wypadkach, gdy nazwa cudzy-słowna symbolu lub wyrażenia systemu poprzedzona jest jednym z wyrazów: symbol, znak, funktor, zmienna, wyrażenie itp.

A więc np.:

zamiast: symbol (znak, funktor) „ $\sim$ “ — możemy napisać: symbol (znak, funktor) $\sim$;

zamiast: zmienna „ p “ — możemy napisać: zmienna p ;

zamiast: wyrażenie „ $p \rightarrow q$ “ — możemy napisać: wyrażenie $p \rightarrow q$.

Według warunku 2) wyrażenia złożone tworzymy przy pomocy funktorów rachunku zdań ujmując ich argumenty w nawiasy. Wprowadzenie nawiasów zapewnia jednoznaczny sposób odczytywania wyrażeń złożonych. Dla uniknięcia zbyt dużej ilości nawiasów przyjmujemy, że w wyrażeniach złożonych można opuszczać nawiasy obejmujące poszczególne zmienne.

A więc zamiast: $\sim(p)$ piszemy: $\sim p$;

zamiast: $(p) \wedge (q)$ piszemy: $p \wedge q$ itp.

Przyjmujemy też, że zamiast wyrażeń $(\sim\phi) \wedge \psi$ i $\psi \wedge (\sim\phi)$ wolno pisać odpowiednio wyrażenia $\sim\phi \wedge \psi$ i $\psi \wedge \sim\phi$.

Przyjmujemy również analogiczną umowę dla wyrażeń zawierających znak $\sim$ i jeden ze znaków $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$.

Przyjmujemy dalej, że znak koniunkcji wiąże mocniej niż znak alternatywy, tzn. że w wyrażeniach $(\phi \wedge \psi) \vee \chi$ i $\chi \vee (\phi \wedge \psi)$ wolno opuszczać zaznaczone nawiasy. Umowa ta jest analogiczna do umowy przyjętej w arytmetyce, w myśl której w wyrażeniu $a + (b \cdot c)$ nawiasy są zbędne. Przyjmujemy też, że znak $\vee$ wiąże mocniej niż znak $\rightarrow$, ten zaś mocniej niż znak $\equiv$.

A więc zamiast wyrażenia $(\phi \vee \psi) \rightarrow \chi$ piszemy wyrażenie $\phi \vee \psi \rightarrow \chi$;

„ „ $(\phi \rightarrow \psi) \equiv \chi$ „ „ $\phi \rightarrow \psi \equiv \chi$;

„ „ $\phi \equiv (\psi \wedge \chi)$ „ „ $\phi \equiv \psi \wedge \chi$ itp.

Z podanej powyżej definicji wynika, że każde wyrażenie zdaniowe rachunku zdań składa się ze skończonej liczby symboli. Własność tę posiadają bowiem najprostsze wyrażenia zdaniowe rachunku zdań, tj. zmienne zdaniowe, i własność ta przysługuje wyrażeniom złożonym utworzonym według reguły 2) z wyrażeń posiadających tę własność.

Ćwiczenia

1. Zanotować następujące wyrażenia bez zbędnych nawiasów:

$$[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge r)$$

$$[(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)] = (p = s)$$

$$\{[(p = q) \rightarrow r] \wedge s\} = (p \wedge \sim s)$$

* Por. niżej, str. 122.

2. Logik polski Jan Łukasiewicz wprowadził beznawiasową symbolikę rachunku zdań (zwaną w literaturze logicznej symboliką Łukasiewicza lub symboliką polską). W symbolice tej piszemy najpierw funktory rachunku zdań, a potem kolejne ich argumenty, używając przy tym liter: N, K, A, C, E odpowiednio jako znaków: negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności. Np. zamiast „ $p \wedge q$ ” piszemy w tej symbolice „ Kpq ”, zamiast „ $p \wedge q \rightarrow r$ ” piszemy „ $CKpqr$ ” itp.

3. Zanotować w symbolice, wprowadzonej w tym podręczniku następujące wyrażenia, zapisane w symbolice Łukasiewicza:

$$NCKpqArs$$

$$ECpqOqp$$

$$NNOpOqp$$

4. Zapisać przy pomocy symboliki wprowadzonej w tym podręczniku wyrażenia:

$$\text{Jeśli } p \text{ i } q, \text{ to } r$$

$$\text{Jeśli } p, \text{ to jeśli } q, \text{ to } r$$

$$\text{Jeśli } p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q, \text{ to jeśli } p, \text{ to } q$$

5. Zapisać przy pomocy wprowadzonej tu symboliki różne interpretacje wyrażień:

$$\text{Jeśli } p \text{ i } q \text{ lub } r, \text{ to } s$$

$$\text{Jeśli } p \text{ i } q \text{ lub } r \text{ i } s, \text{ to } q \text{ lub } s$$

§ 2. REGUŁY PIERWOTNE

Istnieją dwie metody budowania rachunku zdań: metoda aksjomatyczna i metoda założeniowa. O metodzie aksjomatycznej mowa będzie w § 6. System jednak, który zbudujemy szczegółowo, będzie systemem założeniowym. Systemy takie są bowiem bliższe potocznym intuicjom pod tym względem, że dowody przeprowadzane na ich gruncie nie różnią się prawie od dowodów matematycznych i rozumowań innych nauk. Tym też zaletom systemy założeniowe zawdzięczają nazwę dedukcji naturalnej, którą są niekiedy oznaczane.

Pierwsze systemy założeniowe ukazały się w latach 1934, 1935. Twórcami ich byli Jaśkowski i Gentzen. System, który tu przedstawimy, różni się od tych systemów kilkoma szczegółami.

Aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie pojęć, które poniżej wprowadzimy, rozpatrzmy dwa przykłady dowodów.

Przykład 1. W przykładzie tym zakładamy, że zmienne przebiegają zbiór liczb całkowitych.

Twierdzenie dowodzone ma postać:

Jeśli a_1, a_2 są podzielne przez b , to $a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$ jest podzielne przez b .

Dowód przebiega w następujący sposób:

Przyjmujemy jako założenie twierdzenia, że

$$(1) \quad a_1, a_2 \text{ są podzielne przez } b$$

Z (1) wynika na podstawie definicji podzielności *, że istnieją takie liczby całkowite m_1, m_2 , że

$$(2) \quad a_1 = m_1 \cdot b$$

$$a_2 = m_2 \cdot b$$

Z (2) wynika, że

$$(3) \quad a_1 \cdot c_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot b$$

$$a_2 \cdot c_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot b$$

Z (3) wynika, że

$$(4) \quad a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot b$$

Stąd zaś wynika na podstawie definicji podzielności, że

$$a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 \text{ jest podzielne przez } b$$

Przykład 2. Również i w tym przykładzie zakładamy, że zmienne przebiegają zbiór liczb całkowitych. Zakładamy też, że n jest liczbą pierwszą.

Twierdzenie dowodzone:

$$\text{Jeśli } n \text{ dzieli } a \cdot a, \text{ to } n \text{ dzieli } a$$

Dow. Przyjmujemy jako założenie twierdzenia, że

$$(1) \quad n \text{ dzieli } a \cdot a$$

Przyjmujemy ponadto jako założenie dowodu nie wprost, że

$$(2) \quad n \text{ nie dzieli } a$$

Na podstawie prawa

$$(3) \quad \text{Jeśli } n \text{ dzieli } a \cdot b \text{ i } n \text{ nie dzieli } a, \text{ to } n \text{ dzieli } b$$

otrzymujemy

$$(4) \quad \text{Jeśli } n \text{ dzieli } a \cdot a \text{ i } n \text{ nie dzieli } a, \text{ to } n \text{ dzieli } a$$

Z (1) i (2) wynika

$$(5) \quad n \text{ dzieli } a \cdot a \text{ i } n \text{ nie dzieli } a$$

Z (4) i (5) wynika, że

$$(6) \quad n \text{ dzieli } a$$

To ostatnie zdanie jest jednak sprzeczne ze zdaniem (2).

Stwierdzając tę sprzeczność uważamy, że dowód nie wprost danego twierdzenia został zakończony.

* Przypominamy czytelnikowi tę definicję: a jest podzielne przez b wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita m , że $a = m \cdot b$.

Traktując te dowody jako typowe przykłady możemy sformułować reguły określające ich budowę. Oba dowodzone twierdzenia są okresami warunkowymi. Dowody ich są pewnymi ciągami zdań (wzorów), które nazywamy wierszami tych dowodów. Różnią się jednak te dowody swą budową. W przykładzie pierwszym przyjmujemy poprzednik dowodzonej tezy jako założenie twierdzenia. Z tego założenia wyprowadzamy wnioski, odwołując się do znanych twierdzeń. Dowód uważamy za zakończony, gdy otrzymamy następnik dowodzonego twierdzenia. W przykładzie drugim przyjmujemy poprzednik dowodzonego twierdzenia jako założenie dowodu nie wprost wyprowadzamy z obu tych założeń dalsze wnioski. Dowód uważamy za zakończony, gdy otrzymamy dwa zdania sprzeczne.

Reguły określające budowę każdego z takich dowodów nazywać będziemy regułami tworzenia dowodu. Analizując podane dowody można oprócz tych reguł odróżnić jeszcze reguły innego rodzaju, według których postępujemy przeprowadzając te dowody. Np. przechodząc w dowodzie drugim od wierszy (4) i (5) do wiersza (6) postępujemy według reguły, która z okresu warunkowego i jego poprzednika pozwala wyprowadzić jako wniosek jego następnik. Wiersz (5) tegoż dowodu otrzymujemy z wierszy (1) i (2) według reguły, która z dwóch zdań pozwala wyprowadzić ich koniunkcję. Reguły tego rodzaju nazywać będziemy regułami dołączania nowych wierszy do dowodu. Reguły te stwierdzają, w jakich warunkach można do dowodu dołączyć wyrażenia określonego rodzaju, wynikające z wyrażen, które już w dowodzie występują.

Zarówno wśród reguł tworzenia dowodu, jak i wśród reguł dołączania nowych wierszy do dowodu odróżniamy reguły pierwotne i reguły wtórne. Reguły pierwotne przyjmujemy bez dowodu, starając się dobierać je w ten sposób, by były jak najbardziej intuicyjne. Reguły wtórne dowodzone są przy pomocy reguł pierwotnych i twierdzeń, które dają się udowodnić według reguł pierwotnych. Celem reguł wtórnych jest skracanie dowodów. Teoretycznie jednak reguły te są zbędne: każda teza udowodniona przy pomocy reguł wtórnych da się udowodnić wyłącznie przy pomocy reguł pierwotnych.

W rachunku zdań przyjmujemy następujące reguły pierwotne dołączania nowych wierszy do dowodu na podstawie wierszy dotychczasowych:

1) Reguła odrywania:

Reguła ta stwierdza, że jeśli do dowodu należy implikacja i jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

Regułę odrywania, którą będziemy oznaczać skrótowo: RO, zapisujemy w postaci następującego schematu, złożonego z dwu części (górnej i dolnej) oddzielonych kreską poziomą:

RO

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi} \quad \psi$$

Tak zapisana reguła stwierdza, że do dowodu wolno dołączyć wyrażenie ψ jako nowy wiersz dowodu, jeśli do dowodu należy już wyrażenie $\phi \rightarrow \psi$ i wyrażenie ϕ (jeśli wyrażenia $\phi \rightarrow \psi$ i ϕ stanowią któreś z dotychczasowych wierszy dowodu), bez względu na kolejność, w jakiej wyrażenia te występują w dowodzie.

Również pozostałe reguły dołączania nowych wierszy do dowodu będziemy zapisywać w postaci analogicznych schematów.

Regułę odrywania stosujemy np. w następującym wnioskowaniu:

Jeśli suma cyfr liczby 30 612 jest podzielna przez 3,
to liczba 30 612 jest podzielna przez 3

$$\frac{\text{Suma cyfr liczby 30 612 jest podzielna przez 3}}{\text{Liczba 30 612 jest podzielna przez 3}}$$

2) Reguła dołączania koniunkcji:

$$\text{DK} \quad \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

Reguła dołączania koniunkcji stwierdza, że do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

Przykład wnioskowania według reguły dołączania koniunkcji:

$$\frac{a < x \quad x < b}{a < x \wedge x < b}$$

(czyli w skrócie: $a < x < b$).

3) Reguła opuszczania koniunkcji:

$$\text{OK} \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

Reguła opuszczania koniunkcji stwierdza, że jeśli do dowodu należy koniunkcja, to do dowodu wolno dołączyć dowolny człon tej koniunkcji.

Regułę OK można też zapisać w postaci jednego schematu:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \quad \psi$$

Ogólnie, reguła o schemacie:

$$\frac{\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n}{\psi_1 \quad \dots \quad \psi_k}$$

stwierdza, że jeśli do dowodu należą wyrażenia $\phi_1, \dots, \phi_n$, to do dowodu wolno dołączyć każde z wyrażeń $\psi_1, \dots, \psi_k$.

Przykład wnioskowania według reguły opuszczania koniunkcji:

$$\frac{a < x \wedge x < b}{a < x} \quad (\text{czyli: } a < x < b) \quad \frac{a < x \wedge x < b}{x < b}$$

4) Reguła dołączania alternatywy:

$$\text{DA} \quad \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

Reguła dołączania alternatywy stwierdza, że do dowodu wolno dołączyć alternatywę, jeśli jakiś człon tej alternatywy należy już do dowodu.

Przykład wnioskowania według reguły dołączania alternatywy:

$$\frac{a > 0}{a > 0 \vee a = 0} \quad (\text{czyli: } a \geq 0) \quad \frac{a = 0}{a > 0 \vee a = 0}$$

5) Reguła opuszczania alternatywy:

$$\text{OA} \quad \frac{\phi \vee \psi}{\sim \phi} \quad \frac{\sim \phi}{\psi}$$

Reguła opuszczania alternatywy stwierdza, że jeśli do dowodu należy alternatywa i negacja pierwszego jej członu, to do dowodu wolno dołączyć drugi człon tej alternatywy.

Przykład wnioskowania według reguły opuszczania alternatywy:

$$\frac{a > 0 \vee a = 0}{\sim a > 0} \quad \frac{\sim a > 0}{a = 0}$$

6) Reguła dołączania równoważności:

$$\text{DE} \quad \frac{\phi \rightarrow \psi}{\psi \rightarrow \phi} \quad \frac{\psi \rightarrow \phi}{\phi \equiv \psi}$$

Reguła dołączania równoważności stwierdza, że do dowodu wolno dołączyć równoważność $\phi \equiv \psi$, o ile do dowodu należy implikacja $\phi \rightarrow \psi$ i odwrotna względem niej implikacja $\psi \rightarrow \phi$ (powstająca z niej przez przestawienie poprzednika z następnikiem).

Przykład wnioskowania według reguły dołączania równoważności:

Jeżeli boki a, b trójkąta są równe, to kąty leżące naprzeciw boków a, b są równe
Jeżeli kąty leżące naprzeciw boków a, b są równe, to boki a, b trójkąta są równe
Boki a, b trójkąta są równe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty leżące naprzeciw boków a, b są równe

7. Reguła opuszczania równoważności:

$$\text{OE} \quad \frac{\phi \equiv \psi}{\phi \rightarrow \psi} \quad \frac{\phi \equiv \psi}{\psi \rightarrow \phi}$$

Reguła opuszczania równoważności stwierdza, że jeśli do dowodu należy równoważność, to do dowodu wolno dołączyć zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak też implikację odwrotną względem pierwszej implikacji. Tę pierwszą implikację będziemy nazywać implikacją prostą.

Przykład wnioskowania według reguły opuszczania równoważności:

$$\frac{\sim x \geq y \equiv y > x}{\sim x \geq y \rightarrow y > x} \quad \frac{\sim x \geq y \equiv y > x}{y > x \rightarrow \sim x \geq y}$$

Aby ułatwić zapamiętanie tych reguł, zwracamy uwagę na to, że dla implikacji mamy tylko jedną regułę pierwotną, mianowicie regułę odrywania; dla każdego zaś z pozostałych funktorów dwuargumentowych mamy dwie reguły: regułę dołączania i regułę opuszczania. Ponadto przy regule dołączania odpowiednia stała występuje w dolnej części schematu, a nie występuje w górnej; przy regule opuszczania dana stała występuje w górnej części schematu, a nie występuje w dolnej.

Wymienione tutaj reguły pierwotne dołączania nowych wierszy do dowodu są całkowicie oczywiste na gruncie podanego w § 1 znaczenia funktorów: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$. Wyrażenia dołączane według tych reguł wynikają z wyrażeń, na których podstawie je dołączamy. Np. z koniunkcji wynika każdy z jej członów, z implikacji i jej poprzednika wynika jej następnik itp.

Reguły te były na ogół od dawna znane i formułowane w logice. Np. reguła odrywania została sformułowana już przez stoików (III w. przed Chr.), jako jedna z pierwotnych („niedowodliwych“) reguł zbudowanego przez nich — po raz pierwszy w historii logiki — systemu rachunku zdań*. Reguła ta była znana pod nazwą „modus ponens“ (lub dokładniej „modus ponendo ponens“). U stoików występuje również reguła opuszczania alternatywy, formułowana

* Podane w tym podręczniku wzmianki historyczne zaczerpnięliśmy głównie z prac: I. M. Bocheński *Formale Logik*. 1956; I. M. Bocheński *Ancient Formal Logic*. 1951; T. Kotarbiński *Wykłady z dziejów logiki*. 1957; J. Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*. 1934; E. A. Moody *Truth and Consequence in Mediaeval Logic*. 1953.

jednak dla alternatywy wykluczającej *, dla której nie jest ważna reguła dołączania alternatywy. Reguła opuszczania alternatywy znana była pod nazwą „modus tollendo ponens”. Reguła dołączania alternatywy występuje u logików XIII i XIV wieku (Robert Kildwarby, Albert Saksończyk, Jan Buri-dan), u których też sformułowana jest reguła opuszczania alternatywy nie-dan), u których też sformułowana jest reguła dołączania alternatywy wykluczającej. Np. Robert Kildwarby (XIII w.) formułuje regułę dołączania alternatywy jako regułę stwierdzającą, że alternatywa ** wynika z każdego ze swych członów. Podaje też następujący przykład wnioskowania według tej reguły: siedzisz, a więc siedzisz lub nie siedzisz.

U Alberta Saksończyka sformułowana jest też reguła opuszczania koniunkcji („dowolny człon koniunkcji wynika z koniunkcji, której jest członem”). Do-lączenie koniunkcji znane było już stoikom, którzy stwierdzają, że koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe.

Chociaż pewne prawa dla równoważności formułuje już Boecjusz, żyjący na przełomie V i VI wieku, to jednak wydaje się, że reguły dołączania i opusz-czania równoważności, ustalające związek między równoważnością i implikacją, pochodzą dopiero z nowszych czasów.

Wśród reguł tworzenia dowodu założeniowego wyróżniamy regułę tworze-nia założeniowego dowodu wprost i regułę tworzenia założeniowego dowodu nie wprost.

Sposób tworzenia założeniowego dowodu wprost omówimy najpierw na przykładzie dowodu prawa sylogizmu hipotetycznego (warunkowego):

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

Dowód tej tezy zaczynamy od wypisania założeń twierdzenia. Pierwszym założeniem jest poprzednik całej tej implikacji, tj. wyrażenie $p \rightarrow q$. Drugim założeniem jest poprzednik pozostałej części wyrażenia (powstającej z całego wyrażenia przez skreślenie pierwszego założenia i następującego bezpośrednio po nim znaku implikacji), tj. wyrażenie $q \rightarrow r$. Trzecim założeniem jest po-przednik pozostałej części wyrażenia (powstającej przez skreślenie poprzednich założeń i następujących bezpośrednio po nich znaków implikacji), tj. wyrażenie p . Na tym kończymy wypisywanie założeń, gdyż pozostała część wyra-żenia nie jest już implikacją. Po wypisaniu założeń twierdzenia kontynuujemy dowód dążąc do tego, by otrzymać jako ostatni wiersz dowodu wyrażenie otrzymane po skreśleniu założeń i następujących bezpośrednio po nich znaków implikacji, tj. w naszym przykładzie — wyrażenie r . Przy tym możemy do dowodu dołączyć nowe wiersze na podstawie wierszy dotychczasowych według podanych powyżej reguł pierwotnych dołączania nowych wierszy do dowodu. Po prawej stronie każdego wiersza uzyskanego w ten sposób zaznaczamy, na podstawie

* Por. niżej § 4, str. 48. Alternatywę, dla której sformułowana została reguła DA i re-guła OA, nazywamy też alternatywą niewykluczającą.

** Dla oznaczania alternatywy używano wtedy terminu „dysjunkcja”.

jakich reguł i wierszy został on uzyskany. Otrzymujemy w ten sposób nastę-pujący dowód tezy:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

Dow. (1)	$p \rightarrow q$	
(2)	$q \rightarrow r$	
(3)	p	{założenia}
(4)	q	{RO: 1; 3}
	r	{RO: 2; 4}

Ogólnie, założeniowy dowód wprost wyrażenia

$$(I) \quad \phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow [\phi_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots]\}$$

tworzymy w następujący sposób:

1. W $n-1$ pierwszych wierszach wypisujemy kolejno wyrażenia $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ jako założenia twierdzenia.
2. Do dowodu można dołączyć:
 - a) twierdzenia poprzednio udowodnione, jako nowe wiersze;
 - b) nowe wiersze na podstawie wierszy dotychczasowych według reguł RO, DK, OK, DA, OA, DE, OE.
3. Dowód jest zakończony, jeśli w ostatnim jego wierszu występuje wyra-żenie ϕ_n . Ostatniego wiersza dowodu nie numerujemy, zaznaczając w ten sposób, że dowód jest zakończony.

Jeśli dowodzone twierdzenie nie ma postaci implikacji, to w dowodzie nie wystąpią założenia. Dowód rozpoczynamy wtedy od wypisania jednego lub większej ilości twierdzeń poprzednio udowodnionych, do czego upoważnia punkt 2a) opisu dowodu wprost. W przypadku tym wszystkie wiersze dowodu będą twierdzeniami. Dowód tego rodzaju nazywamy zwykłym dowodem wprost. Przykładem takiego dowodu jest dowód tezy T2b następnego paragrafu. Nie wykluczamy więc, że wyrażenie (I) może mieć postać ϕ_1 , czyli że n może być równe 1.

Sposób tworzenia założeniowego dowodu nie wprost omówimy najpierw na przykładzie dowodu jednego z praw transpozycji:

$$(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$$

Podobnie jak w przypadku dowodu wprost, zaczynamy założeniowy dowód nie wprost od wypisania założeń twierdzenia, którymi są w naszym przykła-dzie wyrażenia: $\sim p \rightarrow q, \sim q$. Następnie wypisujemy negację pozostałej części wyrażenia (otrzymanej przez skreślenie założeń twierdzenia i odpo-wiednich znaków implikacji) jako założenie dowodu nie wprost. W naszym przykładzie założeniem dowodu nie wprost jest wyrażenie $\sim p$. Kontynuujemy dowód dołączając nowe wiersze na podstawie przyjętych reguł, przy czym

dążymy do tego, by otrzymać dwa wiersze sprzeczne, tzn. wiersze o postaci ψ i $\sim\psi$. Otrzymujemy w ten sposób następujący dowód tezy:

$$(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$$

Dow. (1) $\sim p \rightarrow q$	{założenia}
(2) $\sim q$	
(3) $\sim p$	{założenie dowodu nie wprost}
(4) q	{RO: 1; 3}
sprzeczność	{2; 4}

Ogólnie, założeniowy dowód nie wprost wyrażenia (I) tworzymy w następujący sposób:

1. a) W $n-1$ pierwszych wierszach wypisujemy kolejno wyrażenia $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ jako założenia twierdzenia;
b) w n -tym wierszu wypisujemy wyrażenie $\sim\phi_n$ jako założenie dowodu nie wprost.
2. Do dowodu można dołączyć:
 - a) twierdzenia poprzednio udowodnione, jako nowe wiersze;
 - b) nowe wiersze na podstawie wierszy dotychczasowych według reguł RO, DK, OK, DA, OA, DE, OE.
3. Dowód jest zakończony, jeśli występują w nim dwa wiersze sprzeczne. Zakończenie dowodu zaznaczamy pisząc w ostatnim (nienumerowanym) wierszu „sprz.” (jako skrót wyrazu „sprzeczność”) i podając po prawej stronie numery dwóch wierszy sprzecznych.

Założenia twierdzenia i założenie dowodu nie wprost będziemy nazywać założeniami dowodu.

Jeśli dowodzone twierdzenie nie jest implikacją, to na początku dowodu wystąpi założenie dowodu nie wprost, będące w tym przypadku negacją dowodzonego twierdzenia. Dowód nazywamy wówczas zwykłym dowodem nie wprost. Przykładem takiego dowodu jest dowód tezy T22 następnego paragrafu. Podobnie jak w uwadze dotyczącej dowodu wprost, nie wykluczamy, że wyrażenie (I) może mieć postać ϕ_1 .

Łatwo zauważyć, że każdy założeniowy dowód wprost wyrażenia (I) daje się przekształcić w założeniowy dowód nie wprost tego wyrażenia. Wystarczy w tym celu po $n-1$ -ym wierszu wstawić wyrażenie $\sim\phi_n$. Wówczas ten wstawiony wiersz i ostatni wiersz założeniowy dowodu wprost wyrażenia (I), a mianowicie wyrażenie ϕ_n , tworzą dwa wiersze sprzeczne, których wystąpienie kończy założeniowy dowód nie wprost. Wynika stąd, że jako jedyną regułę pierwotną tworzenia dowodu wystarczy przyjąć regułę tworzenia założeniowego dowodu nie wprost. Reguła tworzenia założeniowego dowodu wprost jest bowiem ze względu na nią regułą wtórną (ogólnie mówimy, że reguła R_1 tworzenia dowodu jest wtórna ze względu na regułę R_2 tworzenia dowodu oraz tezy T lub reguły R wtedy i tylko wtedy, gdy ilekroć istnieje dowód jakiegoś

twierdzenia zbudowany według reguły R_1 , to istnieje dowód tego twierdzenia zbudowany według reguły R_2 , w którym korzystamy z tez T lub reguł R). Przy dowodach tez i reguł rachunku zdań (jak również i rachunku kwantyfikatorów, podanego w rozdziale II) nie będziemy jednak ograniczać się tylko do reguł pierwotnych, ale będziemy też stosować pewne reguły wtórne, pozwalające na skrócenie niektórych dowodów.

Dowody założeniowe stosowane były od dawna w logice i matematyce. Już u twórcy logiki, Arystotelesa (384-322), znajdujemy przykłady założeniowych dowodów wprost i nie wprost. Rozpatrzmy przykładowo następujące dowody, które znajdujemy w tekstach Arystotelesa.

Przykład 1. „Jeśli M nie przysługuje żadnemu N^* , a przysługuje pewnemu X , to z konieczności N nie przysługuje pewnemu X . Ponieważ bowiem przesłanka przecząca daje się odwrócić, N nie będzie przysługiwać żadnemu M ; zostało jednak przyjęte, że M przysługuje pewnemu X ; a więc N nie będzie przysługiwać pewnemu X . Uzyskujemy mianowicie wniosek według figury pierwszej”.

Dowodzi tu Arystoteles trybu sylogistycznego figury drugiej (zwanego trybem *Festino*):

Jeśli żadne N nie jest M i pewne X jest M , to pewne X nie jest N .

Dowód przeprowadza Arystoteles w następujący sposób: przyjmuje jako założenia (przesłanki) oba człony koniunkcji stanowiącej poprzednik tego trybu. Z pierwszej przesłanki na podstawie prawa konwersji zdania ogólnoprzeczącego (tj. prawa: Jeśli żadne N nie jest M , to żadne M nie jest N) wyprowadza zdanie: żadne M nie jest N . Z tego zaś zdania oraz drugiej przesłanki wyprowadza jako wniosek następnik dowodzonego twierdzenia: pewne X nie jest N — na podstawie trybu figury pierwszej (zwanego trybem *Ferio*): Jeśli żadne M nie jest N i pewne X jest M , to pewne X nie jest N . Mamy tu więc przykład założeniowego dowodu wprost. Podobnie i inne dowody trybów figury drugiej i trzeciej na podstawie trybów figury pierwszej, zwane dowodami przez konwersję, są założeniowymi dowodami wprost.

Przykład 2. „Jeśli M przysługuje każdemu N^{**} , a nie przysługuje pewnemu X , to z konieczności N nie przysługuje pewnemu X ; jeśli bowiem N przysługuje każdemu X , M zaś jest orzeczone o wszystkich N , M musi przysługiwać każdemu X ; zostało jednak przyjęte, że M nie przysługuje pewnemu X ”.

Dowodzi tu Arystoteles trybu figury drugiej (zwanego trybem *Baroco*):

Jeśli każde N jest M i pewne X nie jest M , to pewne X nie jest N .

* Formułując tryby sylogistyczne używa Arystoteles wyrażenia „ M nie przysługuje żadnemu N ” zamiast wyrażenia „żadne N nie jest M ”; zamiast wyrażenia „pewne X jest M ” używa wyrażenia „ M przysługuje pewnemu X ”, zamiast wyrażenia „pewne X nie jest N ” używa wyrażenia „ N nie przysługuje pewnemu X ”.

** Zamiast wyrażenia „każde N jest M ” używa Arystoteles również wyrażenia „ M przysługiwać każdemu N ” lub wyrażenia „ M jest orzeczone o wszystkich N ”.

Dowód przeprowadza w następujący sposób: przyjmuje obie przesłanki tego trybu (jako założenia twierdzenia) oraz zdanie sprzeczne z jego następnikiem (jako założenie dowodu nie wprost), mianowicie zdanie „każde X jest N ”. Z tego zdania oraz pierwszej przesłanki wyprowadza zdanie „każde X jest M ” — na podstawie trybu figury pierwszej zwanego trybem *Barbara*:

Jeśli każde X jest N i każde N jest M , to każde X jest M .

Zdanie jednak otrzymane w ten sposób jest sprzeczne z drugą przesłanką. Dowód kończy się stwierdzeniem tej sprzeczności. Jest to więc typowy przykład założeniowego dowodu nie wprost.

Podobnie i inne Arystotelesowskie dowody trybów figury drugiej i trzeciej przy pomocy trybów figury pierwszej przez sprowadzenie do niemożliwości („*reductio ad impossibile*”) są założeniowymi dowodami nie wprost. Jako założenia przyjmuje Arystoteles przesłanki dowodzonego trybu i zdanie sprzeczne z jego następnikiem. Dowód kończy się na wyprowadzeniu z tych założeń zdania sprzecznego z jedną z przesłanek.

Również u stoików znajdujemy dowody reguł rachunku zdań, które są przykładami dowodów założeniowych.

Podany powyżej, na str. 11, założeniowy dowód nie wprost twierdzenia:

Jeśli n dzieli $a \cdot a$, to n dzieli a

występuje u matematyka greckiego Euklidesa, żyjącego po Arystotelesie.

Choć jednak od dawna stosowano w praktyce matematycznej i logicznej dowody założeniowe, reguły dla tych dowodów sformułowano w logice współczesnej dopiero niedawno. O ile nam wiadomo, reguła tworzenia założeniowego dowodu nie wprost, przyjęta tu jako reguła pierwotna, nie była formułowana w zbudowanych wcześniej systemach założeniowych.

Wśród tez rachunku zdań odróżniamy tezy rzędu 1, tezy rzędu 2 itd., ogólnie: tezy rzędu n , gdzie n jest liczbą naturalną ≥ 1 . Definicja tego pojęcia jest następująca *:

ϕ jest tezą rzędu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje założeniowy dowód (wprost lub nie wprost) wyrażenia ϕ , w którym dołączając nowe wiersze do dowodu korzystamy tylko z reguł wymienionych w punkcie 2b opisu reguły tworzenia założeniowego dowodu (wprost lub nie wprost).

ϕ jest tezą rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje założeniowy dowód wyrażenia ϕ , w którym korzystamy — według warunku 2a opisu takiego dowodu — z tez co najwyżej rzędu $n-1$ i gdy ϕ nie jest tezą rzędu mniejszego niż n .

ϕ jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna n , że ϕ jest tezą rzędu n .

* Jest to definicja indukcyjna. Por. rozdz. II, § 5.

§ 3. TEZY I REGUŁY WTÓRNE

Opierając się na regule OK stosować będziemy jako regułę wtórną — regułę tworzenia założeniowego dowodu (wprost lub nie wprost), która pozwala przy wypisywaniu założeń twierdzenia rozbić na poszczególne człony każde założenie będące koniunkcją i wypisać jako założenia te poszczególne człony. Jeśli bowiem jakieś założenie twierdzenia, wypisane według reguły pierwotnej, jest koniunkcją pewnych wyrażeń, to po zastosowaniu doń reguły OK otrzymamy w dowodzie poszczególne człony tej koniunkcji.

W ten sposób dowodzimy np. drugiego prawa sylogizmu hipotetycznego (dowód pierwszego, T1a: $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$, został podany w poprzednim paragrafie):

T1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Dow. (1) $p \rightarrow q$
 (2) $q \rightarrow r$
 (3) p
 (4) q
 r

{zał.} *
 {RO: 1; 3}
 {RO: 2; 4}

W starożytności odróżniano sylogizmy hipotetyczne (warunkowe), sformułowane dla okresów warunkowych, od sylogizmów kategoriycznych Arystotelesa, sformułowanych dla zdań kategoriycznych. Stąd też pochodzi nazwa tezy T1 — „prawo sylogizmu hipotetycznego”.

T2. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ prawo eksportacji

Dow. (1) $p \wedge q \rightarrow r$
 (2) p
 (3) q
 (4) $p \wedge q$
 r

{zał.}
 {DK: 2; 3}
 {RO: 1; 4}

T2a. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ prawo importacji

Dow. (1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
 (2) p
 (3) q
 (4) $q \rightarrow r$
 r

{zał.}
 {RO: 1; 2}
 {RO: 4; 3}

Dotąd podane tezy były tezami rzędu 1-go, gdyż w ich dowodach nie korzystaliśmy z tez wcześniejszych. Następną tezą jest teza rzędu 2-go.

T2b. $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Dow. (1) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
 (2) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
 $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

{T2}
 {T2a}
 {DE: 1; 2}

* „zał.” jest skrótem wyrazu „założenia”.

Dowód tezy T2b jest zwykłym dowodem wprost. Każdy wiersz takiego dowodu jest tezą. Natomiast w dowodach założeniowych najczęściej wiersze dowodu nie są tezami.

Tak samo jak w wypadku T2b przeprowadzamy dowód prawie wszystkich tez o postaci równoważności: dowodzimy najpierw odpowiednich implikacji prostych i odwrotnych, a następnie stosujemy do nich regułę dołączania równoważności. Dalsze dowody tez o postaci równoważności zapisywać będziemy w ten sposób, że dowód taki będzie składać się z dwóch części (a) i (b), z których część (a) jest dowodem implikacji prostej, część zaś (b) — dowodem implikacji odwrotnej.

T3. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$ prawo komutacji

Prawo to pozwala przestawić poprzednik implikacji z poprzednikiem jej następnika. Dowód tego prawa pozostawiamy czytelnikowi.

Dowód następnej tezy jest założeniowym dowodem nie wprost.

T4. $p \vee q \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$

Dow. (1)	$p \vee q$	{zał.}
(2)	$\sim q$	
(3)	$\sim p$	{z. d. n.}*
(4)	q	{OA: 1; 3}
	sprz.**	{2; 4}

Łatwo zauważyć, że tak samo jak dowodziliśmy T4 można udowodnić każde wyrażenie o postaci $\phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$, gdzie ϕ i ψ są dowolnymi wyrażeniami rachunku zdań. Dowód każdego takiego wyrażenia zbudowany jest w ten sposób, że jako założenia (1) i (2) przyjmujemy wyrażenia $\phi \vee \psi$ i $\sim \psi$, zaś jako założenie dowodu nie wprost — wyrażenie $\sim \phi$. Stosując do (1) i (3) regułę OA otrzymamy w wierszu (4) wyrażenie ψ , sprzeczne z występującym w wierszu (2) wyrażeniem $\sim \psi$. Schemat takiego dowodu jest więc następujący:

(1)	$\phi \vee \psi$	{zał.}
(2)	$\sim \psi$	
(3)	$\sim \phi$	{z. d. n.}
(4)	ψ	{OA: 1; 3}
	sprz.	{2; 4}

Np. wyrażenie

(a)

$$(p \equiv q) \vee p \wedge r \rightarrow [\sim(p \wedge r) \rightarrow (p \equiv q)]$$

* „z. d. n.” jest skrótem wyrażenia „założenie dowodu nie wprost”.
 ** „sprz.” jest skrótem wyrażenia „sprzeczność”.

jest wyrażeniem o postaci $\phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$ (w tym wypadku $\phi = „p \equiv q”$, $\psi = „p \wedge r”$). Pod podany wyżej schemat podpada następujący dowód wyrażenia (a):

(1)	$(p \equiv q) \vee p \wedge r$	{zał.}
(2)	$\sim(p \wedge r)$	
(3)	$\sim(p \equiv q)$	{z. d. n.}
(4)	$p \wedge r$	{OA: 1; 3}
	sprz.	{2; 4}

Przy pomocy reguł pierwotnych systemu możemy więc udowodnić następujące twierdzenie:

M4. Tezą jest każde wyrażenie rachunku zdań o postaci

$$\phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$$

Wprowadzając zapis „ $\vdash \phi$ ”, będący skrótem zdania „wyrażenie ϕ jest tezą”, można M4 zanotować w następujący sposób:

M4. $\vdash \phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$

Zdanie M4 nie jest tezą systemu rachunku zdań, lecz tezą metasystemu tegoż rachunku. Zdanie M4 nazwiemy metatezą odpowiadającą tezie T4. Ogólnie: metatezą odpowiadającą danej tezie T (rachunku zdań) jest twierdzenie M metasystemu stwierdzające, że tezą rachunku zdań jest każde wyrażenie, którego schemat otrzymujemy zastępując w T zmienne zdaniowe przez zmienne metasystemu „ ϕ ”, „ ψ ” itp., przy czym tę samą zmienną zdaniową zastępujemy na każdym miejscu przez tę samą zmienną, różne zaś zmienne zdaniowe zastępujemy przez różne zmienne.

Udowodnimy twierdzenie:

Tw. 1. Dla każdej tezy rachunku zdań można udowodnić odpowiadającą jej metatezę.

Dowód jest indukcyjny ze względu na rząd tezy.

- 1) Jeśli T jest tezą rzędu 1-go, zaś M metatezą odpowiadającą tezie T, to schemat dowodu każdego wyrażenia rachunku zdań, o którym M stwierdza, że jest ono tezą, otrzymujemy zastępując w dowodzie tezy T zmienne zdaniowe przez zmienne „ ϕ ”, „ ψ ” itd., i to tę samą zmienną zdaniową na każdym miejscu przez tę samą zmienną, różne zaś zmienne zdaniowe przez różne zmienne metasystemu, a więc w ten sposób, w jaki dowód T4 przekształciliśmy w dowód M4.
- 2) Zakładamy, że Tw. 1 jest prawdziwe dla wszystkich tez rzędu mniejszego od n . Niech T będzie tezą rzędu n , M zaś odpowiadającą jej metatezą. Schemat dowodu każdego wyrażenia rachunku zdań, o którym M stwierdza, że jest tezą, otrzymujemy tak samo jak w przypadku 1). Założenie indukcyjne gwarantuje, że metatezy odpowiadające tezom rzędu mniejszego od n dają się udowodnić.

Na metatezie M4 można oprzeć regułę wtórną opuszczania alternatywy, mającą postać:

$$\text{OA} \quad \frac{\phi \vee \psi \quad \sim \psi}{\phi}$$

Jeśli bowiem do dowodu należą wyrażenia $\phi \vee \psi$ i $\sim \psi$, to dołączając do tego dowodu tezę $\phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$ i stosując dwukrotnie regułę odrywania otrzymamy wyrażenie ϕ . Powyższa reguła pozwala na podstawie alternatywy i negacji drugiego jej członu dołączyć do dowodu pierwszy jej człon.

Obie reguły opuszczania alternatywy, regułę pierwotną i regułę wtórną ze względu na M4, można ująć w następującym sformułowaniu: Do dowodu wolno dołączyć jeden człon alternatywy, o ile do dowodu należy ta alternatywa i negacja innego jej członu.

Zamiast mówić o regule wtórnej ze względu na metatezę odpowiadającą danej tezie, będziemy mówić o regule wtórnej ze względu na tę tezę (ogólnie mówimy, że reguła R_i dołączania nowych wierszy do dowodu jest wtórna ze względu na reguły R lub tezy T wtedy i tylko wtedy, gdy ilekroć reguła R_i pozwala dołączyć do dowodu jakieś wyrażenie, to wyrażenie to można też dołączyć na podstawie reguł R lub tez T).

Na każdej tezie o postaci implikacji można oprzeć pewną regułę wtórną. Uzasadnimy tę uwagę.

Niech T będzie tezą rachunku zdań o postaci implikacji, a więc o postaci

$$(I) \quad \phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots\}$$

przy $n \geq 2$. Reguła o schemacie

$$\frac{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n-1}}{\phi_n}$$

jest wówczas regułą wtórną. O ile bowiem w pewnym dowodzie występuje każde z wyrażeń $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$, to na podstawie metatezy odpowiadającej tezie T przez $(n-1)$ -krotne zastosowanie reguły odrywania otrzymujemy w dowodzie wyrażenie ϕ_n .

Można zauważyć, że postać (I) nie jest dla każdej tezy rachunku zdań wyznaczona tylko w jeden sposób. Np. tezę $T4$ możemy traktować jako tezę o postaci $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \phi_3)$, przyjmując, że $\phi_1 = "p \vee q"$, $\phi_2 = "\sim q"$, $\phi_3 = "p"$. Możemy jednak również tę tezę uważać za tezę o postaci $\phi_1 \rightarrow \phi_2$, przyjmując, że $\phi_1 = "p \vee q"$, $\phi_2 = "\sim q \rightarrow p"$. W konsekwencji tego na danej tezie mogą być

oparte reguły o różnych schematach. A więc np. na tezie $T4$ oprócz reguły OA oparta jest również reguła wtórna o schemacie

$$\frac{\phi \vee \psi}{\sim \psi \rightarrow \phi}$$

Analogicznie można wykazać, że regułą wtórną ze względu na tezę o postaci

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_k$$

oraz na reguły DK i OK jest reguła o schemacie:

$$\frac{\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n}{\psi_1 \quad \dots \quad \psi_k}$$

Jedną z reguł wtórnych, opartych na pewnej tezie, będziemy oznaczać tą samą nazwą, którą oznaczona jest ta teza. Np. regułą sylogizmu hipotetycznego, wtórną ze względu na $T1$, nazywamy regułą o schemacie:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \chi}{\phi \rightarrow \chi}$$

Podstawieniem wyrażenia ϕ rachunku zdań nazywamy wyrażenie, które powstaje z ϕ przez zastąpienie zmiennej, np. zmiennej p , występującej w tym wyrażeniu, dowolnym wyrażeniem, przy czym, o ile zmienna p występuje w ϕ parokrotnie, zastępujemy ją tym samym wyrażeniem na każdym miejscu, na którym występuje ona w wyrażeniu ϕ . Jeśli w wyrażeniu ϕ występuje więcej niż jedna zmienna, to możemy jednocześnie zastąpić kilka z nich dowolnymi wyrażeniami, uważając jednak, by jednakowe zmienne były zastąpione przez jednakowe wyrażenia.

Tak np. wyrażenie (a), podane powyżej na str. 22, jest podstawieniem tezy $T4$, uzyskanym przez zastąpienie zmiennej p wyrażeniem $p = q$, a zmiennej q — wyrażeniem $p \wedge r$.

Wyrażenie (a), jak i każde inne podstawienie tezy $T4$, jest wyrażeniem o postaci $\phi \vee \psi \rightarrow (\sim \psi \rightarrow \phi)$, a więc — w myśl $M4$ — jest tezą.

Ogólnie: każde podstawienie tezy rachunku zdań jest wyrażeniem o tej postaci, której dotyczy metateza odpowiadająca tej tezie, i w myśl tej metatezy jest również tezą.

Wtórna jest więc reguła podstawiania, stwierdzająca, że podstawienie dowolnej tezy jest tezą.

Na podstawie pierwotnej reguły OA dowodzimy tezy

$$T4a. \quad p \vee q \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

Przy pomocy wtórnej reguły OA dowodzimy

$$T4b. \quad \sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Dow.	(1)	$\sim p \vee q$		
	(2)	p		
	(3)	$\sim q$		
	(4)	$\sim p$		
		sprz.		

{zał.}

{z. d. n.}

{OA: 1; 3}

{2; 4}

Tezy T4, T4a, T4b można nazwać prawami związku między alternatywą a implikacją. Warto zauważyć, że można podać bardzo intuicyjne przykłady wnioskowania według reguł wtórnych ze względu na te tezy. Np.

Pojadę dziś do Warszawy pociągiem lub pojadę dziś do Warszawy samolotem
 Jeśli nie pojadę dziś do Warszawy pociągiem, to pojadę dziś do Warszawy samolotem

W podanym poniżej przykładzie litery a, b oznaczają boki trójkąta, litery zaś α, β oznaczają kąty leżące naprzeciw tych boków.

$$\frac{a \neq b \vee a = \beta}{a = b \rightarrow a = \beta}$$

Nie jest teraz dzień lub nie jest teraz noc
 Jeśli jest teraz dzień, to nie jest teraz noc

Podkreślamy tutaj intuicyjność tych reguł, gdyż z jednej z nich, mianowicie reguły wtórnej ze względu na T4b, skorzystamy w § 4 przy wyprowadzeniu tabelki matrycowej dla implikacji.

$$T5. \quad \sim \sim p \rightarrow p$$

Dow.	(1)	$\sim \sim p$		
	(2)	$\sim p$		
		sprz.		

{zał.}

{z. d. n.}

{1; 2}

Wtórna ze względu na T5 regułę opuszczania podwójnej negacji będziemy oznaczać symbolem ON.

$$T5a. \quad p \rightarrow \sim \sim p$$

Dow.	(1)	p		
	(2)	$\sim \sim \sim p$		
	(3)	$\sim p$		
		sprz.		

{zał.}

{z. d. n.}

{ON: 2}

{1; 3}

Regułę dołączania podwójnej negacji, wtórna ze względu na T5a, będziemy oznaczać symbolem DN.

$$T5b. \quad \sim \sim p = p \quad \text{{DE: T5; T5a}}$$

Tezy T5, T5a, T5b nazywamy prawami podwójnej negacji. Prawo T5b, stwierdzające, że podwójna negacja zdania jest równoważna temu zdaniu, znane było już stoikom.

Wtórna ze względu na regułę DN jest reguła opuszczania alternatywy, o postaci:

OA	$\sim \phi \vee \psi$		$\phi \vee \sim \psi$	
	ϕ	ψ	ϕ	ψ
	ψ	ϕ	ψ	ϕ

Dow.	(1)	$\sim \phi \vee \psi$		
	(2)	ϕ		
		$\sim \sim \phi$		
		ψ		

{zał.}

{DN: 2}

{OA: 1; 3}

{zał.}

{DN: 2}

{OA: 1; 3}

Sens intuicyjny tej reguły jest taki sam jak sens intuicyjny reguły OA w dotychczasowej postaci. Reguły te stwierdzają bowiem, że z alternatywy i wyrażenia sprzecznego z jednym z jej członów wynika drugi człon tej alternatywy.

Opierając się na T5, bądź też na regule ON, można wyprowadzić jako regułę wtórna — regułę tworzenia założeniowego dowodu nie wprost, która tym się tylko różni od reguły podanej w poprzednim paragrafie, że w przypadku, gdy w wyrażeniu (I) ϕ_n ma postać $\sim \psi$, pozwala przyjąć jako założenie dowodu nie wprost wyrażenie ψ . Przyjmując bowiem jako założenie dowodu nie wprost wyrażenie $\sim \sim \psi$ i stosując do niego regułę ON otrzymamy dowód według reguły pierwotnej. Z tej reguły wtórnej skorzystamy w dowodzie T6.

$$T6. \quad p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p \quad \text{prawo transpozycji}$$

Dow.	(a)	(1) $p \rightarrow q$		
		(2) $\sim q$		
		(3) p		
		(4) q		
		sprz.		

{zał.}

{z. d. n.}

{RO: 1; 3}

{2; 4}

Część (b) dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

Transpozycją danej implikacji nazywa się implikację, która powstaje z niej przez przestawienie poprzednika z następnikiem przy równoczesnym zaprzeczeniu obu tych członów. Reguła transpozycji pozwala dołączyć do dowodu transpozycję implikacji, która należy do dowodu.

Przykład wnioskowania według reguły transpozycji:

$$\frac{a = b \rightarrow a = \beta}{a \neq \beta \rightarrow a \neq b}$$

(litery a, b oznaczają tu boki trójkąta, zaś litery α, β — kąty leżące naprzeciw tych boków).

Prawo transpozycji (w postaci implikacji) należy do tych kilku praw rachunku zdań, które znane były już Arystotelesowi.

T7. $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$ prawo transpozycji złożonej

Dow. (a)	(1) $p \wedge q \rightarrow r$	{zał.}
	(2) p	
	(3) $\sim r$	{z. d. n.}
	(4) q	{DK: 2; 4}
	(5) $p \wedge q$	{RO: 1; 5}
	(6) r	{3; 6}
	sprz.	

Dowód implikacji odwrotnej pozostawiamy czytelnikowi.

Przykład wnioskowania według reguły transpozycji złożonej:

Jeśli ciąg a_n jest monotoniczny i ciąg a_n jest ograniczony, to ciąg a_n jest zbieżny
 Jeśli ciąg a_n jest monotoniczny i ciąg a_n nie jest zbieżny, to ciąg a_n nie jest ograniczony

Wśród reguł dowodzonych przez stoików przy pomocy ich reguł pierwotnych znajdujemy następującą regułę wtórną ze względu na prawo transpozycji złożonej:

$$\frac{\phi \wedge \psi \rightarrow \chi}{\sim \chi \wedge \phi \rightarrow \sim \psi}$$

T8. $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ modus tollendo tollens (tryb obalający przez obalenie)

Dowód tego prawa pozostawiamy czytelnikowi.

Wtórna ze względu na T8 jest reguła:

$$\text{Tol. * } \frac{\phi \rightarrow \psi}{\frac{\sim \psi}{\sim \phi}}$$

Reguła ta, z której nieraz będziemy korzystali, pozwala uzyskać negację poprzednika dowolnej implikacji na podstawie tej implikacji i negacji jej następnika. Np.

Jeśli liczba 306121 jest podzielna przez 3, to suma cyfr

liczby 306121 jest podzielna przez 3

Suma cyfr liczby 306121 nie jest podzielna przez 3

Liczba 306121 nie jest podzielna przez 3

* Skróć wyrazu „tollens”.

Wtórne ze względu na powyższą regułę i reguły ON bądź DN są reguły o schematach:

$$\text{Tol. } \frac{\phi \rightarrow \sim \psi}{\sim \phi} \quad \frac{\sim \phi \rightarrow \psi}{\phi} \quad \frac{\sim \phi \rightarrow \sim \psi}{\phi}$$

Ogólnie biorąc, reguła Tol. pozwala na podstawie implikacji i wyrażenia sprzecznego z jej następnikiem uzyskać wyrażenie sprzeczne z jej poprzednikiem.

Udowodnimy przykładowo ostatnią postać tej reguły. W dowodzie skorzystamy z reguły Tol. w jej pierwszym sformułowaniu.

Dow. (1)	$\sim \phi \rightarrow \sim \psi$	{zał.}
(2)	ψ	
(3)	$\sim \sim \psi$	{DN: 2}
(4)	$\sim \sim \phi$	{Tol: 1; 3}
	ϕ	{ON: 4}

Reguła modus tollendo tollens (lub krócej: modus tollens), w jej pierwszym sformułowaniu, była jedną z pierwotnych („niedowodliwych”) reguł rachunku zdań przyjętych przez stoików. Wszystkie cztery sformułowania tej reguły znajdujemy u Boecjusza.

T9. $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Dow. (1)	p	{zał.}
(2)	$\sim p$	
(3)	$\sim q$	{z. d. n.}
	sprz.	{1; 2}

Prawo to zwraca uwagę, dlaczego sprzeczność jest groźna. Mianowicie na podstawie tego prawa z dwóch zdań sprzecznych można otrzymać dowolne zdanie. Warto tu podkreślić, że z dwóch zdań sprzecznych ϕ i $\sim \phi$ można otrzymać dowolne zdanie ψ posługując się tylko regułami DA i OA:

(1)	ϕ	{zał.}
(2)	$\sim \phi$	
(3)	$\phi \vee \psi$	{DA: 1}
	ψ	{OA: 3; 2}

Tezę T9 nazwał Łukasiewicz prawem Dunsza Szkota, jednego z najwybitniejszych filozofów średniowiecznych, żyjącego na przełomie XIII i XIV wieku. Teza T9 daje się bowiem wyprowadzić na podstawie prawa eksportacji z tezy: $p \wedge \sim p \rightarrow q$. Tej zaś tezie odpowiada twierdzenie podane przez Dunsza Szkota a głoszące, że ze zdania sprzecznego wynika dowolne zdanie.

Duns Szkot przeprowadza dowód tego twierdzenia na następującym przykładzie, posługując się przy tym wyraźnie sformułowanymi regułami OK, DA, OA:

Tw. *Sokrates biegnie i Sokrates nie biegnie, a więc jesteś w Rzymie*

Dow. (1)	Sokrates biegnie i Sokrates nie biegnie	{zał.}
(2)	Sokrates biegnie	{OK: 1}
(3)	Sokrates nie biegnie	
(4)	Sokrates biegnie lub jesteś w Rzymie	{DA: 2}
	Jesteś w Rzymie	{OA: 4; 3}

T10. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ prawo sygnifikacji

Dow. (1)	q	{zał.}
(2)	p	
(3)	$\sim q$	{z. d. n.}
	sprz.	{1; 3}

T11. $p \rightarrow p$ prawo tożsamości dla implikacji

Dow. (1)	p	{zał.}
(2)	$\sim p$	{z. d. n.}
	sprz.	{1; 2}

T11a. $p = p$ prawo tożsamości dla równoważności

Dow. (1)	$p \rightarrow p$	{T11}
	$p = p$	{DE: 1; 1}

Prawa tożsamości należą do tych tez logicznych, z których niekiedy korzystamy w dowodach matematycznych jako z przesłanek (jak to zobaczymy w części II książki).

T12. $(p = q) \rightarrow (q = p)$

Dow. (1)	$p = q$	{zał.}
(2)	$p \rightarrow q$	{OE: 1}
(3)	$q \rightarrow p$	{OE: 1}
	$q = p$	{DE: 3; 2}

T13. $(p = q) \wedge (q = r) \rightarrow (p = r)$

Dowód tej tezy pozostawiamy czytelnikowi.

Tezy T11a, T12, T13 stwierdzają, że równoważność jest zwrotna, symetryczna i przechodnia*.

Natomiast dla implikacji ważne są tylko prawa zwrotności (T11) i przechodniości (T1), a nie jest ważne prawo symetryczności, gdyż implikacja nie zawsze jest odwracalna.

* Por. odsyłacz na str. 109.

Związek między implikacją a równoważnością ustala teza

T14. $(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Łatwy dowód tej tezy pozostawiamy czytelnikowi.

Dla równoważności ważna jest następująca reguła odrywania:

RO _E	$\frac{\phi = \psi}{\phi}$	$\frac{\phi = \psi}{\psi}$
-----------------	----------------------------	----------------------------

Reguła ta jest wtórna ze względu na reguły OE i RO:

(1) $\phi = \psi$	{zał.}	(1) $\phi = \psi$	{zał.}
(2) ϕ		(2) ψ	
(3) $\phi \rightarrow \psi$	{OE: 1}	(3) $\psi \rightarrow \phi$	{OE: 1}
	ψ		ϕ
	{RO: 3; 2}		{RO: 3; 2}

T15. $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

T15a. $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$

T15b. $(p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

T15c. $(\sim p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow p$

T15d. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p$

Dowody tych tez, zwanych nieraz prawami redukcji do absurdu, pozostawiamy czytelnikowi.

Reguła wtórna ze względu na T15d, o schemacie:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\frac{\phi \rightarrow \sim \psi}{\sim \phi}}$$

sformułowana została już przez stoików, od których pochodzi następujący przykład wnioskowania według tej reguły:

Jeśli wiesz, żeś umarł, toś umarł
 Jeśli wiesz, żeś umarł, toś nie umarł
 Nie wiesz, żeś umarł

T16. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$ prawo mnożenia następników

Dowód tego prawa pozostawiamy czytelnikowi.

W dowodzie twierdzenia odwrotnego do T16 posłużymy się regułą wtórną dołączania implikacji do dowodu. Według tej reguły w założeniowym dowodzie (wprost lub nie wprost) wyrażenia (I) można wprowadzić dowolne wyrażenie ψ jako dodatkowe założenie dowodu. Jeśli na podstawie tego dodatkowego zało-

żenia i założeń dowodu otrzymamy w dowodzie wyrażenie χ , to do dowodu wolno dołączyć implikację $\psi \rightarrow \chi$.

Istotnie, otrzymując na podstawie założeń dowodu $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, (\sim \phi_n)$ i dodatkowego założenia ψ wyrażenie χ dowodzimy tym samym tezy: $\phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\phi_{n-1} \rightarrow (\sim \phi_n \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))]\dots\}$. (lub tezy: $\phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\phi_{n-1} \rightarrow (\sim \phi_n \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))]\dots\}$). Dołączając tę tezę do dowodu wyrażenia (I) i odrywając założenia $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, (\sim \phi_n)$ otrzymamy wyrażenie $\psi \rightarrow \chi$. Oczywiście, że z dodatkowego założenia ψ i wyrażen otrzymanych na podstawie tego wyrażenia, z wyjątkiem końcowego wniosku $\psi \rightarrow \chi$, nie wolno korzystać w dalszych częściach dowodu. Oczywiście jest też, że w dowodzie może wystąpić kilka dodatkowych założeń.

Dodatkowe założenia dowodu będziemy zaopatrywać w podwójne numery, a więc np. pierwsze takie dodatkowe założenie dowodu będzie miało numer „1.1”, drugie — numer „2.1” itd. Każdy wiersz otrzymany na podstawie wiersza o numerze podwójnym otrzymuje również numer podwójny z tą samą cyfrą pierwszą, wskazującą, na podstawie którego założenia został on uzyskany, i z kolejną cyfrą drugą. Natomiast wiersze otrzymane na podstawie reguły dołączania implikacji do dowodu zaopatrywane są w numery pojedyncze. Jeśli na podstawie dodatkowego założenia dowodu ψ , o numerze np. 1.1, otrzymaliśmy w dowodzie wyrażenie χ , o numerze np. 1.3, a na podstawie reguły dołączania implikacji do dowodu dołączamy do dowodu wiersz $\psi \rightarrow \chi$, to w nawiasie klamrowym po prawej stronie otrzymanego wyrażenia piszemy: 1.1 $\rightarrow$ 1.3, zaznaczając w ten sposób, że została zastosowana w dowodzie reguła dołączania implikacji.

T16a. $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Dow. (1)	$p \rightarrow q \wedge r$	{zał.}
(1.1)	p	{z. dow.} *
(1.2)	$q \wedge r$	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	q	{OK: 1.2}
(1.4)	r	{OK: 1.2}
(2)	$p \rightarrow q$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3}
(3)	$p \rightarrow r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.4}
	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	{DK: 2; 3}

Aby ułatwić czytelnikowi dokładne zrozumienie wprowadzonej ostatnio reguły wtórnej, podajemy dowód T16a nie oparty na tej regule. Musimy wtedy udowodnić najpierw dwie następujące tezy pomocnicze:

- (a) $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q)$
 (b) $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Łatwe dowody tych tez pozostawiamy czytelnikowi.

* „z. dow.” jest skrótem wyrażenia „dodatkowe założenie dowodu”.

Dowód T16a ma obecnie postać:

(1)	$p \rightarrow q \wedge r$	{zał.}
(2)	$(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q)$	{a}
(3)	$(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	{b}
(4)	$p \rightarrow q$	{RO: 2; 1}
(5)	$p \rightarrow r$	{RO: 3; 1}
	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	{DK: 4; 5}

Dzięki regule dołączania implikacji do dowodu unikamy wprowadzania do systemu zbytecznych tez pomocniczych.

T16b. $p \rightarrow q \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ {DE:T16; T16a}

T17. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$

Dow. (a)	(1) $p \rightarrow r$	{zał.}
	(2) $q \rightarrow r$	
	(3) $p \vee q$	
	(4) $\sim r$	{z. d. n.}
	(5) $\sim p$	{Tol.: 1; 4}
	(6) $\sim q$	{Tol.: 2; 4}
	(7) q	{OA: 3; 5}
	sprz	{6; 7}
(b)	(1) $p \vee q \rightarrow r$	{zał.}
	(1.1) p	{z. dow.}
	(1.2) $p \vee q$	{DA: 1.1}
	(1.3) r	{RO: 1; 1.2}
	(2) $p \rightarrow r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3}
	(2.1) q	{z. dow.}
	(2.2) $p \vee q$	{DA: 2.1}
	(2.3) r	{RO: 1; 2.2}
	(3) $q \rightarrow r$	{2.1 $\rightarrow$ 2.3}
	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	{DK: 2; 3}

Według T17 warunek: $x \leq -2 \rightarrow f(x) > 0$, czyli warunek: $x < -2 \vee x = -2 \rightarrow f(x) > 0$, jest równoważny koniunkcji warunków: $x < -2 \rightarrow f(x) > 0$ i $x = -2 \rightarrow f(x) > 0$.

Implikację prostą zawartą w T17 będziemy nazywać prawem dodawania poprzedników. Wtórna ze względu na nią jest reguła dodawania poprzedników, mająca schemat:

$$\frac{\phi \rightarrow \chi}{\phi \vee \psi \rightarrow \chi}$$

Z prawa dodawania poprzedników otrzymujemy na podstawie prawa importacji (T2a) prawo dylematu konstrukcyjnego prostego:

$$\text{T18.} \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q) \rightarrow r$$

Wtórna ze względu na T18 reguła dylematu konstrukcyjnego prostego pozwala z dwóch implikacji o tym samym następniku i alternatywy ich poprzedników wyprowadzić następnik tych implikacji.

Przykład wnioskowania według reguły dylematu konstrukcyjnego prostego:

$$\frac{\begin{array}{l} n = 1 \rightarrow (n+1)^2 > n^2 \\ n > 1 \rightarrow (n+1)^2 > n^2 \\ \hline n = 1 \vee n > 1 \end{array}}{(n+1)^2 > n^2}$$

Wtórna ze względu na regułę dołączania implikacji do dowodu jest reguła stwierdzająca, że jeśli na podstawie pewnego dodatkowego założenia dowodu otrzymamy w dowodzie dwa wyrażenia sprzeczne, to do dowodu można dołączyć wyrażenie sprzeczne z tym dodatkowym założeniem. Jeśli bowiem na podstawie dodatkowego założenia ψ otrzymamy w dowodzie dwa wiersze sprzeczne χ i $\sim\chi$, to na podstawie reguły DK i reguły dołączania implikacji do dowodu możemy do dowodu dołączyć implikację $\psi \rightarrow \chi \wedge \sim\chi$. Stąd zaś na podstawie T15b otrzymujemy wyrażenie $\sim\psi$. Podobnie, jeśli na podstawie dodatkowego założenia $\sim\psi$ otrzymamy w dowodzie dwa wiersze sprzeczne χ i $\sim\chi$, to do dowodu możemy dołączyć implikację $\sim\psi \rightarrow \chi \wedge \sim\chi$. Stąd zaś na podstawie T15c otrzymujemy wyrażenie ψ .

Z reguły tej skorzystamy w dowodzie następnej tezy.

$$\text{T19.} \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{prawo negowania alternatywy}$$

Dow. (a) (1)	$\sim(p \vee q)$	{zał.}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	$p \vee q$	{DA: 1.1}
(2)	$\sim p$	{1.1 $\rightarrow$ sprz. (1; 1.2)}
(2.1)	q	{z. dow.}
(2.2)	$p \vee q$	{DA: 2.1}
(3)	$\sim q$	{2.1 $\rightarrow$ sprz. (1; 2.2)}
	$\sim p \wedge \sim q$	{DK: 2; 3}

Część (b) dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

Według T19 negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji jej zanegowanych członów. Np. zdanie: $\sim(a \geq b)$, czyli zdanie: $\sim(a > b \vee a = b)$, jest równoważne zdaniu: $\sim(a > b) \wedge \sim(a = b)$.

Wtórna ze względu na T19 jest reguła negowania alternatywy:

$$\text{NA} \quad \frac{\sim(\phi \vee \psi)}{\sim\phi} \quad \frac{\sim(\phi \vee \psi)}{\sim\phi \wedge \sim\psi}$$

$$\text{T20.} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{prawo negowania koniunkcji}$$

Dow. (a) (1)	$\sim(p \wedge q)$	{zał.}
(2)	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	{z. d. n.}
(3)	$\sim\sim p$	{NA: 2}
(4)	$\sim\sim q$	{NA: 2}
(5)	p	{ON: 3}
(6)	q	{ON: 4}
(7)	$p \wedge q$	{DK: 5; 6}
	sprz.	{1; 7}

Część (b) dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

Według T20 negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie jej zanegowanych członów. Np. zdanie: $\sim(a < x < b)$, czyli zdanie: $\sim(a < x \wedge x < b)$, jest równoważne zdaniu: $\sim(a < x) \vee \sim(x < b)$.

Tezy T19 i T20 mają analogiczną budowę. Nazywamy je od nazwiska angielskiego logika z XIX wieku prawami De Morgana. Prawa te znane były jednak już w średniowieczu. Znajdujemy je np. u Ockhama (XIV w.), u Burleigha (XIV w.) i innych logików XIV i XV wieku.

$$\text{T21.} \quad \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad \text{prawo negowania implikacji}$$

Dowód tej tezy pozostawiamy czytelnikowi.

$$\text{T22.} \quad \sim(p \wedge \sim p) \quad \text{prawo sprzeczności}$$

Dow. (1)	$p \wedge \sim p$	{z. d. n.}
(2)	p	{OK: 1}
(2)	$\sim p$	
	sprz.	{2; 3}

Dowód tej tezy jest zwykłym dowodem nie wprost. W dowodzie takim nie występują założenia twierdzenia, lecz tylko założenie dowodu nie wprost, którym jest zdanie sprzeczne z dowodzoną tezą.

Prawo sprzeczności sformułował Arystoteles. U niego też znajdujemy metalogiczne sformułowanie tego prawa, głoszące, że: dwa zdania sprzeczne nie mogą być zarazem prawdziwe (lub też w sformułowaniu równoważnym: z dwóch zdań sprzecznych jedno jest fałszywe).

$$\text{T23.} \quad p \vee \sim p \quad \text{prawo wyłączonego środka}$$

Dow. (1)	$\sim(p \vee \sim p)$	{z. d. n.}
(2)	$\sim p$	{NA: 1}
(3)	$\sim\sim p$	
	sprz.	{2; 3}

Prawo wyłączonego środka należy do tych tez logicznych, z których nieraz korzystamy w dowodach matematycznych jako z przesłanki, a zwłaszcza w rozgałęzionych dowodach z dołączaniem dodatkowych założeń, o których to dowodach będzie poniżej mowa.

Również prawo wyłączonego środka sformułował Arystoteles. Podał on też sformułowanie metalogiczne tego prawa, według którego z dwóch zdań sprzecznych jedno jest prawdziwe.

W pracach swych zakłada Arystoteles prawdziwość tego prawa, a nawet poświęca jeden ustęp *Metafizyki* obronie prawa wyłączonego środka. W jednym wszakże ze swych tekstów kwestionuje ważność tego prawa dla zdań dotyczących przyszłych zdarzeń niezdeterminowanych. Uważa mianowicie, że przyjęcie tego prawa dla takich zdań prowadziłoby w konsekwencji do stanowiska, że wszystko, co będzie się dziać, jest konieczne. Nawiązując do tej koncepcji Jan Łukasiewicz zbudował w latach 1918-1920 system tzw. trójwartościowego rachunku zdań, w którym nie obowiązuje prawo wyłączonego środka.

T24. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$ prawo nowego czynnika

Dowód tego prawa pozostawiamy czytelnikowi.

Przykład wnioskowania według reguły nowego czynnika:

$$\frac{a > 2 \rightarrow a > 0}{a > 2 \wedge a < 9 \rightarrow a > 0 \wedge a < 9}$$

czyli:

$$2 < a < 9 \rightarrow 0 < a < 9$$

T25. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$ prawo mnożenia implikacji
stronami

Dowód tego prawa pozostawiamy czytelnikowi.

Przykład wnioskowania według reguły mnożenia implikacji stronami:

$$\frac{\begin{array}{l} a < x \rightarrow c < f(x) \\ x < b \rightarrow f(x) < d \end{array}}{a < x \wedge x < b \rightarrow c < f(x) \wedge f(x) < d}$$

czyli:

$$a < x < b \rightarrow c < f(x) < d$$

Obecnie uzasadnimy regułę wtórną tworzenia dowodów rozgałęzionych z dołączeniem dodatkowych założeń. Według tej reguły:

- (a) założeniowy dowód wprost wyrażenia (I) * jest zakończony, jeśli uzyskamy w nim wyrażenie ϕ_n na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\psi_1, \dots, \psi_k$, których alternatywa jest jednym z wierszy dowodu;
- (b) założeniowy dowód nie wprost wyrażenia (I) jest zakończony, jeśli uzyskujemy w nim sprzeczność na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\psi_1, \dots, \psi_k$, których alternatywa jest jednym z wierszy dowodu.

* Wyrażenie to zostało podane na str. 17.

Dla udowodnienia (a) wystarczy zauważyć, że otrzymując w założeniowym dowodzie wprost wyrażenia (I) wyrażenie ϕ_n na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\psi_1, \dots, \psi_k$, można według reguły dołączania implikacji do dowodu dołączyć jako nowe wiersze wyrażenia: $\psi_1 \rightarrow \phi_n, \psi_2 \rightarrow \phi_n, \dots, \psi_k \rightarrow \phi_n$. Stosując do tych wyrażeń regułę dodawania poprzedników (uogólnioną na k implikacji) otrzymujemy wyrażenie: $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_k \rightarrow \phi_n$. Stosując do niego i do alternatywy $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_k$ (o której zakładamy, że jest jednym z wierszy dowodu) regułę odrywania, otrzymamy wyrażenie ϕ_n jako ostatni wiersz dowodu.

Dla udowodnienia (b) wystarczy zauważyć, że otrzymując w założeniowym dowodzie nie wprost wyrażenia (I) sprzeczność na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\psi_1, \dots, \psi_k$, możemy — według reguły wtórnej, podanej na str. 34 — dołączyć do dowodu negację każdego z tych dodatkowych założeń, a więc wyrażenia: $\sim \psi_1, \dots, \sim \psi_k$. Stosując zaś do alternatywy $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_k$ (o której zakładamy, że jest jednym z wierszy dowodu) i do wyrażeń $\sim \psi_1, \dots, \sim \psi_{k-1}$ regułę OA, otrzymamy wyrażenie ψ_k , sprzeczne z otrzymanym poprzednio wyrażeniem $\sim \psi_k$. Wystąpienie tej sprzeczności kończy założeniowy dowód nie wprost wyrażenia (I).

Przykładami dowodów, w których stosujemy pierwszą z podanych ostatnio reguł wtórnych, są dowody T26 i T27. Drugą regułę, którą podaliśmy dlatego, że często jest stosowana w rozumowaniach matematycznych, zilustrujemy następującym przykładem:

Teza: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \sim (q \vee s) \rightarrow \sim (p \vee r)$

Dow. (1)	$p \rightarrow q$	
(2)	$r \rightarrow s$	{zał.}
(3)	$\sim (q \vee s)$	
(4)	$p \vee r$	{z. d. n.}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	q	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	$q \vee s$	{DA: 1.2}
(2.1)	r	{z. dow.}
(2.2)	s	{RO: 2; 2.1}
(2.3)	$q \vee s$	{DA: 2.2}
	sprz.	{1.1 $\rightarrow$ sprz. (1.3; 3); 2.1 $\rightarrow$ sprz. (2.3; 3); 4}

T26. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$ prawo nowego składnika

Dow. (1)	$p \rightarrow q$	{zał.}
(2)	$p \vee r$	
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	q	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	$q \vee r$	{DA: 1.2}
(2.1)	r	{z. dow.}
(2.2)	$q \vee r$	{DA: 2.1}
	$q \vee r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3; 2.1 $\rightarrow$ 2.2; 2}

T27. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$ prawo dodawania implikacji stronami

Dow. (1)	$p \rightarrow q$	{zał.}
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	{z. dow.}
(1.1)	p	{RO: 1; 1.1}
(1.2)	q	{DA: 1.2}
(1.3)	$q \vee s$	{z. dow.}
(2.1)	r	{RO: 2; 2.1}
(2.2)	s	{DA: 2.2}
(2.3)	$q \vee s$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3; 2.1 $\rightarrow$ 2.3; 3}
	$q \vee s$	

Przykład wnioskowania według reguły dodawania implikacji stronami:

$$\frac{a > b \rightarrow a^2 > b^2 \quad a = b \rightarrow a^2 = b^2}{a > b \vee a = b \rightarrow a^2 > b^2 \vee a^2 = b^2}$$

czyli:

$$a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$$

Z T27 na podstawie prawa importacji otrzymujemy prawo dylematu konstrukcyjnego złożonego:

T28. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$

Wtórna ze względu na T28 reguła dylematu konstrukcyjnego złożonego pozwala z dwóch implikacji i alternatywy ich poprzedników wyprowadzić alternatywę ich następników.

Przykład wnioskowania według reguły dylematu konstrukcyjnego złożonego:

$$\frac{n = 1 \rightarrow 2n = 2 \quad n > 1 \rightarrow 2n > 2 \quad n = 1 \vee n > 1}{2n = 2 \vee 2n > 2}$$

Wnioskowania zwane dylematami znano już w starożytności. Oprócz dylematu konstrukcyjnego prostego i złożonego odróżnia się jeszcze dylemat destrukcyjny prosty i złożony. Reguła dylematu destrukcyjnego prostego pozwala z dwóch implikacji o tym samym poprzedniku i alternatywy negacji ich następników wyprowadzić negację poprzednika tych implikacji. Reguła dylematu destrukcyjnego złożonego pozwala z dwóch implikacji i alternatywy negacji ich następników wyprowadzić alternatywę negacji ich poprzedników. Sformułowanie praw, na których oparte są te reguły, oraz ich dowody pozostawiamy czytelnikowi.

T29.

$$\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$$

Implikacją prostą jest dla tej równoważności teza T4b. Podajemy więc tylko część (b) dowodu.

Dow. (b) (1)	$p \rightarrow q$	{zał.}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	q	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	$\sim p \vee q$	{DA: 1.2}
(2.1)	$\sim p$	{z. dow.}
(2.2)	$\sim p \vee q$	{DA: 2.1}
	$\sim p \vee q$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3; 2.1 $\rightarrow$ 2.2}

Dowód implikacji odwrotnej zawartej w tezie T29 jest dowodem rozgałęzionym, w którym alternatywa założeń dodatkowych jest tezą logiczną, mianowicie prawem wyłączonego środka. Nieraz dowody matematyczne przeprowadza się w ten sposób, że alternatywa założeń dodatkowych jest szczególnym przypadkiem prawa wyłączonego środka, np. gdy dowodzimy daną tezę przy założeniu: $x = 0$, a następnie przy założeniu: $x \neq 0$. W innych znowu wypadkach alternatywa założeń dodatkowych jest tezą lub szczególnym przypadkiem tezy z danej dziedziny, np. gdy dowód przeprowadzamy przy założeniach: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$, korzystając milcząco z prawa trychotomii: $x > y \vee x = y \vee x < y$. W rozgałęzionych dowodach założeniowych, w których alternatywa założeń dodatkowych jest prawem wyłączonego środka lub jego podstawieniem, nie będziemy wypisywać w dowodzie tego prawa ani też nie będziemy w nawiasie klamrowym w ostatnim wierszu dowodu zaznaczać, że korzystamy z tego prawa.

T29a.

$$p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$$

Implikacją prostą jest T4a. Dowód implikacji odwrotnej jest analogiczny do części (b) dowodu T29.

Regułę odpowiadającą implikacji odwrotnej, zawartej w T29, znajdujemy u Pawła z Wenecji, żyjącego na przełomie XIV i XV wieku, autora obszernego podręcznika logiki. Stwierdza on mianowicie, że z okresu warunkowego wynika alternatywa utworzona ze zdania sprzecznego z jego poprzednikiem oraz z jego następnika. Podaje też następujący przykład wnioskowania według tej reguły: Jeśli jesteś człowiekiem, to jesteś istotą żyjącą; a więc nie jesteś człowiekiem lub jesteś istotą żyjącą.

T30.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$$

Podajemy tylko część (b) dowodu.

Dow. (b) (1)	$p \wedge q \vee p \wedge r$	{zał.}
(1.1)	$p \wedge q$	{z. dow.}
(1.2)	p	{OK: 1.1}
(1.3)	q	
(1.4)	$q \vee r$	{DA: 1.3}

(1.5)	$p \wedge (q \vee r)$	{DK: 1.2; 1.4}
(2.1)	$p \wedge r$	{z. dow.}
(2.2)	p	{OK: 2.1}
(2.3)	r	
(2.4)	$q \vee r$	{DA: 2.3}
(2.5)	$p \wedge (q \vee r)$	{DK: 2.2; 2.4}
	$p \wedge (q \vee r)$	{1.1 $\rightarrow$ 1.5; 2.1 $\rightarrow$ 2.5; 1}

Według T30 następujące warunki są równoważne:

$$x \text{ jest liczbą wymierną } \wedge (x < -2 \vee x > 5)$$

$$x \text{ jest liczbą wymierną } \wedge x < -2 \vee x \text{ jest liczbą wymierną } \wedge x > 5$$

Teza T30 jest prawem rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, analogicznym do arytmetycznego prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

$$\text{T31.} \quad p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Teza T31, której dowód pozostawiamy czytelnikowi, jest prawem rozdzielności alternatywy względem koniunkcji. Według tej tezy (i prawa symetryczności równoważności) warunki:

$$(a|b \cdot c \vee \sim a|b) \wedge (a|b \cdot c \vee \sim a|c)$$

$$a|b \cdot c \vee \sim a|b \wedge \sim a|c *$$

są równoważne.

$$\text{T32.} \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim (q \wedge s) \rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$$

Dow. (1)	$p \rightarrow q$	{zał.}
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	
(4)	$\sim (q \wedge s)$	
(5)	$\sim q \vee \sim s$	
(1.1)	q	{RO _E : T20; 4}
(1.2)	$\sim s$	{z. dow.}
(1.3)	$\sim r$	{OA: 5; 1.1}
(1.4)	p	{Tol.: 2; 1.2}
(6)	$q \rightarrow p$	{OA: 3; 1.3}
(2.1)	s	{1.1 $\rightarrow$ 1.4}
(2.2)	$\sim q$	{z. dow.}
(2.3)	$\sim p$	{OA: 5; 2.1}
(2.4)	r	{Tol.: 1; 2.2}
(7)	$s \rightarrow r$	{OA: 3; 2.3}
	$(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$	{2.1 $\rightarrow$ 2.4}
		{DK: 6; 7}

* „a|b” znaczy: a dzieli b.

Teza T32 nazywa się prawem o zamkniętym układzie twierdzeń lub prawem Haubera. Można by też nazwać ją prawem odwracania implikacji. Na T32 oparta jest następująca reguła odwracania implikacji:

$$\frac{\begin{array}{l} \phi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \phi_2 \rightarrow \psi_2 \\ \phi_1 \vee \phi_2 \\ \sim (\psi_1 \wedge \psi_2) \end{array}}{\begin{array}{l} \psi_1 \rightarrow \phi_1 \\ \psi_2 \rightarrow \phi_2 \end{array}}$$

Tezę T32 i odpowiadającą jej regułę można uogólnić na n implikacji.

Reguła odwracania implikacji przybiera wówczas postać:

$$\frac{\begin{array}{l} \phi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \phi_2 \rightarrow \psi_2 \\ \dots \dots \dots \\ \phi_n \rightarrow \psi_n \\ \phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n \\ \sim (\psi_i \wedge \psi_j) \text{ dla } 1 \leq i \neq j \leq n \end{array}}{\begin{array}{l} \psi_1 \rightarrow \phi_1 \\ \psi_2 \rightarrow \phi_2 \\ \dots \dots \dots \\ \psi_n \rightarrow \phi_n \end{array}}$$

A więc jeśli mamy stwierdzonych n implikacji oraz alternatywę ich poprzedników, a ich następniiki wzajemnie się wykluczają, to można wszystkie te implikacje odwrócić.

Przykład zastosowania reguły odwracania implikacji (w przykładzie tym litery „a”, „b” oznaczają boki trójkąta, litery zaś „α”, „β” oznaczają kąty leżące naprzeciw tych boków):

$$\frac{\begin{array}{l} a = b \rightarrow a = \beta \\ a > b \rightarrow a > \beta \\ a < b \rightarrow a < \beta \\ a = b \vee a > b \vee a < b \\ \sim (a = \beta \wedge a > \beta) \\ \sim (a = \beta \wedge a < \beta) \\ \sim (a > \beta \wedge a < \beta) \end{array}}{\begin{array}{l} a = \beta \rightarrow a = b \\ a > \beta \rightarrow a > b \\ a < \beta \rightarrow a < b \end{array}}$$

T33a.	$(p \equiv q) \rightarrow (\sim p \equiv \sim q)$	} prawa ekstensjonalności dla równoważności
b.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \wedge r \equiv q \wedge r)$	
c.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \wedge p \equiv r \wedge q)$	
d.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \vee r \equiv q \vee r)$	
e.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \vee p \equiv r \vee q)$	
f.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow r \equiv q \rightarrow r)$	
g.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow p \equiv r \rightarrow q)$	
h.	$(p \equiv q) \rightarrow [(p \equiv r) \equiv (q \equiv r)]$	
i.	$(p \equiv q) \rightarrow [(r \equiv p) \equiv (r \equiv q)]$	
j.	$(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow (p \wedge r \equiv q \wedge s)$	
k.	$(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow (p \vee r \equiv q \vee s)$	
l.	$(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow (p \rightarrow r \equiv q \rightarrow s)$	
m.	$(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow [(p \equiv r) \equiv (q \equiv s)]$	

Dowody tez T33a-g są pod pewnym względem analogiczne. Można je mianowicie przeprowadzać korzystając z reguły OE, z odpowiednich praw dla implikacji i z reguły DE. W dowodach tez T33h, i korzystamy z praw stwierdzających symetryczność i przechodność równoważności. Podamy tu przykładowo dowód T33f:

Dow. (1)	$p \equiv q$	{zał.}
(2)	$p \rightarrow q$	{OE: 1}
(3)	$q \rightarrow p$	
(4)	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	{T1a}
(5)	$(q \rightarrow p) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)]$	
(6)	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	{RO: 4; 2}
(7)	$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$	{RO: 5; 3}
	$p \rightarrow r \equiv q \rightarrow r$	{DE: 6; 7}

Dowody tez T33j-m oparte są na tezach T33b-i oraz T13.

Na tezach T33 oparta jest wtórna reguła ekstensjonalności rachunku zdań, mająca schemat:

$$\frac{\phi \equiv \psi}{\chi \equiv \chi(\phi//\psi)}$$

Symbol $\chi(\phi//\psi)$ oznacza tu wyrażenie, które powstało z χ przez zastąpienie pewnej jego części ψ wyrażeniem ϕ . Jeśli wyrażeniami χ , ψ i ϕ są odpowiednio wyrażenia

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)] \\ q \rightarrow r \\ \sim r \rightarrow \sim q \end{aligned}$$

to wyrażeniem $\chi(\phi//\psi)$ jest wyrażenie

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim r \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

Zauważmy, że jeśli w wyrażeniu χ występuje parokrotnie jako jego część wyrażenie ψ , to symbol $\chi(\phi//\psi)$ oznacza jakiegokolwiek z wyrażen, które powstaje z χ przez zastąpienie wyrażenia ψ wyrażeniem ϕ na dowolnych, niekoniecznie wszystkich, miejscach. W przypadku tym symbol $\chi(\phi//\psi)$ nie jest więc jednoznaczny.

Dowód reguły ekstensjonalności jest indukcyjny:

1) W przypadku, gdy χ ma jedną z następujących postaci:

$$\sim \psi, \psi \rightarrow \vartheta, \vartheta \rightarrow \psi, \psi \vee \vartheta, \vartheta \vee \psi, \psi \wedge \vartheta, \vartheta \wedge \psi, \psi \equiv \vartheta, \vartheta \equiv \psi,$$

równoważność $\chi \equiv \chi(\phi//\psi)$ wynika z założenia $\phi \equiv \psi$ i praw ekstensjonalności T3a-i.

2) Załóżmy, że następujące równoważności wynikają z założenia, że $\phi \equiv \psi$:

$$\chi_1 \equiv \chi_1(\phi//\psi), \quad \chi_2 \equiv \chi_2(\phi//\psi)^*$$

Z tych równoważności i praw ekstensjonalności T33a, j-m wynika równoważność $\chi \equiv \chi(\phi//\psi)$ zarówno wtedy, gdy χ jest negacją χ_1 , jak też wtedy, gdy χ jest implikacją, alternatywą, koniunkcją lub równoważnością zbudowaną z wyrażen χ_1 i χ_2 . Reguła ekstensjonalności jest więc regułą wtórną.

Na podstawie reguły ekstensjonalności i RO_E stwierdzamy, że reguła o schemacie:

$$\frac{\phi \equiv \psi}{\chi(\phi//\psi)}$$

jest regułą wtórną. Regułę tę nazywamy również regułą ekstensjonalności. Z T20 na podstawie T33a i T5b otrzymujemy:

$$\text{T34.} \quad p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Podamy jeszcze kilka tez, pomijając jednak ich dowody.

$$\text{T35.} \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$\text{T36.} \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Tezy te są prawami łączności dla alternatywy i koniunkcji. Prawa te pozwalają opuszczać nawiasy w wyrażeniach będących alternatywami lub koniunkcjami większej ilości wyrażen składowych.

$$\text{T37.} \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$\text{T38.} \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

* Nie wykluczamy przypadku, gdy w jednym tylko z wyrażen χ_1 lub χ_2 wyrażenie ψ zostało zastąpione przez wyrażenie ϕ .

Tery te są prawami przemienności dla alternatywy i koniunkcji. Na podstawie praw łączności i przemienności można w każdej wieloczłonowej alternatywie czy koniunkcji przestawić dwa dowolne jej członów.

Przy pomocy tez T31 i T32 można udowodnić:

$$\text{T39. } (p \vee q) \wedge (r \vee s) = p \wedge r \vee p \wedge s \vee q \wedge r \vee q \wedge s$$

$$\text{T40. } p \wedge q \vee r \wedge s = (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

Tera T39 jest analogiczna do arytmetycznego prawa:

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Tery T39 i T40 dają się uogólnić dla alternatyw i koniunkcji wieloczłonowych. Na ich podstawie koniunkcję alternatyw można przekształcić na równoważną jej alternatywę koniunkcyj i odwrotnie.

Na zakończenie podajemy zestawienie wtórnych reguł tworzenia dowodu oraz ważniejszych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu, wprowadzonych w tym paragrafie.

Wprowadziliśmy następujące wtórne reguły tworzenia dowodów założeniowych:

- 1) Regułę porwalającą na rozbijanie założeń, będących koniunkcjami, na ich członów i wypisywanie tych członów jako założeń (str. 21).
- 2) Regułę, według której zapisujemy dowody tez o postaci równoważności (str. 22).
- 3) Regułę porwalającą na wypisywanie założenia dowodu nie wprost przez opuszczenie znaku negacji (str. 27).
- 4) Regułę wprowadzania dodatkowych założeń oraz dołączania implikacji do dowodu (str. 31-32).
- 5) Regułę dołączania do dowodu wyrażenia sprzecznego z dodatkowym założeniem (str. 34).
- 6) Regułę tworzenia rozgałęzionych dowodów założeniowych (str. 36-37).

W dowodach tez bądź reguł korzystaliśmy z następujących wtórnych reguł dołączania nowych wierszy:

- 1) Wtórnej reguły opuszczania alternatywy (str. 24, 27).
- 2) Reguły opuszczania i dołączania podwójnej negacji (ON i DN, str. 26-27).
- 3) Reguły modus tollens (Tol., str. 28-29).
- 4) Reguły negowania alternatywy (NA, str. 35).
- 5) Reguły odrywania dla równoważności (RO_E, str. 31).
- 6) Reguły dodawania poprzedników (str. 33).

Udowodniliśmy, że regułą wtórną jest reguła podstawiania (str. 25) i reguła ekstensjonalności (str. 42-43).

Ćwiczenia

1. Udowodnić następujące prawa rachunku zdań:

- a) $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$
- b) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)]$
- c) $(p \equiv q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$
- d) $(p \equiv q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
- e) $(p \equiv q) \equiv p \wedge q \vee \sim p \wedge \sim q$
- f) $p \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- g) $p \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p \wedge r)$
- h) $\sim (p \equiv q) \equiv p \wedge \sim q \vee q \wedge \sim p$
- i) $p \rightarrow q \vee r \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
- j) $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

2. Posługując się regułą ekstensjonalności udowodnić:

- a) prawa symetryczności i przechodności dla równoważności
- b) na podstawie tez $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$ i $p \equiv p$ tezę $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (\sim p \rightarrow q) \rightarrow r$
- c) na podstawie tez $\sim \sim p \equiv p$ i $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$ tezę $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$
- d) na podstawie tez $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$ i $p \rightarrow (p \vee q)$ tezę $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$.

3. a) Sformułować i udowodnić prawo logiczne, przy którego pomocy na podstawie tery

(I) Przez dwa różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta

można udowodnić tezę

(II) Dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny

i na odwrót, na podstawie (II) można udowodnić (I).

Wskazówka: zapisać (I) w postaci:

$$\sim (A = B) \wedge A \text{ i } B \text{ leżą na } a \text{ i } b \rightarrow a = b,$$

analogicznie zapisać (II).

b) Sformułować i udowodnić prawo logiczne, na którego podstawie ze zdań: $|a| > |b| \rightarrow \rightarrow a^2 > b^2$, $c > 0 \wedge a^2 > b^2 \rightarrow ca^2 > cb^2$ wynika zdanie: $c > 0 \wedge |a| > |b| \rightarrow ca^2 > cb^2$.

4. Podać sformalizowane dowody:

- a) tery $\sim (x > x)$ na podstawie tery $x > y \rightarrow \sim (y > x)$
- b) tery $a > b \wedge \sim (c = 0) \rightarrow \sim (ac = bc)$ na podstawie tez: $a > b \wedge c > 0 \rightarrow ac > bc$, $a > b \wedge c < 0 \rightarrow ac < bc$, $\sim (a = b) \equiv a > b \vee a < b$.

5. Udowodnić na podstawie tez: $a > b \vee a = b \vee a < b$, $a^2 > b^2 \rightarrow \sim (a^2 = b^2 \vee a^2 < b^2)$, $a > b \rightarrow a^2 > b^2$, $a = b \rightarrow a^2 = b^2$, $a < b \rightarrow a^2 < b^2$, $a^2 < b^2 \rightarrow \sim (a^2 = b^2 \vee a^2 > b^2)$, $a^2 < b^2 \rightarrow \sim (a^2 = b^2 \vee a^2 > b^2)$, $a > b \rightarrow a^2 > b^2$, $a = b \rightarrow a^2 = b^2$, $a < b \rightarrow a^2 < b^2$ tery: $a^2 > b^2 \rightarrow a > b$, $a^2 = b^2 \rightarrow a = b$, $a^2 < b^2 \rightarrow a < b$. Dlaczego analogiczny dowód dla drugich potęg liczb a i b nie może być przeprowadzony?

§ 4. SPRAWDZANIE ZEROJEDYNKOWE. FUNKTORY PRAWDZIWOŚCIOWE

Zerojedynkowa metoda sprawdzania wyrażań rachunku zdań porwała rozstrzygnąć w skończonej ilości określonych kroków o każdym wyrażeniu tego rachunku, czy jest ono prawdziwe, tzn. czy wszystkie zdania dające się uzyskać z tego wyrażenia przez podstawienie dowolnych zdań za zmienne są prawdziwe. Nazwa metody zerojedynkowej pochodzi stąd, że używamy naj-

częściej przy jej stosowaniu symbolu „1” dla oznaczania prawdziwości zdania, symbolu zaś „0” dla oznaczania fałszywości zdania. Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi. Pojęcie prawdy zostało dokładnie zdefiniowane w metodologii nauk dedukcyjnych, nie będziemy tu jednak rozważać tej definicji. Ograniczymy się tylko do uwagi, że — zgodnie z intuicyjnym sensem terminów „prawda”, „fałsz” — przyjmujemy zasadę dwuwartościowości, według której istnieją tylko dwie wartości logiczne, tzn. że każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe. Przyjmujemy też, co jest równie oczywiste, że te dwie wartości logiczne wykluczają się, tzn. że żadne zdanie nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe.

Metodę zerojedynkową nazywa się też metodą matrycową, gdyż posługujemy się w niej tzw. tabelkami matrycowymi, które przedstawiają, w jaki sposób wartość logiczna zdania złożonego, utworzonego przy pomocy danego funktora rachunku zdań, jest wyznaczona przez wartości logiczne zdań składowych.

Własności negacji ujmuje następująca tabelka:

ϕ	$\sim\phi$
1	0
0	1

Pierwszy pod kreską wiersz tej tabelki stwierdza, że zdanie $\sim\phi$ jest fałszem, gdy ϕ jest prawdą, drugi — że $\sim\phi$ jest prawdą, gdy ϕ jest fałszem. Te własności negacji są całkowicie zgodne z jej potocznym sensem.

Własności negacji mogliśmy ująć w prostą tabelkę dzięki temu, że wartość logiczna negacji zależy tylko od wartości logicznej zdania zanegowanego, a nie od jego treści. Analogiczną własność mają: koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność — wartość logiczna tych zdań złożonych jest wyznaczona przez wartości logiczne ich zdań składowych.

Funktory tworzące ze swymi argumentami zdania złożone o powyższej własności nazywamy funktorami prawdziwościowymi. Funktory rachunku zdań są więc funktorami prawdziwościowymi. Nie każdy jednak funktor o argumentach zdaniowych jest funktorem prawdziwościowym. Np. funktor „Jan wie, że” występujący w wyrażeniu

Jan wie, że p

nie jest funktorem prawdziwościowym, chyba że Jan jest wszechwiedzący.

Opierając się na tabelce dla negacji można wyprowadzić tabelki dla koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności, o ile przyjmujemy, że reguły pierwotne dołączania nowych wierszy do dowodu prowadzą zawsze od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych oraz że wyrażenia dające się udowodnić przy pomocy reguły tworzenia założeniowego dowodu nie wprost są prawdziwe. Wynika stąd, że i reguły wtórne prowadzą zawsze od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych. O ile więc wszystkie wyrażenia występujące w schemacie pewnej

reguły nad kreską poziomą są prawdziwe, to prawdziwe też być musi wyrażenie pod kreską, w przypadku zaś, gdy wyrażenie to jest fałszywe, nie mogą być prawdziwe wszystkie wyrażenia nad kreską. Tak więc np. ze schematu reguły DK

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

wnioskujemy, że koniunkcja dwóch zdań prawdziwych jest prawdziwa, ze schematów zaś reguły OK

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

wnioskujemy, że koniunkcja, której pierwszy lub drugi człon jest fałszywy, jest fałszywa. W ten sposób uzasadniliśmy tabelkę dla koniunkcji:

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Według tej tabelki koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe, jest zaś fałszywa, gdy przynajmniej jeden jej człon jest fałszywy.

Uzasadnimy z kolei tabelkę dla alternatywy. Ze schematów reguły DA

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

wynika, że alternatywa, której pierwszy lub drugi człon jest prawdziwy, jest prawdziwa. Założmy teraz, że wyrażenie ψ występujące w schemacie

$$\frac{\phi \vee \psi}{\sim\phi} \quad \psi$$

reguły OA pod kreską jest fałszywe. O ile fałszywe jest też wyrażenie ϕ , a więc prawdziwe jest wyrażenie $\sim\phi$, to fałszywa być musi alternatywa $\phi \vee \psi$, w przypadku bowiem gdy pod kreską występuje zdanie fałszywe, oba zdania nad kreską nie mogą być prawdziwe. Tabelka dla alternatywy ma więc postać:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Według tej tabelki alternatywa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy, jest zaś fałszywa, gdy oba jej członów są fałszywe.

Od alternatywy utworzonej przy pomocy funktora „ $\vee$ ” odróżnia się alternatywę wykluczającą, scharakteryzowaną przez tabelkę:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Alternatywa wykluczająca jest więc prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jeden i tylko jeden z jej członów jest prawdziwy, jest zaś fałszywa, gdy oba jej członów są prawdziwe lub oba są fałszywe. Alternatywę taką nazywamy wykluczającą, gdyż prawdziwość jednego z jej członów wyklucza — przy prawdziwości całej alternatywy — prawdziwość drugiego członu. W odróżnieniu od alternatywy wykluczającej alternatywę utworzoną przy pomocy funktora „ $\vee$ ” nazywa się niekiedy alternatywą niewykluczającą, prawdziwość bowiem jednego z jej członów nie wyklucza — przy prawdziwości całej alternatywy — prawdziwości drugiego jej członu.

W języku polskim wyrazy „lub”, „albo” używane bywają zarówno jako funktory alternatywy niewykluczającej, jak też i wykluczającej. Mając do dyspozycji te dwa wyrazy przyjmujemy umowę, że wyrażenie „ $p \vee q$ ” będziemy czytać: p lub q , wyrażenie zaś „ $p \vee q$ ” będziemy czytać: p albo q .

Uzasadniając tabelkę dla implikacji oprzemy się na regule RO oraz na wtórnej ze względu na T4b regule związku między alternatywą i implikacją, mającą schemat:

$$\frac{\sim \phi \vee \psi}{\phi \rightarrow \psi}$$

Na podstawie tej ostatniej reguły oraz tabelki dla negacji i alternatywy otrzymujemy następującą tabelkę pomocniczą:

ϕ	ψ	$\sim \phi$	$\sim \phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	0	1	1	1

A więc w 1-szym, 2-im i 4-ym wypadku implikacja jest prawdziwa. W 3-im wypadku implikacja musi być fałszywa z uwagi na regułę RO:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi}$$

$$\psi$$

Jeśli bowiem ψ jest fałszywe, ϕ zaś jest prawdziwe, to $\phi \rightarrow \psi$ nie może być prawdziwe, a więc jest fałszywe.

Otrzymujemy więc dla implikacji następującą tabelkę:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Według tej tabelki implikacja jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a jej następnik jest fałszywy, w pozostałych zaś wypadkach implikacja jest prawdziwa.

Tabelkę dla równoważności otrzymujemy na podstawie tabelki dla implikacji i reguł DE i OE w następujący sposób:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \equiv \psi$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

W 1-ym i 4-ym wypadku równoważność jest prawdziwa ze względu na regułę DE, która stwierdza, że jeśli implikacja prosta i implikacja odwrotna są prawdziwe, to równoważność jest prawdziwa. W 2-im wypadku implikacja odwrotna $\psi \rightarrow \phi$ jest fałszywa, stąd zaś wynika na podstawie drugiego schematu reguły OE

$$\frac{\phi \equiv \psi}{\psi \rightarrow \phi}$$

że i równoważność $\phi \equiv \psi$ jest fałszywa. W 3-im wypadku implikacja prosta $\phi \rightarrow \psi$ jest fałszywa, a stąd na podstawie pierwszego schematu reguły OE

$$\frac{\phi \equiv \psi}{\phi \rightarrow \psi}$$

wynika, że i równoważność $\phi \equiv \psi$ jest fałszywa.

Według tej tabelki równoważność jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej członów mają tę samą wartość logiczną, jest zaś fałszywa, gdy jej członów mają przeciwne wartości logiczne.

Przy pomocy powyższych tabelki przeprowadzamy sprawdzanie zerojedynkowe wyrażen rachunku zdań. Sprawdzanie to można stosować w postaci nieskróconej i skróconej.

Nieskróconą postać sprawdzania wyjaśnimy na przykładzie wyrażenia

$$(a) \quad \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

W wyrażeniu tym występują dwie różne zmienne: p i q . Załóżmy najprzód, że wartością zmiennej p jest 1, wartością zmiennej q — 0. Aby to zaznaczyć, przepiszemy jeszcze raz wyrażenie (a) podpisując pod literą p symbol 1 w każdym miejscu, w którym ta zmienna występuje w wyrażeniu (a); w analogiczny sposób podpisujemy pod literą q symbol 0:

$$\begin{array}{cccc} \sim(p \wedge q) & \rightarrow & (\sim p \vee \sim q) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Możemy teraz obliczyć wartość wyrażen $p \wedge q$, $\sim p$, $\sim q$. Zgodnie z tabelkami dla koniunkcji i negacji pierwsze dwa z tych wyrażen mają w rozważanym przypadku wartość 0, wyrażenie trzecie ma wartość 1. Znow przepiszemy wyrażenie (a) podpisując pod funktorami koniunkcji i negacji wartości wyrażen złożonych utworzonych przez te funktory:

$$\begin{array}{cccc} \sim(p \wedge q) & \rightarrow & (\sim p \vee \sim q) \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Obliczymy z kolei wartość wyrażen $\sim(p \wedge q)$ i $\sim p \vee \sim q$. Wartością każdego z tych wyrażen jest 1, co notujemy pisząc symbol 1 pod znakiem negacji, stojącym na początku wyrażenia (a), i pod znakiem alternatywy:

$$\begin{array}{cccc} \sim(p \wedge q) & \rightarrow & (\sim p \vee \sim q) \\ 1 & & 1 \end{array}$$

W przypadku więc, gdy wartościami zmiennych p i q są odpowiednio 1 i 0, poprzednik i następnik wyrażenia (a) mają wartość 1, zgodnie więc z tabelką dla implikacji wartością wyrażenia (a) w tym przypadku jest 1, co można byłoby zaznaczyć pisząc ten symbol pod znakiem implikacji.

Rozważana czynność składa się z kilku „pięter”. W praktyce jednak wypisujemy pod zmiennymi i stałymi sprawdzanego wyrażenia symbole 1 i 0 obok siebie w jednym wierszu. W przypadku wyrażenia (a) zapis ma postać:

$$\begin{array}{ccccccc} \sim(p \wedge q) & \rightarrow & (\sim p \vee \sim q) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & \end{array}$$

Symbole podkreślone jednakową ilość razy otrzymaliśmy na tym samym „piętrze” sprawdzania, przy czym im większa jest ilość kresek, tym „wyższe” było „piętro”, na którym otrzymaliśmy daną wartość. O tym, czy dany układ wartości zmiennych sprawdza wyrażenie, decyduje wartość podkreślana największą ilością kresek. Aby wyrażenie było spełnione, wartością tą musi być 1. Sprawdziliśmy wyrażenie (a) w przypadku, gdy wartościami zmiennych p i q były 1 i 0. Należy jeszcze sprawdzić wyrażenie (a) dla trzech pozostałych

układów wartości tych zmiennych. Podajemy zapis sprawdzenia wyrażenia (a) we wszystkich czterech możliwych przypadkach:

$$\begin{array}{ccccccc} \sim(p \wedge q) & \rightarrow & (\sim p \vee \sim q) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Widzimy, że rozważane wyrażenie zawsze się sprawdza. Wyrażenie to zaliczymy więc do wyrażen prawdziwych. O ile badane wyrażenie nie sprawdza się dla jednego chociażby układu wartości swych zmiennych, zaliczymy je do wyrażen fałszywych. Tak np. wyrażenie $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ jest fałszywe, nie sprawdza się bowiem, gdy zmienna p ma wartość 0, zaś zmienna q wartość 1:

$$\begin{array}{ccccccc} (p \rightarrow q) & \rightarrow & (q \rightarrow p) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Wyrażenia sprawdzające się dla każdego układu wartości swych zmiennych są prawdziwe też w tym znaczeniu, że każde zdanie, które z nich otrzymujemy przez podstawienie za wszystkie zmienne dowolnych zdań, niezależnie od tego, z jakiej dziedziny wiedzy zdania te są zaczerpnięte i jaką mają one treść, jest zdaniem prawdziwym. Wynika to stąd, że każde zdanie ma jedną z dwóch wartości logicznych (prawda lub fałsz) oraz stąd, że wartość logiczna negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności nie zależy od treści zdań składowych, a tylko od ich wartości logicznych.

Podamy nieskrócone sprawdzenie dwóch jeszcze wyrażen. W pierwszym występuje tylko zmienna p , w drugim występują trzy zmienne: p, q, r .

$$\begin{array}{cccc} p \vee \sim p \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (p \rightarrow q) & \rightarrow & [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)] \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Zauważmy, że podpisując pod zmiennymi ich wartości logiczne, pod pierwszą zmienną piszemy na przemian symbole 1 i 0, pod drugą na przemian dwa razy 1 i dwa razy 0, pod trzecią na przemian cztery razy 1 i cztery razy 0 itp. Łatwo spostrzec, że w ten sposób uwzględnione zostaną wszystkie możliwe układy wartości zmiennych. Zauważmy też, że jeśli w wyrażeniach sprawdzanych zwiększa się liczba różnych zmiennych o jeden, to ilość układów wartości zmiennych podwaja się.

Sprawdzanie skrócone stosujemy najczęściej w wypadku wyrażen, które mają postać implikacji. Zakładamy wtedy, że poprzednik całej implikacji jest prawdziwy, i badamy, czy wówczas jej następnik może być fałszywy, i badamy, czy lub też zakładamy, że następnik całej implikacji jest fałszywy, i badamy, czy jej poprzednik może być prawdziwy. Jeśli jest wykluczone, by poprzednik był prawdziwy a następnik fałszywy, to całe wyrażenie — według tabelki dla implikacji — jest prawdziwe. Jeśli jednak taka możliwość dopuszczona jest choć w jednym wypadku, to całe wyrażenie jest fałszywe.

Przykłady sprawdzenia skróconego:

$$(1) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

1	0	0	1	1	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Wyjaśnienie: Zakładamy, że następnik całej implikacji, tj. wyrażenie $\sim q \rightarrow \sim p$, ma wartość 0. Wówczas „ $\sim q$ ” musi mieć wartość 1, zaś „ $\sim p$ ” wartość 0. Wtedy „ p ” ma wartość 1 a „ q ” wartość 0, a więc i poprzednik „ $p \rightarrow q$ ” ma wartość 0. Wykluczony jest więc wypadek, by poprzednik całej implikacji miał wartość 1 a jej następnik wartość 0, a zatem cała implikacja jest prawdziwa.

$$(2) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

0	1	1	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Zakładamy, że następnik ma wartość 0. Wówczas „ q ” ma wartość 1 a „ p ” ma wartość 0. Wtedy poprzednik „ $p \rightarrow q$ ” ma wartość 1. Całe wyrażenie ma więc wartość 0.

$$(3) \quad \sim(p \vee q) \rightarrow \sim p \wedge \sim q$$

1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Zakładamy, że poprzednik, tj. wyrażenie „ $\sim(p \vee q)$ ”, ma wartość 1. Wtedy „ $p \vee q$ ” ma wartość 0, a więc „ p ” i „ q ” mają wartość 0. Wówczas jednak „ $\sim p$ ” i „ $\sim q$ ” mają wartość 1, a więc i wyrażenie „ $\sim p \wedge \sim q$ ” ma wartość 1. Przy prawdziwym poprzedniku prawdziwy jest więc i następnik, a zatem całe wyrażenie jest prawdziwe.

Przy pomocy metody zerojedynkowej można sprawdzić nie tylko wyrażenia rachunku zdań, ale i schematy reguł rachunku zdań, badając ich prawdziwość. Reguła rachunku zdań jest poprawna, jeśli nigdy od wyrażen prawdziwych nie prowadzi do wyrażenia fałszywego. Poprawność reguł można również badać sposobem nieskróconym i skróconym.

Przykłady skróconego sprawdzania schematów reguł rachunku zdań:

$$(1) \quad \begin{array}{r} \phi \rightarrow \psi \\ 1 \ 1 \ 1 \\ \sim \psi \\ 0 \ 1 \\ \hline \sim \phi \\ 0 \ 1 \end{array}$$

Jeśli wniosek, tj. $\sim \phi$, jest fałszywy, to ϕ ma wartość 1. Aby pierwsza przesłanka była prawdziwa, ψ musi mieć wartość 1, ale wówczas $\sim \psi$, a więc druga przesłanka, ma wartość 0. Jest zatem wykluczone, by obie przesłanki były prawdziwe a wniosek fałszywy, a więc reguła ta jest poprawna.

$$(2) \quad \begin{array}{r} \sim \phi \wedge \sim \psi \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \sim(\phi \vee \psi) \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Jeśli przesłanka jest prawdziwa, to ϕ i ψ mają wartość 0. Wówczas $\phi \vee \psi$ ma wartość 0, wniosek zaś, tj. $\sim(\phi \vee \psi)$, ma wartość 1. Jeśli zatem przesłanka jest prawdziwa, to i wniosek jest prawdziwy, a więc reguła jest poprawna.

Funktory, których tabelki zostały omówione, nie są wszystkimi funktorami prawdziwościowymi. Np. funktorów prawdziwościowych jednoargumentowych jest cztery, na co wskazuje następująca tabelka:

ϕ				
1	0	1	0	1
0	1	0	0	1

Spośród tych funktorów interesujący jest jednak tylko funktor negacji.

Funktorów prawdziwościowych dwuargumentowych jest szesnaście, gdyż na tyle sposobów można wypełnić ostatnią kolumnę tabelki:

ϕ	ψ	
1	1	
0	1	
1	0	
0	0	

Podamy tu jeszcze tabelki dwóch dwuargumentowych funktorów prawdziwościowych, mianowicie znaku dysjunkcji „/” i znaku łącznej negacji „ $\downarrow$ ”. Wyrażenie „ p/q ” czytamy: albo p , albo q ; wyrażenie „ $p \downarrow q$ ” czytamy: ani p ,

ani q . Wyrażenie „ p/q ” jest negacją wyrażenia „ $p \wedge q$ ”, wyrażenie „ $p \downarrow q$ ” jest negacją wyrażenia „ $p \vee q$ ”. Funktory te są określone przez tabelki:

ϕ	ψ	ϕ/ψ	$\phi \downarrow \psi$
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
0	0	1	1

Funktory te można też wprowadzić do systemu rachunku zdań przy pomocy następujących reguł dołączania i opuszczania:

DD	$\frac{\sim\phi}{\phi/\psi}$	$\frac{\sim\psi}{\phi/\psi}$
OD	$\frac{\phi/\psi}{\phi}$	$\frac{\phi}{\sim\psi}$
DL	$\frac{\sim\phi}{\sim\psi}$	$\frac{\sim\psi}{\phi \downarrow \psi}$
OL	$\frac{\phi \downarrow \psi}{\sim\phi}$	$\frac{\phi \downarrow \psi}{\sim\psi}$

Znaki dysjunkcji i łącznej negacji wyróżniają się wśród dwuargumentowych funktorów prawdziwościowych tym, że przy pomocy każdego z nich można zdefiniować wszystkie pozostałe funktory prawdziwościowe*. Wyjaśnimy ostatni zwrot na przykładzie znaku dysjunkcji i znaku koniunkcji. Znak koniunkcji daje się zdefiniować przy pomocy znaku dysjunkcji — to tyle, co: istnieje wyrażenie zapisane wyłącznie przy pomocy znaku dysjunkcji i zmiennych p i q , przybierające dla każdego układu wartości zmiennych te same wartości, które przybiera wyrażenie $p \wedge q$ dla tego układu.

Podajemy przykładowo definicje negacji, koniunkcji i alternatywy przy pomocy tych znaków:

$$\begin{aligned}\sim p &\equiv p/p \\ p \wedge q &\equiv (p/q)/(p/q) \\ p \vee q &\equiv (p/p)/(q/q) \\ \sim p &\equiv p \downarrow p \\ p \wedge q &\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\ p \vee q &\equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\end{aligned}$$

Definicje te można sprawdzić przy pomocy metody zerojedynkowej, przekonując się w każdym wypadku, że wyrażenia występujące po obu stronach

* Szczegółowe uwagi o definicjach w rachunku zdań podamy w § 6.

definicji mają tę samą wartość logiczną dla tych samych układów wartości zmiennych. W ten sam sposób sprawdzamy wszystkie definicje rachunku zdań.

Do rachunku zdań wprowadzić możemy też funktory trój-, cztero- i więcej argumentowe. Funktory te nie są jednak interesujące ani ze względów formalnych, ani intuicyjnych. Zauważmy też, że wszystkie funktory prawdziwościowe o ilości argumentów większej od 2, dają się łatwo zdefiniować przy pomocy funktorów prawdziwościowych jedno- i dwuargumentowych.

Jak zostało to już poprzednio zaznaczone, znaki $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ są funktorami prawdziwościowymi, a więc wartość logiczną zdań utworzonych przy pomocy tych funktorów nie zależy od treści zdań składowych. W przypadku pierwszych trzech funktorów nie budzi to intuicyjnych sprzeczności. Inaczej jest jednak w przypadku znaków implikacji i równoważności.

Według podanej tabelki implikacja jest prawdziwa, jeśli poprzednik jest fałszywy. Tak samo jest ona prawdziwa, jeśli następnik jest prawdziwy. Prawdziwe są więc następujące implikacje:

- (a) Paryż jest stolicą Turcji $\rightarrow$ Kraków leży nad Odrą
(b) Warszawa leży nad morzem $\rightarrow$ Mars jest planetą

Przykłady tego rodzaju budzą jednak pewien sprzeciw natury intuicyjnej. Źródłem tego sprzeciwu jest fakt, że wyrażenie „ $p \rightarrow q$ ” czytamy: jeśli p , to q , spójnik zaś „jeśli..., to...” używany jest często w znaczeniach, przy których zdania powstające z implikacji (a), (b) przez zastąpienie znaku $\rightarrow$ przez spójnik „jeśli..., to...” nie są prawdziwe. Między innymi wyróżnić można następujące znaczenia zwrotu „jeśli p , to q ”:

- 1) z tego, że p , wynika to, że q (lub: ze zdania p wynika zdanie q);
- 2) nie jest możliwe, że (p i nie q);
- 3) nieprawda, że (p i nie q);
- 4) to, że p , jest przyczyną tego, że q .

Jak widać z tabelki dla implikacji, znakowi implikacji „ $\rightarrow$ ” odpowiada trzecie z podanych powyżej znaczeń spójnika „jeśli..., to...”. Przy tym znaczeniu jest oczywiste, że np. implikacja (a) jest prawdziwa, gdyż znaczy tyle, co zdanie:

Nieprawda, że (Paryż jest stolicą Turcji i Kraków nie leży nad Odrą).

Koniunkcja bowiem zanegowana w powyższym zdaniu jest fałszywa ze względu na fałszywość pierwszego jej członu, a więc jej negacja jest prawdziwa.

Trzeba jednak przyznać, że spójnik „jeśli..., to...” jest raczej rzadko używany w mowie potocznej w trzecim znaczeniu, a częściej w trzech pozostałych. Przy tych zaś pozostałych znaczeniach nie jest prawdą, że okres warunkowy o fałszywym poprzedniku lub prawdziwym następniku jest prawdziwy.

Dwa pierwsze z podanych powyżej znaczeń spójnika „jeśli..., to...” zostały sprecyzowane w logice. Mianowicie drugie z tych znaczeń zostało sprecyzowane w systemie tzw. implikacji ścisłej, zbudowanym przez logika amery-

kańskiego Lewisa. W systemie tym nie obowiązują odpowiedniki niektórych tez podanych w poprzednim paragrafie, powstające z nich przez zastąpienie znaku „ $\rightarrow$ ” przez znak implikacji ścisłej, w szczególności odpowiednik tezy:

$$\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

jak też odpowiedniki tez:

$$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q), \quad q \rightarrow (p \rightarrow q),$$

na których podstawie można byłoby uzasadnić tabelkę dla implikacji. W odróżnieniu od implikacji ścisłej implikację utworzoną przy pomocy funktora prawdziwościowego „ $\rightarrow$ ” nazywa się implikacją materialną.

Pojęcie wynikania* zostało zdefiniowane w metodologii nauk dedukcyjnych. Podamy tu jedną z definicji tego pojęcia, w której posługujemy się pojęciem prawa logicznego. W definicji znowuż tego ostatniego pojęcia posługujemy się pojęciem stałej logicznej.

Stalymi logicznymi są funktory rachunku zdań, symbole „ $\wedge$ ”, „ $\vee$ ”, „ $\neg$ ”, „ $\rightarrow$ ”, „ $\leftrightarrow$ ” itp. Stałe logiczne są terminami, które są używane przy formułowaniu twierdzeń z różnych dziedzin wiedzy.

Prawa logiczne są to wzory mające dwie własności:

- 1) zbudowane są tylko ze stałych logicznych i zmiennych,
- 2) są prawdziwe***, tj. sprawdzają się dla wszystkich wartości zmiennych.

Przykładami praw logicznych są tezy rachunku zdań oraz znane zapewne czytelnikowi ze szkoły średniej prawa:

- (a) Jeśli żadne S nie jest P , to żadne P nie jest S ; symbolicznie: $S \subset P \rightarrow P \subset S$
- (b) Jeśli każde S jest P , to nieprawda, że pewne S nie jest P ; symbolicznie: $S \supset P \rightarrow \sim (S \subset P)$

Z licznymi prawami logicznymi zaznajomimy się w następnym rozdziale.

Przy pomocy pojęcia prawa logicznego określamy pojęcie wynikania (logicznego) w następujący sposób****:

Ze zdania Z_1 wynika zdanie Z_2 wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja o poprzedniku Z_1 i następniku Z_2 jest podstawieniem jakiegoś prawa logicznego.

Ze zdań $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ wynika zdanie Z wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja, której poprzednikiem jest koniunkcja zdań $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ a następnikiem zdanie Z , jest podstawieniem jakiegoś prawa logicznego.

Przykłady:

Ze zdania (1) „Żaden wieloryb nie jest rybą” wynika zdanie (2) „Żadna ryba nie jest wielorybem”, gdyż implikacja o poprzedniku (1) i następniku (2) jest podstawieniem prawa logicznego (a).

* Termin „wynikanie” używamy tu zamiennie z terminem „wynikanie logiczne”.

** O kwantyfikatorach i relacji identyczności mowa będzie w następnym rozdziale.

*** W sprawie pojęcia prawdziwości por. rozdz. II, § 3, str. 106.

**** Definię tę podał K. Ajdukiewicz w pracy: *Logiczne podstawy nauczania*. 1934.

Ze zdania (3) „Każdy kwadrat jest prostokątem” wynika zdanie (4) „Nieprawda, że pewien kwadrat nie jest prostokątem”, gdyż implikacja o poprzedniku (3) i następniku (4) jest podstawieniem prawa logicznego (b).

Ze zdań: (5) „Jeśli dziś jest piątek, to jutro jest sobota”, (6) „Jeśli jutro jest sobota, to pojutrze jest niedziela” wynika zdanie (7) „Jeśli dziś jest piątek, to pojutrze jest niedziela”. Implikacja bowiem, której poprzednik jest koniunkcją zdań (5) i (6), a następnik zdaniem (7), jest podstawieniem prawa logicznego

T1.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Na gruncie podanego powyżej określenia nie jest prawdą, że ze zdania fałszywego wynika dowolne zdanie lub że zdanie prawdziwe wynika z dowolnego zdania. Nie jest więc poprawne czytanie wyrażenia „ $p \rightarrow q$ ” jako wyrażenia „z p wynika q ”.

Pojęcie wynikania (logicznego) jest ważnym pojęciem metodologii nauk, którym posługujemy się przeprowadzając klasyfikację wnioskowań i dokonując podziału nauk. Wnioskowanie dedukcyjne określa się mianowicie jako takie wnioskowanie, w którym wniosek wynika (logicznie) z przesłanek. Wszystkie schematy poprawnego wnioskowania podane w tym podręczniku są właśnie schematami wnioskowania dedukcyjnego. Nauki, w których stosuje się wyłącznie dedukcyjne metody wnioskowania, nazywa się naukami dedukcyjnymi.

Zdając sobie sprawę z istnienia innych znaczeń spójnika „jeśli..., to” warto jednak zwrócić uwagę, że tabelka dla implikacji została wyprowadzona na podstawie reguł pierwotnych podanych w § 2 oraz pewnej reguły wtórnej ze względu na te reguły. Spośród zaś reguł pierwotnych reguły dołączania nowych wierszy do dowodu są całkowicie intuicyjne (obowiązują one też w systemie ścisłej implikacji). Reguły zaś tworzenia dowodów nie wydają się budzić silniejszych sprzeciwów intuicyjnych, stosowane są one też powszechnie w dowodach matematycznych.

Odróżnienia analogiczne do tych, które podaliśmy dla implikacji, można przeprowadzić dla równoważności. Równoważność jest koniunkcją dwóch implikacji, prostej i odwrotnej. Jeśli te implikacje są implikacjami materialnymi, mówimy o równoważności materialnej, jeśli są one implikacjami ścisłymi, mówimy o równoważności ścisłej. Jeśli dwa zdania wzajemnie ze siebie wynikają, mówimy, że są one logicznie równoważne.

Funkcjami prawdziwościowymi, tj. wyrażeniami utworzonymi przy pomocy funktorów prawdziwościowych, zajmowano się w starożytności (stoicy i megarejczycy) oraz w średniowieczu (głównie w XIII-XV w.).

Stoicy zwracali uwagę na to, że negację zdania tworzy się przez umieszczenie przed tym zdaniem znaku zaprzeczenia zdaniowego, i odróżniali zaprzeczenie całego zdania od poprzedzania znakiem przeczenia pewnych części zdania. Nie znajdujemy jednak u nich praw odpowiadających tabelce dla

negacji. Prawa takie można znaleźć u logików średniowiecznych, np. u Buridana (XIV w.).

Koniunkcję określali stoicy jako zdanie złożone utworzone przy pomocy spójnika „i” i stwierdzali, że koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe. Takie same warunki prawdziwości koniunkcji formułowali logicy średniowieczni.

Termin „dysjunkcja” był używany przez stoików przede wszystkim dla oznaczania alternatywy wykluczającej. Są też jednak pewne teksty wskazujące na to, że używali oni również tego terminu dla oznaczania dysjunkcji w dzisiejszym sensie.

Od XIII w. używano tego terminu głównie dla oznaczania alternatywy niewykluczającej, choć jeszcze i w XIV w. byli zwolennicy stoickiego rozumienia takiego zdania. Piotr Hiszpan (XIII w.) stwierdza, że dla prawdziwości alternatywy potrzeba, by jeden z jej członów był prawdziwy, że jest dopuszczalne, by oba jej człony były prawdziwe, i że dla fałszywości jej potrzeba fałszywości obu jej członów. Zdecydowanym zwolennikiem rozumienia „dysjunkcji” jako alternatywy niewykluczającej jest Burleigh (XIV w.), który zwraca uwagę na to, że zdanie takie wynika z każdego ze swych członów; stąd zaś wynika, że jeśli oba człony są prawdziwe, to cała alternatywa jest prawdziwa.

Największe spory w starożytności i w średniowieczu, podobnie zresztą jak i w dobie współczesnej, związane były z interpretacją okresu warunkowego.

Filon Megarejczyk (ok. 300 przed Chr.) pierwszy określił okres warunkowy jako zdanie, które jest fałszywe tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy, i które jest prawdziwe w pozostałych trzech przypadkach. Określeniem tym zapoczątkował spory na temat rozumienia implikacji, które doprowadziły do sformułowania, w szkole megarejsko-stoickiej, jeszcze trzech innych określeń. Wśród nich pojawia się antyczna postać ścisłej implikacji w następującym określeniu: okres warunkowy jest prawdziwy, gdy negacja jego następnika jest niezgodna z jego poprzednikiem. Spory na ten temat musiały być bardzo żywe, skoro Kallimach, bibliotekarz w Aleksandrii w II w. przed Chr., uwiecznił je w epigramacie „Kraczą już kruki na dachach, które implikacje są trafne”.

Spory na ten temat ożyły jeszcze silniej w XIV i XV w. i doprowadziły do wyodrębnienia różnych znaczeń okresu warunkowego oraz do zbudowania różnych systemów rachunku zdań, w szczególności systemu odpowiadającego, z jednej strony, współczesnemu systemowi implikacji materialnej, z drugiej zaś — współczesnemu systemowi implikacji ścisłej.

Twórcą współczesnego rachunku zdań jest G. Frege (1848-1925), największy logik w okresie od Arystotelesa do XX wieku. Opiera on swój system, opublikowany w r. 1879, na negacji i implikacji rozumianej tak, jak ją określał Filon Megarejczyk. Współczesne tabelki dla implikacji i innych funktorów prawdziwościowych wprowadził około 1885 r. logik amerykański Peirce. On

też zwrócił uwagę na to, że Filon Megarejczyk pierwszy podał określenie implikacji materialnej. Peirce'owi również znany był (około r. 1880) fakt, że przy pomocy znaku dysjunkcji lub też znaku łącznej negacji można zdefiniować pozostałe funktory prawdziwościowe. Wynik ten jednak nie został opublikowany. W r. 1921 Sheffer zwrócił uwagę na definiowalność innych funktorów prawdziwościowych przy pomocy znaku dysjunkcji. On też wprowadził symbol „/”, zwany dlatego nieraz znakiem Sheffera.

W napisanym przez B. Russella i A. N. Whiteheada, doniosłym w dziejach logiki, dziele *Principia Mathematica*, którego pierwszy tom ukazał się w roku 1910, występuje niewłaściwy sposób czytania wyrażenia „ $p \rightarrow q$ ” jako „z p wynika q ”. Taka interpretacja prowadziła do paradoksalnych konsekwencji, jak np. do tej, że dla dwu dowolnych zdań bądź pierwsze wynika z drugiego, bądź drugie wynika z pierwszego. Dla implikacji materialnej ważne jest bowiem prawo: $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, które czytelnik może z łatwością sprawdzić metodą zerojedynkową. Jako reakcja przeciw tej interpretacji powstaje system implikacji ścisłej Lewisa (1918), w którym autor wprowadza funktor możliwości „ $\Diamond$ ” (wyrażenie „ $\Diamond p$ ” czytamy: „jest możliwe, że p ”) i definiuje znak implikacji ścisłej „ $\rightarrow$ ” w następujący sposób:

$$p \rightarrow q = \sim \Diamond (p \wedge \sim q) *.$$

Wyrażenie „ $p \rightarrow q$ ” czyta też Lewis: „z p wynika q ”. A więc: z p wynika q wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest możliwe, że (p i nie q).

Później jednak zwrócono uwagę na to, że pojęcie wynikania należy do pojęć metasystemowych i że daje się ono określić bez modyfikowania rachunku zdań.

Pierwsze w historii logiki próby określenia wynikania logicznego pochodzą od logików XIII-XV w., którzy mówią o „konsekwencji formalnej” (odróżniając ją od konsekwencji materialnej, odpowiadającej dzisiejszej implikacji materialnej). Pojęcie to określają oni przy pomocy pojęcia formy zdania bądź konsekwencji (czyli wnioskowania).

Według np. określenia Buridana do formy logicznej zdania (czy konsekwencji) należą tzw. wyrazy synkategorematiczne, które dziś nazywamy stałymi logicznymi, oraz liczba i uporządkowanie wyrazów. W myśl tego określenia — jak podaje Buridan — np. zdania „Człowiek jest człowiekiem” i „Człowiek jest osłem” mają różną formę (ze względu na liczbę terminów). Różną formę mają również zdania „Każdy człowiek jest istotą żyjącą” i „Istotą żyjącą jest każdy człowiek” (ze względu na uporządkowanie wyrazów). Również konsekwencje „Każde B jest A , a więc pewne B są A ” oraz „Każde B jest A , a więc pewne A są B ” mają różną formę.

Te określenia formy logicznej są bardzo zbliżone do określenia dzisiejszego, które można by sformułować w następujący sposób: forma logiczna zdania

* W systemie Lewisa symbol „ $=$ ” jest znakiem ścisłej równoważności.

(czy też wnioskowania rozumianego jako pewien ciąg zdań) jest to wyrażenie (czy też ciąg wyrażeń) powstające z danego zdania (czy też z danego ciągu zdań) przez zastąpienie stałych pozalogicznych przez zmienne, przy czym te same stałe zastępujemy przez te same zmienne, różne zaś stałe przez różne zmienne.

Formalną konsekwencję określa Albert Saksończyk jako taką, że każda konsekwencja o tej samej formie jest ważna (tzn. od prawdy nie prowadzi do fałszu). Podobne określenie znajdujemy wcześniej, np. u Dunsa Szkota.

W pierwszej połowie XIX w. B. Bolzano podał definicję wynikania zbliżoną do współczesnej nam definicji Tarskiego (z r. 1935). Definicja Tarskiego jest równoważna z definicją Ajdukiewicza, jeśli chodzi o wynikanie danego zdania ze skończonej klasy zdań. Jest ona jednak o tyle ogólniejsza, że na jej gruncie można też mówić o wynikaniu danego zdania z nieskończonej klasy zdań.

Ćwiczenia

1. Sprawdzić metodą zerojedynkową następujące wyrażenia rachunku zdań:

- $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$
- $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim p \wedge \sim q$
- $\sim p \vee \sim q \rightarrow \sim(p \vee q)$
- $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow p \wedge (q \rightarrow r)$
- $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$
- $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow q$
- $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q)$
- $[(p = q) = r] = [q = (p = r)]$

2. Zdefiniować:

- znaki alternatywy, implikacji i dysjunkcji przy pomocy znaku koniunkcji i negacji;
- znaki koniunkcji, implikacji i dysjunkcji przy pomocy znaku alternatywy i negacji;
- znaki koniunkcji, alternatywy i dysjunkcji przy pomocy znaku implikacji i negacji;
- znak implikacji przy pomocy znaku dysjunkcji;
- znak implikacji przy pomocy znaku łącznej negacji.

3. Zbadać przy pomocy metody zerojedynkowej, które z praw obowiązujących dla alternatywy niewykluczającej są ważne dla alternatywy wykluczającej.

- Wykazać, że przy pomocy implikacji nie można zdefiniować negacji;
 - Wykazać, że przy pomocy negacji i równoważności nie można zdefiniować implikacji.
5. Wykazać, że przy pomocy znaków alternatywy, koniunkcji i negacji można zdefiniować każdy z pozostałych funktorów prawdziwościowych.

Wskazówka: zwrócić uwagę na to, że na podstawie tabelki n -argumentowego funktora prawdziwościowego można dla wyrażenia utworzonego przy pomocy tego funktora i zmiennych podać równoważne wyrażenie zanotowane przy pomocy tych zmiennych oraz znaków negacji, koniunkcji i alternatywy; np. dla wyrażenia $p \rightarrow q$ takim wyrażeniem równoważnym jest wyrażenie $p \wedge q \vee \sim p \wedge q \vee \sim p \wedge \sim q$.

§ 5. NIESPRZECZNOŚĆ, PEŁNOŚĆ I ZUPEŁNOŚĆ ZAŁOŻENIOWEGO SYSTEMU RACHUNKU ZDAŃ

Wyrażenie rachunku zdań przybierające według tabelki podanych w § 4 wartość 1 dla każdego układu wartości zmiennych nazywamy wyrażeniem prawdziwym rachunku zdań lub tautologią tego rachunku. Wyrażenia rachunku wymi. Jak łatwo stwierdzić, wszystkie tezy udowodnione w § 3 są wyrażeniami prawdziwymi. Powstaje pytanie, czy każda teza dająca się udowodnić przy pomocy reguł założeniowego systemu rachunku zdań jest wyrażeniem prawdziwym. Odpowiedź na to pytanie podaje

Tw. 1. Każda teza założeniowego systemu rachunku zdań jest wyrażeniem prawdziwym.

Dowód tego twierdzenia jest dowodem indukcyjnym ze względu na rząd tezy.

Założmy, że wyrażenie:

$$(I) \quad \phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots\}$$

jest tezą rzędu 1-go. Przyjmijmy, jako założenie dowodu nie wprost, że wyrażenie (I) nie jest prawdziwe. Dla pewnego więc układu wartości swych zmiennych wyrażenie (I) przyjmuje wartość 0, co zachodzi wówczas, gdy dla tego układu wartości zmiennych wyrażenia $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ mają wartość 1, zaś wyrażenie ϕ_n ma wartość 0. Wyrażenie $\sim \phi_n$ ma więc dla tego układu wartości zmiennych wartość 1. Z założenia, że (I) jest tezą rzędu 1-go wynika, że istnieje założeniowy dowód nie wprost wyrażenia (I), w którym z założeń $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \sim \phi_n$ wyprowadzone są według reguł RO, DK, OK, DA, OA, DE i OE dwa wyrażenia sprzeczne. Jednakże wymienione reguły pierwotne od wyrażeń mających dla danego układu wartości zmiennych wartość 1 prowadzą do wyrażeń mających dla tego układu wartości zmiennych także wartość 1. Skoro zaś wszystkie założenia dowodu, tj. wyrażenia $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \sim \phi_n$, mają dla pewnego układu wartości zmiennych wartość 1, to i wszystkie wyrażenia uzyskane z nich przy pomocy tych reguł mają wartość 1 dla tego układu wartości zmiennych. Jest to jednak sprzeczne z tym, że w dowodzie tezy (I) występują dwa wyrażenia sprzeczne. Jeśli bowiem jedno z nich ma wartość 1 dla danego układu wartości zmiennych, to drugie ma dla tego układu wartości 0. Założenie więc, że (I) nie jest prawdziwe, prowadzi do sprzeczności. A więc każda teza rzędu 1-go jest prawdziwa.

Przyjmijmy — jako założenie indukcyjne — że każda teza rzędu mniejszego od n jest prawdziwa. Niech wyrażenie (I) będzie tezą rzędu n -go. Istnieje więc założeniowy dowód nie wprost, w którym dwa wyrażenia sprzeczne wyprowadzone są z założeń dowodu $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \sim \phi_n$ i tez rzędu mniejszego od n . Jeśli przyjmujemy, jako założenie dowodu nie wprost, że wyrażenie (I)

pozwalających na przestawianie członów alternatywy, można udowodnić każdą alternatywę, w której przynajmniej jedna zmienna występuje raz ze znakiem negacji, a raz bez znaku negacji. Przy pomocy zaś reguły dołączania koniunkcji można na tej podstawie udowodnić każdą prawdziwą koniunkcyjną postać normalną.

Załóżmy, że dane wyrażenie ϕ rachunku zdań jest prawdziwe. Równoważność $\phi \equiv \phi^*$, gdzie ϕ^* jest koniunkcyjną postacią normalną wyrażenia ϕ , jest tezą rachunku zdań. W myśl tw. 1 równoważność ta jest wyrażeniem prawdziwym. Stąd i z prawdziwości wyrażenia ϕ wynika, że wyrażenie ϕ^* jest prawdziwe. Ale wówczas — jak to poprzednio wykazaliśmy — wyrażenie ϕ^* jest tezą. Z tej zaś: $\phi \equiv \phi^*$ i ϕ^* otrzymujemy tezę ϕ . Udowodniliśmy więc, że każde wyrażenie prawdziwe rachunku zdań jest tezą założeniowego systemu rachunku zdań.

System nazywamy pełnym wtedy i tylko wtedy, gdy każde wyrażenie prawdziwe zanotowane w języku tego systemu jest jego tezą. Tw. 3 można więc sformułować w następujący sposób:

Tw. 3a. Założeniowy system rachunku zdań jest systemem pełnym.

Przedstawiony tutaj dowód pełności rachunku zdań podaje zarazem pewną metodę sprawdzania wyrażen tego rachunku. Dla sprawdzenia danego wyrażenia rachunku zdań wystarczy sprowadzić je do koniunkcyjnej postaci normalnej i stwierdzić, czy jest ona wyrażeniem prawdziwym.

Oprócz koniunkcyjnej postaci normalnej znana jest również alternatywna postać normalna. Alternatywną postacią normalną danego wyrażenia rachunku zdań jest równoważne z nim wyrażenie będące zmienną lub jej negacją lub koniunkcją (dwu- lub wieloczłonową) zmiennych lub ich negacji, lub wreszcie alternatywą (dwu- lub wieloczłonową) takich koniunkcji. Sprowadzając dane wyrażenie do alternatywnej postaci normalnej korzystamy z tych samych tez i reguł co przy sprowadzaniu do koniunkcyjnej postaci normalnej, z tą różnicą, że w ostatnim etapie korzystamy inaczej z praw rozdzielności, tak, by otrzymać alternatywę koniunkcyj.

Od pełności systemu należy odróżniać jego zupełność. System jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każde wyrażenie zdaniowe zanotowane w języku tego systemu bądź jest tezą systemu, bądź z wyrażenia tego i tez systemu można wyprowadzić sprzeczność według reguł prowadzących od tez do tez.

Tw. 4. Założeniowy system rachunku zdań jest systemem zupełnym.

Dow. Załóżmy, że wyrażenie ϕ rachunku zdań nie jest tezą systemu założeniowego. Stąd i z tw. 3 wynika, że wyrażenie ϕ nie jest prawdziwe. Dla pewnego więc układu wartości zmiennych wyrażenie ϕ ma wartość 0, np. gdy zmienne $p_1, \dots, p_n$ mają wartość 1, zmienne zaś $q_1, \dots, q_k$ mają wartość 0. Reguła podstawiania w systemie założeniowym prowadzi od tez do tez. Niech ϕ^* będzie wyrażeniem uzyskanym z wyrażenia ϕ przez podstawienie wyrażenia

„ $p \rightarrow p$ ” za zmienne $p_1, \dots, p_n$, wyrażenia zaś „ $\sim(p \rightarrow p)$ ” za zmienne $q_1, \dots, q_k$. Wyrażenie ϕ^* będzie miało dla każdego układu wartości zmiennych wartość 0, a zatem jego negacja, $\sim\phi^*$, będzie wyrażeniem prawdziwym. W myśl tw. 3 $\sim\phi^*$ będzie tezą. A więc z wyrażenia ϕ i tez systemu według reguł prowadzących od tez do tez można wyprowadzić dwa wyrażenia sprzeczne: ϕ^* i $\sim\phi^*$.

Można też udowodnić, że układ reguł pierwotnych rachunku zdań podany w § 2 jest niezależny, tzn., że żadna z tych reguł nie jest wtórna ze względu na pozostałe reguły.

Przykład sprowadzania wyrażen do koniunkcyjnej postaci normalnej:

$$\begin{aligned} & [(p \equiv q) \rightarrow p] \rightarrow (p \vee q) \equiv \\ & \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow p] \rightarrow (p \vee q) \equiv \\ & \equiv \sim[\sim((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee p] \vee (p \vee q) \equiv \\ & \equiv [\sim\sim((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \wedge \sim p] \vee (p \vee q) \equiv \\ & \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim p] \vee (p \vee q) \equiv \\ & \equiv (\sim p \vee q \vee p \vee q) \wedge (\sim q \vee p \vee p \vee q) \wedge (\sim p \vee p \vee q) \equiv \\ & \equiv (\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim q \vee p \vee q) \end{aligned}$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z tez: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$ oraz praw przemienności alternatywy i koniunkcji.

Ćwiczenia

1. Sprowadzić do koniunkcyjnej postaci normalnej wyrażenia:

- $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow q$
- $[(p \equiv q) \rightarrow p] \rightarrow p$
- $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$
- $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)]$

- Udowodnić, że każde wyrażenie rachunku zdań jest równoważne alternatywnej postaci normalnej.
- Implikacją elementarną nazwiemy zmienną, jej negację oraz każde wyrażenie o postaci: $\phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow [\dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots]\}$, w którym każde z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$ jest zmienną lub negacją zmiennej. Udowodnić, że każde wyrażenie rachunku zdań jest równoważne implikacji elementarnej lub koniunkcji implikacji elementarnych.
- Sformułować strukturalne kryterium prawdziwości implikacji elementarnych.

§ 6. AKSJOMATYCZNE UJĘCIE RACHUNKU ZDAŃ

Rachunek zdań może być zbudowany również metodą aksjomatyczną. Budując system dedukcyjny metodą aksjomatyczną wybieramy pewną, zwykle niedużą, ilość zdań, których już nie dowodzimy przy pomocy innych zdań.

Zdania te są aksjomatami systemu. Wymieniamy również pierwotne reguły dowodzenia (wnioskowania), pozwalające na otrzymywanie nowych twierdzeń. Terminy występujące w aksjomatach lub wprowadzane przy pomocy pierwotnych reguł dowodzenia nazywa się terminami pierwotnymi systemu. Inne terminy systemu muszą być zdefiniowane przy pomocy terminów pierwotnych lub terminów uprzednio zdefiniowanych. Definicje mogą być wprowadzane jako reguły (wzajemnego) zastępowania wyrażeń nie zawierających terminu zdefiniowanego przez wyrażenia zawierające ten termin. Mogą one być też wprowadzane jako wyrażenia systemu, mające określoną budowę, najczęściej powstać równoważności lub równości, przyjmowane na podstawie reguł definiowania, ustalających, jakiego rodzaju definicje można dołączyć do systemu*. Regułami pierwotnymi systemu są pierwotne reguły dowodzenia i definicje wprowadzane jako reguły zastępowania. Tezami systemu są aksjomaty (i ewentualnie definicje traktowane jako wyrażenia systemu) oraz wszystkie wyrażenia dające się z nich wyprowadzić w skończonej ilości kroków przy pomocy reguł pierwotnych systemu. Dowodami twierdzeń systemu są skończone ciągi reguł pierwotnych systemu. Dowodem jest twierdzenie dowodzone i w których wyrażeniach, których ostatnim wyrazem jest twierdzenie, jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu przy pomocy jakiejś reguły pierwotnej systemu.

Większość znanych systemów aksjomatycznych stanowią systemy oparte na innych systemach aksjomatycznych, w tym sensie, że korzysta się w nich z tez lub przynajmniej reguł systemu stanowiącego podstawę danego systemu. W szczególności aksjomatyczne systemy matematyczne są oparte na (mniej lub bardziej bogatych) systemach logicznych. W systemach matematycznych przyjmuje się zwykle jako reguły dowodzenia wszystkie reguły logiczne systemu logiki stanowiącego podstawę danego systemu matematycznego. Natomiast w systemach logicznych wyraźnie wymienia się możliwie najmniejszą ilość reguł dowodzenia przyjętych jako reguły pierwotne. Aksjomatyczny rachunek zdań budowany jest jako system nie oparty na żadnym innym systemie.

Dwa systemy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy każda teza jednego systemu jest tezą drugiego systemu i każda reguła jednego systemu jest regułą drugiego systemu.

Istnieje wiele równoważnych systemów rachunku zdań o różnych aksjomatach, terminach pierwotnych i regułach pierwotnych. Wśród systemów tych mamy, z jednej strony, systemy, w których wszystkie terminy pierwotne systemu założeniowego występują jako terminy pierwotne, z drugiej zaś strony, systemy, w których niektóre z tych terminów należą do terminów zdefiniowanych.

Przykładem systemu pierwszego rodzaju jest system oparty na aksjomatach:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

* Por. rozdz. II, § 5.

3. $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow \sim \sim p$
5. $\sim \sim p \rightarrow p$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
7. $p \wedge q \rightarrow p$
8. $p \wedge q \rightarrow q$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)]$
10. $p \rightarrow p \vee q$
11. $q \rightarrow p \vee q$
12. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)]$
13. $(p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
14. $(p \equiv q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
15. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q)]$

Zamiast aksjomatów 1 i 3 wystarczy przyjąć tezę:

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

zamiast zaś aksjomatów 4, 5, 6 wystarczy przyjąć tezę:

$$(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

Regułami pierwotnymi tego systemu są reguły podstawiania i odrywania.

Spośród aksjomatycznych systemów rachunku zdań o mniejszej ilości terminów pierwotnych znane są — zależnie od doboru terminów pierwotnych — systemy implikacyjno-negacyjne, alternatywno-negacyjne, koniunkcyjno-negacyjne, system dysjunkcyjny i system, w którym terminem pierwotnym jest znak łącznej negacji. Najprostsze i najdoskonalsze systemy tego rodzaju zostały zbudowane przez Łukasiewicza. Omówimy tu jeden z najbardziej znanych systemów Łukasiewicza*.

Terminami pierwotnymi tego systemu są znaki implikacji i negacji. Terminy te są niezależne, tzn. że żaden z nich nie może być zdefiniowany przy pomocy drugiego. Rozporządzając jednak obu terminami można zdefiniować wszystkie funktory prawdziwościowe. Podamy tu tylko definicje znaków: alternatywy, koniunkcji i równoważności:

- D1. $\phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} \sim \phi \rightarrow \psi$
- D2. $\phi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{=} \sim (\sim \phi \vee \sim \psi)$
- D3. $\phi \equiv \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$

Symbol „ $\stackrel{\text{def}}{=}$ “, zwany znakiem równości definicyjnej, nie jest funktorem rachunku zdań, lecz symbolem metalogicznym. Definicje w ujęciu Łukasiewicza

* Szczegółowo omówiony jest ten system w książce: J. Łukasiewicz *Elementy logiki matematycznej*. Wyd. II, 1958.

nie są też tezami systemu, lecz częściami tzw. reguły zastępowania definicyjnego. Ogólny schemat tej reguły ma postać:

$$\phi \equiv \psi$$

$$\frac{\chi}{\chi(\phi/\psi)}$$

Reguła zastępowania definicyjnego pozwala więc dołączyć do systemu wyrażenie, które powstaje z dowolnej tezy χ przez zastąpienie pewnej jej części identycznej z prawą stroną dowolnej definicji — jej lewą stroną. Reguła ta prawie nie różni się od reguły ekstensjonalności, nie podamy więc przykładów jej zastosowań. Zauważymy tylko, że reguła pozwalająca na zastąpienie lewej strony definicji przez jej prawą stronę jest w systemie Łukasiewicza regułą wtórną (ze względu na tezę: $p \equiv p$ i wtórną w tym systemie regułą ekstensjonalności). Dlatego też nie jest tu potrzebna, jako reguła pierwotna, reguła wzajemnego zastępowania członów definicji.

Aksjomatami systemu Łukasiewicza są wyrażenia:

$$A1. \quad (p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$A2. \quad (\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$A3. \quad p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

W systemie założeniowym, który został przedstawiony w poprzednich paragrafach, aksjomaty te występowały jako tezy; były to tezy T1a, T15a i T9.

W systemie Łukasiewicza regułami pierwotnymi są — prócz reguły definicyjnego zastępowania — reguły podstawiania i odrywania.

Jako przykład dowodu w systemie Łukasiewicza podamy dowód tezy:

$$(a) \quad p \rightarrow p$$

Podstawiając w A1 na miejsce zmiennej q wyrażenie $\sim p \rightarrow q$, otrzymujemy tezę:

$$[p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)] \rightarrow \{[(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\}$$

Stosując do tej tezy i A3 regułę odrywania otrzymujemy:

$$[(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

W tezie tej podstawiamy za zmienne q i r zmienną p :

$$[(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p] \rightarrow (p \rightarrow p)$$

Stosując do tej tezy i A2 regułę odrywania otrzymujemy wyrażenie (a).

Łukasiewicz posługuje się prostym i przejrzystym sposobem notowania dowodów. Pomimo to dowody w systemie aksjomatycznym są znacznie trudniejsze i bardziej skomplikowane niż w systemie założeniowym. Zauważymy jeszcze, że w systemie aksjomatycznym każda przesłanka dowodu jest tezą. Dowody te są więc zwykłymi dowodami wprost (por. str. 17).

W stosunku do danego systemu aksjomatycznego powstają — podobnie jak w odniesieniu do systemu założeniowego — pytania metodologiczne, dotyczące m. in. jego niesprzeczności, pełności, zupełności i niezależności.

Najważniejszą z tych własności jest niesprzeczność systemu. Jak to widzieliśmy w § 3 z dwóch zdań sprzecznych można przy pomocy reguł DA i OA wyprowadzić dowolne zdanie. Jeśli więc w systemie obowiązują te reguły lub jeśli system zawiera tezę $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ i regułę RO lub też tezę $p \wedge \sim p \rightarrow q$ i reguły DK, RO, to wtedy, jeśli dwa wyrażenia sprzeczne są tezami systemu, to każde wyrażenie zdaniowe zanotowane w terminach tego systemu jest jego tezą. System sprzeczny jest więc pozbawiony wszelkiej wartości poznawczej.

Znane są dwie metody dowodów niesprzeczności: 1) metoda interpretacji, 2) metoda cechy (własności) dziedzicznej. Pojęcie interpretacji zostanie później omówione (por. cz. II, rozdz. I, § 3). Zauważymy tu tylko, że metodą interpretacji można wykazać niesprzeczność pewnego systemu aksjomatycznego korzystając — jako z przesłanki — z twierdzenia o niesprzeczności innego systemu, mianowicie tego systemu, w którym dany system interpretujemy. Metoda interpretacji jest szczególnym rodzajem metody cechy dziedzicznej.

Teoretyczną podstawą dowodów niesprzeczności metodą własności dziedzicznej jest twierdzenie wynikające z definicji pojęcia tezy systemu. Własność nazywamy dziedziczną ze względu na daną regułę dowodzenia wtedy i tylko wtedy, gdy ilekroć przesłanki mają tę własność, to i wniosek uzyskany z nich według tej reguły ma tę własność. Niesprzeczności danego systemu aksjomatycznego dowodzimy metodą cechy dziedzicznej wykazując, że istnieje własność, która przysługuje wszystkim aksjomatom i dziedziczy się według każdej z reguł pierwotnych systemu, a nie przysługuje zarazem dwom wyrażeniom sprzecznym. Jeśli bowiem wszystkie aksjomaty mają pewną własność i własność ta dziedziczy się według każdej z reguł pierwotnych systemu, to własność ta przenosi się z aksjomatów na wszystkie wyrażenia uzyskane z nich w skończonej ilości kroków według reguł pierwotnych systemu, a więc własność ta przysługuje każdej tezie systemu. Wynika stąd, że jeśli jakieś wyrażenie nie posiada tej własności, to nie jest tezą systemu. Skoro zaś własność taka nie przysługuje zarazem dwom wyrażeniom sprzecznym, to dwa wyrażenia sprzeczne nie mogą być zarazem tezami tego systemu, a więc system ten jest niespreczny.

Metodą tą dowodzimy niesprzeczności podanych tutaj aksjomatycznych systemów rachunku zdań wskazując, że każdy aksjomat jest wyrażeniem prawdziwym i że własność ta dziedziczy się według reguł podstawiania i odrywania, a nie przysługuje zarazem dwom wyrażeniom sprzecznym.

Stąd, że aksjomaty systemu są prawdziwe, i że własność ta dziedziczy się według reguł pierwotnych tych systemów, wynika również, że każda ich teza jest wyrażeniem prawdziwym.

Można też udowodnić, że oba układy aksjomatów są niezależne. Mówimy, że dany aksjomat jest niezależny od pozostałych aksjomatów systemu wtedy i tylko wtedy, gdy nie daje się udowodnić na podstawie pozostałych aksjoma-

tów według reguł pierwotnych systemu, czyli — mówiąc krótko — gdy nie jest konsekwencją pozostałych aksjomatów systemu. Układ zaś aksjomatów nazywamy niezależnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z tych aksjomatów jest niezależny od pozostałych, czyli — mówiąc inaczej — gdy żaden z aksjomatów nie jest konsekwencją pozostałych aksjomatów systemu. Metodą cechy dziedzicznej dowodzimy, że dany aksjomat jest niezależny od pozostałych aksjomatów systemu wykazując, że istnieje własność, która przysługuje pozostałym aksjomatom systemu i dziedziczy się według reguł pierwotnych systemu, stałym aksjomatom systemu i dziedziczy się według reguł pierwotnych systemu, a nie przysługuje danemu aksjomatowi. Wtedy bowiem własność ta przysługuje wszystkim konsekwencjom pozostałych aksjomatów, a stąd, że dany aksjomat nie posiada tej własności, wynika, że nie jest ich konsekwencją, czyli że jest od nich niezależny.

Niezależność systemu aksjomatycznego jest oczywiście pożądaną jego własnością, nie tak jednak zasadniczą, jak jego niesprzeczność. Niekiedy problem niezależności jest bardzo trudny i dopiero po wielu wysiłkach daje się udowodnić niezależność pewnych aksjomatycznych systemów matematycznych.

Oprócz niezależności układu aksjomatów mówimy również o niezależności układów terminów pierwotnych systemu. Układ terminów pierwotnych systemu jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z nich nie daje się zdefiniować przy pomocy pozostałych terminów pierwotnych systemu. Jak zauważyliśmy powyżej, terminy pierwotne systemu Łukasiewicza są niezależne. Natomiast układ terminów pierwotnych pierwszego z podanych tutaj aksjomatycznych systemów rachunku zdań nie jest niezależny.

Można również udowodnić, że oba podane tutaj systemy aksjomatyczne rachunku zdań są pełne i zupełne*. Warunki pełności i zupełności spełniają tylko nieliczne, i to raczej uboższe, systemy dedukcyjne. Zwykle też dowody pełności czy też zupełności systemu należą do trudniejszych i bardziej skomplikowanych dowodów metodologicznych dotyczących systemów dedukcyjnych.

Równoważność dwu systemów dedukcyjnych wykazujemy zwykle dowodząc, że każdy aksjomat jednego systemu jest aksjomatem lub tezą drugiego systemu, zaś każda reguła pierwotna jednego systemu jest regułą pierwotną lub wtórną drugiego systemu.

W ten sposób można też wykazać równoważność założeniowego systemu rachunku zdań z każdym z podanych tutaj aksjomatycznych systemów tego rachunku. Łatwo sprawdzić, że aksjomaty tych systemów są tezami systemu założeniowego i że ich reguły pierwotne są ważne w systemie założeniowym. Np. aksjomaty Łukasiewicza występują w systemie założeniowym jako tezy T1a, T15a, T9. Reguła odrywania jest jedną z reguł pierwotnych systemu założeniowego. Reguła podstawiania jest w nim regułą wtórną, co zostało wykazane w § 3. Tezy T29a, T34 i T14 są odpowiednikami definicji D1—D3

* Dowód pełności i zupełności systemu Łukasiewicza umieszczony jest w cytowanej na str. 67 książce Łukasiewicza (str. 70-77).

systemu Łukasiewicza. Na podstawie tych tez (lub ich podstawień) i reguły ekstensjonalności, podanej przy końcu § 3, można uzyskać w systemie założeniowym każdą tezę, którą otrzymujemy w systemie Łukasiewicza na podstawie D1—D3 i reguły definicyjnego zastępowania. Reguła zaś zwykłego dowodu wprost jest regułą wtórną systemu założeniowego (por. § 2, str. 17).

W dowodzie twierdzenia odwrotnego, w szczególności w dowodzie wykazującym, że reguła tworzenia założeniowego dowodu nie wprost jest regułą wtórną w systemie aksjomatycznym, istotną rolę odgrywa tzw. twierdzenie o dedukcji dla rachunku zdań.

Zanim przystąpimy do sformułowania i dowodu tego twierdzenia, zauważymy, że każdy z podanych tutaj systemów aksjomatycznych jest równoważny systemowi, w którym jedyną pierwotną regułą dowodzenia jest reguła odrywania, a w którym aksjomatami są wszystkie podstawienia aksjomatów danego systemu. Np. równoważnym z systemem Łukasiewicza jest system oparty na regule odrywania jako jedynej pierwotnej regule dowodzenia, w którym aksjomatami są wszystkie wyrażenia mające jedną z następujących trzech postaci:

$$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)]$$

$$(\sim \phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$$

$$\phi \rightarrow (\sim \phi \rightarrow \psi)$$

Dla rachunku zdań, w którym reguła odrywania jest jedyną pierwotną regułą dowodzenia, określimy pojęcie dowodu danego wyrażenia na podstawie określonych przesłanek i pojęcie konsekwencji.

Def. I. Ciąg wyrażen $\psi_1, \dots, \psi_l$ jest dowodem wyrażenia ϕ_n na podstawie wyrażen (przesłanek) $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi_i = \phi_n$ oraz dla każdego $1 \leq i \leq l$ bądź ψ_i jest aksjomatem, bądź ψ_i jest jednym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, bądź istnieją takie $k, j < i$, że $\psi_i = (\psi_j \rightarrow \psi_k)$.

Dowodem danego wyrażenia na podstawie określonego zbioru przesłanek jest więc skończony ciąg wyrażen, którego ostatnim wyrazem jest wyrażenie dowodzone i w którym każdy wyraz bądź jest aksjomatem, bądź jest jedną z przesłanek, bądź jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu przy pomocy reguły odrywania.

Def. II. $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n \equiv$ istnieje dowód wyrażenia ϕ_n na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$.

Wyrażenie „ $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n$ ” można odczytać w następujący sposób:

Wyrażenie ϕ_n jest konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$;

Wyrażenie ϕ_n jest wyprowadzalne z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$.

Tezą jest wyrażenie będące konsekwencją aksjomatów, a więc wyrażenie, dla którego istnieje dowód (na podstawie aksjomatów).

Z tych definicji wynikają następujące wnioski.

Wn. 1. Jeśli $\vdash \phi \rightarrow \psi$, to $\phi \vdash \psi$.

Jeśli bowiem ciąg $\psi_1, \dots, \psi_l$ jest dowodem tezy $\phi \rightarrow \psi$, to ciąg $\psi_1, \dots, \psi_l, \phi, \psi$ jest dowodem wyrażenia ψ na podstawie wyrażenia ϕ .

Wn. 2. Jeśli $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ i $\psi \vdash \chi$, to $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \chi$.

Dow. Załóżmy, że $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ i $\psi \vdash \chi$. Niech — w myśl założenia i Def. II — ciąg $\psi_1, \dots, \psi_l$ będzie dowodem wyrażenia ψ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$, ciąg zaś $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ — dowodem wyrażenia χ na podstawie wyrażenia ψ . Wtedy, w myśl Def. I, ciąg $\psi_1, \dots, \psi_l, \chi_1, \dots, \chi_m$ jest dowodem wyrażenia χ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Wn. 3. Jeśli $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash (\psi \rightarrow \chi)$ i $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$, to $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \chi$.

Dow. Niech — w myśl założenia i Def. II — ciąg $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_l$ będzie dowodem implikacji $\psi \rightarrow \chi$ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$, zaś ciąg $\phi_1, \dots, \phi_n, \chi_1, \dots, \chi_m$ — dowodem wyrażenia ψ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$. Wtedy, w myśl Def. I, ciąg:

$$\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_l, \chi_1, \dots, \chi_m, \chi$$

jest dowodem wyrażenia χ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Rozpatrujemy obecnie systemy rachunku zdań, w których reguła odrywania jest jedyną pierwotną regułą dowodzenia i w których tezami są wyrażenia:

- (a) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
 (b) $[\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)]$
 (c) $\phi \rightarrow \phi$

(teza (c) daje się wyprowadzić z tez (a) i (b) przy pomocy reguły odrywania).

Dla systemów rachunku zdań spełniających ten warunek ważne jest następujące twierdzenie o dedukcji:

Tw. 1. Jeśli $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n$, to $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \vdash (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n)$.

Twierdzenie to głosi, że jeśli ϕ_n jest konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, to implikacja $\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n$ jest konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$. Dla $n = 2$ tw. 1 przybiera postać:

$$\text{Jeśli } \phi_1 \vdash \phi_2, \text{ to } \vdash (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$$

Stwierdza ono, że jeśli ϕ_2 jest konsekwencją wyrażenia ϕ_1 , to implikacja $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ jest tezą.

Dowód tw. 1.

Założmy, że $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n$. Istnieje więc ciąg wyrażen

(I)

$$\psi_1, \dots, \psi_l$$

spełniający warunki podane w Def. I i będący dowodem wyrażenia ϕ_n na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Wykażemy, że ciąg wyrażen

$$(II) \quad \phi_{n-1} \rightarrow \psi_1, \dots, \phi_{n-1} \rightarrow \psi_l$$

po odpowiednim uzupełnieniu jego wyrazów, jest dowodem implikacji $\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n$ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$. Na podstawie założenia $\psi_l = \phi_n$, a więc ostatnim wyrazem ciągu (II) jest implikacja $\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n$. Niech liczba naturalna i spełnia warunek: $1 \leq i \leq l$. W myśl założenia i Def. I zachodzi jeden z następujących przypadków:

- 1°) ψ_i jest aksjomatem
 2°) ψ_i jest jednym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$
 3°) istnieją takie $k, j < i$, że $\psi_k = (\psi_j \rightarrow \psi_i)$

W przypadku 1° na podstawie tezy (a) i reguły RO wyrażenie $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i$ jest tezą.

W przypadku 2° bądź $\alpha)$ $\psi_i = \phi_{n-1}$ bądź $\beta)$ ψ_i jest jednym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$. Przy pierwszej z tych ewentualności wyrażenie $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i$ jest tezą na podstawie tezy (c). Przy drugiej zaś na podstawie tezy (a) wyrażenie $\psi_i \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i)$ jest tezą, a więc — w myśl Wn. 1 — wyrażenie $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i$ jest konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$.

W przypadku 3° wyrażenia $\phi_{n-1} \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)$, $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_j$ są wcześniejszymi od $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i$ wyrazami ciągu (II). Z nich zaś na podstawie tezy (b) uzyskujemy przy pomocy RO wyrażenie $\phi_{n-1} \rightarrow \psi_i$. A więc w ciągu (II) każdy wyraz jest bądź tezą, bądź konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$, bądź jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu przy pomocy reguły odrywania.

Ciąg (II) uzupełniamy poprzedzając każdy jego wyraz będący tezą dowodem tej tezy (na podstawie aksjomatów), każde zaś wyrażenie będące konsekwencją wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$ poprzedzamy dowodem tego wyrażenia na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$. Tak uzupełniony ciąg (II') jest dowodem implikacji $\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n$ na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$, gdyż każdy jego wyraz bądź jest aksjomatem, bądź jest jednym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$, bądź jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu przy pomocy RO, ostatnim zaś jego wyrazem jest wyrażenie $\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n$.

Zauważmy, że jeśli $n = 2$, to w przypadku 2° mamy tylko ewentualność $\alpha)$, a wtedy ciąg (II') jest dowodem tezy $\phi_1 \rightarrow \phi_2$.

Z tw. 1 — przez wielokrotne jego zastosowanie — otrzymujemy:

Tw. 2. Jeśli $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n$, to $\vdash \phi_1 \rightarrow \{\phi_2 \rightarrow [\dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots]\}$.

W obu systemach aksjomatycznych rachunku zdań podanych w tym paragrafie tezą jest wyrażenie:

$$(d) \quad (\sim \phi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\sim \phi \rightarrow \sim \psi) \rightarrow \phi]$$

mianowicie o systemie implikacji ścisłej Lewisa. System ten został najpierw zbudowany metodą aksjomatyczną, następnie znaleziono dlań tabelki matrikowe (które okazały się tabelkami nieskończenie wielowartościowymi), w ostatnich wreszcie czasach zbudowano ten system również metodą założeńiową.

2) Systemy wielowartościowe Łukasiewicza. Począwszy od r. 1918 zbudował Łukasiewicz metodą matrikową logikę trójwartościową, a następnie logikę wielowartościową. Zbudowanie logik wielowartościowych należy do najważniejszych odkryć logicznych XX w. Logikę trójwartościową budował Łukasiewicz jako system modalny, logikę nieskończenie wielowartościową próbował wiązać z rachunkiem prawdopodobieństwa. Niezależnie od Łukasiewicza logik amerykański Post zbudował również logikę wielowartościową, nie podając jednak dla nich interpretacji. Wielowartościowe systemy rachunku zdań były budowane najpierw metodą matrikową, a następnie metodą aksjomatyczną.

3) System intuicjonistycznego rachunku zdań zbudowany metodą aksjomatyczną przez Heytinga, w myśl koncepcji matematyka holenderskiego Brouwera. Dla funktorów intuicjonistycznego rachunku zdań nie są ważne odpowiedniki niektórych praw rachunku klasycznego, jak np. prawa wyłączonego środka, tezy $\sim\sim p \rightarrow p$, $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$ itd. Intuicjoniści modyfikują rachunek zdań w tym celu, by przy pomocy logiki opartej na tym rachunku nie można było dowodzić istnienia przedmiotów takiego rodzaju, których przykładu nie potrafimy podać („skonstruować”). Intuicjonizm jest jednym z kierunków w zakresie podstaw matematyki. Intuicjonistyczny rachunek zdań był następnie budowany również metodą założeńiową, tabelki zaś matrikowe, które znaleziono dla tego systemu, okazały się nieskończenie wielowartościowe.

Należy zaznaczyć, że budując nieklasyczne rachunki zdań nie musimy wiązać tego z „odrzucaaniem” systemu klasycznego. Na gruncie każdego bowiem z wymienionych systemów nieklasycznych można otrzymać — po wprowadzeniu odpowiednich definicji — jako część takiego systemu rachunek zdań klasyczny. Można więc interpretować budowę takich systemów jako „uzupełnianie” systemu klasycznego, budowanie systemu obszerniejszego. W szczególności, jeśli chcemy wprowadzić w rachunku zdań funktory modalne, musimy — jak to wykazał Łukasiewicz — przekroczyć zakres klasycznego rachunku zdań, w którym te funktory nie dają się wyrazić.

Rozdział II

RACHUNEK KWANTYFIKATORÓW

§ 1. SYMBOLE I WYRAŻENIA WĘZSZEGO RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

Rachunek kwantyfikatorów, zwany też często rachunkiem funkcyjnym lub rachunkiem predykatów, budujemy opierając się na rachunku zdań, w tym sensie, że wszystkie symbole tego rachunku włączamy do symboli rachunku kwantyfikatorów, uzupełniając je — oczywiście — nowymi symbolami. Podobnie przyjmujemy, że reguły (zarówno pierwotne, jak i wtórne) rachunku zdań obowiązują też w rachunku kwantyfikatorów, nie wyczerpując jednak wszystkich jego reguł.

W rachunku kwantyfikatorów oprócz symboli rachunku zdań występują następujące symbole:

1) Zmienne nazwowe (indywidualne):

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$$

Stosując w konkretnych rozumowaniach wzory rachunku kwantyfikatorów podstawiamy za te zmienne nazwy jednostkowe, tj. nazwy oznaczające tylko jeden przedmiot. Uwagę tę wyrażamy też często mówiąc, że zmienne nazwowe reprezentują nazwy jednostkowe. Ogólnie: mówimy, że zmienna reprezentuje pewne stałe, gdy stałe te wolno podstawiać za daną zmienną. W tym też znaczeniu zmienne zdaniowe reprezentują zdania.

2) Zmienne reprezentujące funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych, tj. wyrażenia, które wraz z pewną ilością nazw tworzą wyrażenia zdaniowe. Funktory te noszą nazwę predykatów. Predykaty dzielimy na jednoargumentowe, dwuargumentowe itp. Predykatami jednoargumentowymi są np.:

wyraz „świeci” w zdaniu „słońce świeci”,
wyrażenie „jest liczbą parzystą” w zdaniu

(1)

„4 jest liczbą parzystą”

Predykatami dwuargumentowymi są np.:
symbol „ $>$ ” w zdaniu

(2) „ $5 > 3$ ”

wyrażenie „jest wielokrotnością” w zdaniu „15 jest wielokrotnością 5”,
wyrażenie „jest ojcem” w zdaniu „Jan jest ojcem Piotra”.

Predykatami trójargumentowymi są np.:

wyrażenie „leży między... i ...” w zdaniu „Tarnów leży między Krakowem i Przemyślem”,
wyrażenie „jest wspólnym dzielnikiem... i ...” w zdaniu

(3) „4 jest wspólnym dzielnikiem 12 i 20”

Jako zmiennych reprezentujących predykaty jednoargumentowe będziemy używać liter:

$A, B, C, A_1, B_1, C_1, \dots$

Jako zmiennych reprezentujących predykaty dwuargumentowe i wieloargumentowe będziemy używać liter:

$P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, \dots$

przy czym kontekst wskazuje, ilu-argumentowe predykaty reprezentuje dana zmienna.

3) Stałe: $\prod, \sum$. Stałe te nazywamy kwantyfikatorami, a mianowicie symbol $\prod$ nazywamy kwantyfikatorem ogólnym, symbol zaś $\sum$ — kwantyfikatorem szczegółowym. Symbol „ $\prod$ ” czytamy: „dla każdego”; symbol „ $\sum$ ” czytamy: „dla pewnego” lub też „istnieje takie...”.

Wymienione symbole wyczerpują, wraz z symbolami rachunku zdań, zbiór symboli tej części rachunku kwantyfikatorów, która nazywa się węższym rachunkiem kwantyfikatorów lub też rachunkiem kwantyfikatorów pierwszego rzędu. W §§ 1-3 tego rozdziału będziemy zajmować się węższym rachunkiem kwantyfikatorów.

Podajemy indukcyjną definicję wyrażenia zdaniowego węższego rachunku kwantyfikatorów:

1a) zmienne zdaniowe są wyrażeniami zdaniowymi węższego rachunku kwantyfikatorów;

1b) wyrażenia zbudowane ze zmiennej reprezentującej n -argumentowe predykaty i następującego po niej ciągu n zmiennych nazwowych ($n \geq 1$), ujętego w nawiasy, są wyrażeniami zdaniowymi węższego rachunku kwantyfikatorów.

Wyrażenia takie nazywamy atomowymi lub molekularnymi. Wyrażeniami molekularnymi są więc np.: $A(x), A(y), B(x), R(x_1, \dots, x_n)$. W przypadku predykatów dwuargumentowych piszemy „ xRy ” zamiast „ $R(x, y)$ ”, „ xSy ” zamiast „ $S(x, y)$ ” itp.

2a) Jeśli ϕ i ψ są wyrażeniami zdaniowymi węższego rachunku kwantyfikatorów, to $\sim(\phi), (\phi) \wedge (\psi), (\phi) \vee (\psi), (\phi) \rightarrow (\psi), (\phi) \equiv (\psi)$ są wyrażeniami zdaniowymi tego rachunku;

2b) Jeśli ϕ jest wyrażeniem zdaniowym węższego rachunku kwantyfikatorów, a zaś jest zmienną nazwową, to $\prod_a(\phi)$ i $\sum_a(\phi)$ są wyrażeniami zdaniowymi tego rachunku.

3) Do zbioru wyrażeń zdaniowych węższego rachunku kwantyfikatorów należą tylko takie wyrażenia, które są zmiennymi zdaniowymi lub wyrażeniami molekularnymi, lub też są wyrażeniami utworzonymi z tych najprostszyszych wyrażeń przez jedno- lub wielokrotne stosowanie reguł 2a) i 2b).

W myśl warunków 1a) i 2a) każde wyrażenie rachunku zdań jest wyrażeniem zdaniowym rachunku kwantyfikatorów.

Wyrażenia zbudowane według warunku 2b) składają się z trzech części:

- 1) kwantyfikatora „ $\prod$ ” lub „ $\sum$ ”,
- 2) zmiennej nazwowej występującej pod kwantyfikatorem,
- 3) wyrażenia zdaniowego ϕ umieszczonego w nawiasach, zwanego zasięgiem kwantyfikatora, poprzedzającego to wyrażenie.

Jeśli ϕ jest wyrażeniem molekularnym, to nawiasy pomijamy, a więc np. zamiast „ $\prod_x (A(x))$ ” piszemy „ $\prod_x A(x)$ ”*. Pomijamy również nawiasy, jeśli ϕ zaczyna się znowu od kwantyfikatora, a więc np. zamiast „ $\prod_x (\sum_y xRy)$ ” piszemy „ $\prod_x \sum_y xRy$ ”.

Przykładami wyrażeń węższego rachunku kwantyfikatorów są wyrażenia:

$$(4) \quad \prod_x xRx$$

$$(5) \quad \prod_x \sum_y xRy$$

$$(6) \quad \prod_x \prod_y [xRy \rightarrow \sum_z (xRz \wedge zRy)]$$

$$(7) \quad \prod_x \prod_y \sum_z R(z, x, y)$$

Na tych przykładach zilustrujemy wprowadzone powyżej pojęcie zasięgu kwantyfikatora. I tak np.: w wyrażeniu (4) zasięgiem kwantyfikatora „ $\prod$ ” jest wyrażenie „ xRx ”; w wyrażeniu (5) zasięgiem kwantyfikatora „ $\sum$ ” jest wyrażenie „ xRy ”, zasięgiem zaś kwantyfikatora „ $\prod$ ” jest wyrażenie „ $\sum_y xRy$ ”; w wyrażeniu (6) zasięgiem kwantyfikatora „ $\sum$ ” jest wyrażenie „ $xRz \wedge zRy$ ”, zasięgiem kwantyfikatora „ $\prod$ ” ze zmienną „ y ” u dołu jest wyrażenie w nawia-

* Wyrażenie to czytamy: dla każdego $x, A(x)$; wyrażenie „ $\sum_x A(x)$ ” czytamy: dla pewnego $x, A(x)$.

sie graniastym, zasięgiem zaś kwantyfikatora „ $\prod$ ” ze zmienną „ x ” u dołu jest wyrażenie „ $\prod [xRy \rightarrow \sum (xRz \wedge zRy)]$ ”.

Mówimy, że dana zmienna wyrażenia ϕ nie występująca pod kwantyfikatorem jest związana w wyrażeniu ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy występuje w ϕ w zasięgu pewnego kwantyfikatora i jest identyczna ze zmienną występującą pod tym kwantyfikatorem. O kwantyfikatorze mówimy, że wiąże zmienną pod nim występującą. Np. w wyrażeniu (4) zmienna „ x ” poprzedzająca bezpośrednio zmienną „ R ” jest związana.

Zmienna wyrażenia ϕ nie występująca pod kwantyfikatorem jest wolna w wyrażeniu ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest związana w ϕ .

Np. zmienna „ x ” jest wolna w wyrażeniu „ $\sum xRy$ ”. W wyrażeniu „ $\prod A(x) \rightarrow A(x)$ ” zmienna „ x ” występująca na końcu tego wyrażenia jest wolna, zmienna zaś „ x ” poprzedzająca w tym wyrażeniu znak implikacji jest związana.

Biorąc pod uwagę warunki 2b) i 1b) definicji wyrażenia zdaniowego węższego rachunku kwantyfikatorów, można ten system scharakteryzować jako tę część całego rachunku kwantyfikatorów, w której kwantyfikatory wiążą tylko zmienne nazwowe i w której wyrażenia molekularne zawierają tylko funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych (a nie zawierają funktorów zdaniotwórczych, których argumentami są znowu funktory).

Wprowadzimy teraz ważne pojęcie funkcji zdaniowej: funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie, które zawiera zmienne wolne i z którego otrzymujemy zdania po podstawieniu stałych za wszystkie te zmienne.

Wśród funkcji zdaniowych odróżniamy funkcje zdaniowe o jednej zmiennej wolnej, np. „ x jest liczbą parzystą”; o dwóch zmiennych wolnych, np. „ $x > y$ ”; o trzech zmiennych wolnych, np. „ x jest wspólnym dzielnikiem y i z ” itp. Podstawiając w tych funkcjach zdaniowych za zmienne nazwy odpowiednich liczb, otrzymujemy podane na początku tego paragrafu zdania (1)-(3). Dobrze znanymi przykładami funkcji zdaniowych są równania. Termin „warunek” używany jest często dla oznaczania funkcji zdaniowych.

Oczywiście należy odróżnić pojęcie funkcji zdaniowej od pojęcia funkcji w sensie matematycznym. Funkcje zdaniowe są pewnymi wyrażeniami, natomiast funkcje w sensie matematycznym nie są wyrażeniami, lecz są pewnymi relacjami (por. cz. II, rozdz. I, § 6).

Wzory rachunku kwantyfikatorów interpretuje się w ten sposób, że wyrażenie „ $A(x)$ ” reprezentuje funkcje zdaniowe zawierające zmienną wolną „ x ”, wyrażenie zaś „ $R(x_1, \dots, x_n)$ ” — funkcje zdaniowe zawierające zmienne wolne $x_1, \dots, x_n$. Innymi słowy: za „ $A(x)$ ” wolno podstawiać funkcje zdaniowe zawierające zmienną wolną „ x ”, za „ $R(x_1, \dots, x_n)$ ” — funkcje zdaniowe zawierające zmienne wolne: $x_1, \dots, x_n$ *.

* Dokładne sformułowanie tej reguły podstawiania, zwanej regułą podstawiania za wyrażenia funkcyjne, podane jest w § 5.

Tak np. z wyrażenia (5) przez podstawienie za wyrażenie „ xRy ” funkcji zdaniowej „ $x = y + 1$ ” otrzymujemy zdanie

$$\prod_x \sum_y x = y + 1$$

z wyrażenia zaś (7) przez podstawienie za wyrażenie „ $R(z, x, y)$ ” funkcji zdaniowej „ $z = x + y$ ” otrzymujemy zdanie

$$\prod_x \prod_y \sum_z (z = x + y)$$

Często przyjmuje się następującą interpretację wyrażeń rachunku kwantyfikatorów:

Predykaty jednoargumentowe oznaczają własności (cechy), predykaty dwu- lub wieloargumentowe oznaczają relacje, czyli stosunki dwu- lub wielo- członowe. Wyrażenia molekularne o postaci „ $A(x)$ ” czyta się wówczas: „cecha (własność) A przysługuje przedmiotowi x ” lub też: „przedmiot x ma cechę (własność) A ”; wyrażenia o postaci „ $R(x_1, \dots, x_n)$ ” czyta się: „relacja R zachodzi między przedmiotami $x_1, \dots, x_n$ ”; wyrażenia o postaci „ xRy ” czyta się też: „ x pozostaje w relacji R do y ”. Terminy „własność”, „relacja” można przy tej interpretacji rozumieć tak szeroko, że każda funkcja zdaniowa o jednej wolnej zmiennej nazwowej określa pewną własność, każda zaś funkcja zdaniowa o n ($n > 1$) wolnych zmiennych nazwowych określa pewną relację n -członową.

Prócz kwantyfikatorów zwykłych, o których poprzednio była mowa, występują w rachunku kwantyfikatorów tzw. kwantyfikatory o ograniczonym zakresie.

Przykładami wyrażeń zawierających takie kwantyfikatory są wyrażenia:

$$(8) \quad \prod_{x>0} |x| = x$$

$$(9) \quad \sum_{x \neq 0} a \cdot x = a$$

Wyrażenie „ $\prod_{x>0}$ ” czytamy: „dla każdego x większego od 0”,

wyrażenie „ $\sum_{x \neq 0}$ ” czytamy: dla pewnego x różnego od 0”.

Wyrażenie (8) jest skrótem wyrażenia „ $\prod_x (x > 0 \rightarrow |x| = x)$ ”,

wyrażenie (9) jest skrótem wyrażenia „ $\sum_x (x \neq 0 \wedge a \cdot x = a)$ ”.

Ogólnie:

wyrażenie $\prod_{\phi(a)} \psi(a)$ jest skrótem wyrażenia $\prod_a [\phi(a) \rightarrow \psi(a)]$,

wyrażenie $\sum_{\phi(a)} \psi(a)$ jest skrótem wyrażenia $\sum_a [\phi(a) \wedge \psi(a)]$,

gdzie $\phi(a)$, $\psi(a)$ są funkcjami zdaniowymi, w których a jest zmienną wolną.

Jeśli wyrażenie $\phi(a)$, występujące pod kwantyfikatorem o ograniczonym zakresie, zawiera więcej niż jedną zmienną wolną, może powstać wątpliwość, którą zmienną wiąże ten kwantyfikator. A więc np. czy wyrażenie

$$(10) \quad \prod_{|x| > |y|} x^2 > y^2$$

jest skrótem wyrażenia $\prod_x (|x| > |y| \rightarrow x^2 > y^2)$, czy też jest ono skrótem wyrażenia $\prod_y (|x| > |y| \rightarrow x^2 > y^2)$?

Dla uniknięcia takich wątpliwości przyjmujemy, że kwantyfikator o ograniczonym zakresie wiąże tę zmienną, która występuje bezpośrednio pod nim. A więc np. w wyrażeniu (10) zmienną związaną jest zmienna x , w wyrażeniu zaś $\prod_{|y| < |x|} x^2 > y^2$ zmienną związaną jest zmienna y .

Kwantyfikatory, a zwłaszcza kwantyfikatory o ograniczonym zakresie, używane są często przy zapisie definicji i twierdzeń matematycznych. Podamy kilka przykładów tego rodzaju. W przykładach tych zmienne x, y, z przebiegają zbiór liczb rzeczywistych, zmienne k, m, n — zbiór liczb naturalnych.

$$x > y \equiv \sum_{z > 0} x = y + z$$

$$x < y \equiv \sum_z x < z < y$$

$$m|n \equiv \sum_k n = m \cdot k$$

Definicja granicy ciągu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \equiv \prod_{\epsilon > 0} \sum_{m > 0} \prod_{n > m} |a_n - g| < \epsilon$$

Definicja funkcji ciągłej:

$$f \text{ jest funkcją ciągłą} \equiv \prod_{\epsilon > 0} \prod_x \prod_y \sum_{\delta > 0} (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Definicja funkcji jednostajnie ciągłej:

$$f \text{ jest funkcją jednostajnie ciągłą} \equiv \prod_{\epsilon > 0} \sum_{\delta > 0} \prod_x \prod_y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Pierwszym logikiem, który wprowadził kwantyfikatory był Frege. Jednakże praca Fregego z r. 1879, cytowana w poprzednim rozdziale, pozostała niezauważona (być może na skutek bardzo trudnej symboliki). Około r. 1885 Peirce wprowadza symbole $\prod$ i $\sum$ dla kwantyfikatorów. Peirce również zauważa, że zdanie $\prod_x A(x)$ można traktować jako koniunkcję:

$$A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3) \wedge \dots$$

zdanie zaś $\sum_x A(x)$ można traktować jako alternatywę:

$$A(x_1) \vee A(x_2) \vee A(x_3) \vee \dots$$

Podkreśla jednak przy tym, że chodzi tu tylko o analogię, gdyż może być nieskończenie wiele przedmiotów (a jak wiadomo, koniunkcje i alternatywy zbudowane są tylko ze skończonej liczby członów).

Termin „funkcja zdaniowa” wprowadził Russell (1903), funkcjami zdaniowymi wielu zmiennych zajmowali się wcześniej Peirce i Frege (w latach 1892-1893).

Obszerne i systematyczne ujęcie rachunku kwantyfikatorów podane zostało w I tomie *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella (1910). Dział ten nosi tam nazwę teorii zmiennej pozornej, gdyż zmienne związane zwano też zmiennymi pozornymi (nazywając wówczas zmienne wolne zmiennymi rzeczywistymi).

Ćwiczenia

- Zapisać przy pomocy kwantyfikatorów zdania:
 - Liczby 3 i 10 nie mają wspólnych dzielników różnych od 1.
 - Żadna liczba naturalna nie jest mniejsza od 0.
 - Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna od niej większa.
 - Istnieje taka liczba naturalna, od której żadna liczba naturalna nie jest mniejsza.
 - Układ równań

$$\begin{aligned} x + 2 &= 5 \\ 2x + 4 &= 6 \end{aligned}$$

jest sprzeczny.

- Każdy uczeń II klasy przeczytał pewną książkę.
 - Istnieje taka książka, którą przeczytał każdy uczeń II klasy.
- Zapisać przy pomocy kwantyfikatorów definicję:
 - ciągłości funkcji w zbiorze Z ;
 - jednostajnej ciągłości funkcji w zbiorze Z ;
 - zbieżności ciągu funkcji $\{f_n\}$ w każdym punkcie zbioru Z ;
 - jednostajnej zbieżności ciągu funkcji $\{f_n\}$ w zbiorze Z .
 - Wskazać, które zmienne w następujących wyrażeniach są wolne, a które związane:

$$\begin{aligned} &\prod_x [A(x) \rightarrow B(x)] \quad \prod_x A(x) \rightarrow B(x) \\ &\prod_x \left[\sum_y (xRy) \rightarrow (yRx) \right] \quad \prod_{xRy} [A(x) \vee A(y)] \\ &\prod_{xRy} [A(x) \vee A(y)] \end{aligned}$$

- Zanotować następujące wyrażenia nie posługujące się kwantyfikatorami o ograniczonym zakresie:

$$\prod_{A(x) B(y)} \sum [A(x) \rightarrow B(y)] \quad \sum_{xPy} \prod_{yQx} xRy.$$

§ 2. REGUŁY PIERWOTNE WĘZSZEGO RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

Regułami pierwotnymi węższego rachunku kwantyfikatorów są:

- 1) Wszystkie reguły pierwotne rachunku zdań, uogólnione w ten sposób, że dotyczą nie tylko wyrażeń rachunku zdań, lecz również wyrażeń zdaniowych rachunku kwantyfikatorów.

Przyjmujemy więc, że w schematach reguł RO, DK, OK, DA, OA, DE, OE symbole ϕ i ψ oznaczają dowolne wyrażenia zdaniowe rachunku kwantyfikatorów. Podobnie interpretujemy wyrażenia $\phi_1, \dots, \phi_n$, będące wyrażeniami składowymi wyrażenia (I), o których jest mowa w określeniu reguły tworzenia założeniowego dowodu nie wprost (por. rozdz. I, § 2, str. 17—18). Regułę dołączania do dowodu poprzednio udowodnionych tez wzmacniamy w ten sposób, że dotyczy ona nie tylko tez rachunku zdań, lecz również tez rachunku kwantyfikatorów.

- 2) Reguły dołączania i opuszczania kwantyfikatorów ogólnego i szczegółowego.

Przy zapisywaniu schematów reguł dołączania i opuszczania kwantyfikatorów posłużymy się symbolem $\phi(a/\xi)$ oznaczającym wyrażenie, które powstaje z ϕ przez podstawienie za zmienną nazwową a wyrażenia ξ . Spełnione przy tym być muszą warunki:

- 1) Zastępujemy w wyrażeniu ϕ zmienną a w tych tylko miejscach, w których jest ona wolna. Jeśli a występuje w ϕ kilka razy jako zmienna wolna, to zastępujemy ją wyrażeniem ξ tę samą ilość razy.
- 2) Jeśli zmienna a występuje w ϕ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną β to za zmienną a nie wolno podstawiać wyrażeń zawierających zmienną wolną β . Krócej: nie wolno tak podstawiać, by pewne zmienne wolne w wyrażeniu podstawianym stały się związane w wyrażeniu otrzymanym przez podstawienie.

Drugi warunek jest konieczny, gdyż inaczej podstawianie prowadziłoby nas w niektórych wypadkach od zdań prawdziwych do zdań fałszywych. Tak np. wyrażenie „ $\sum_m m > n$ ”, w którym zmienne m, n przebiegają zbiór liczb naturalnych, jest prawdziwe, gdyż stwierdza, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba większa od niej. W wyrażeniu tym nie wolno jednak podstawiać za zmienną wolną „ n ” wyrażenia „ $m+1$ ”, gdyż zmienna „ m ” wolna w tym wyrażeniu stałaby się związana w wyniku podstawienia, tj. w zdaniu „ $\sum_m m > m+1$ ”. To ostatnie zdanie jest też oczywiście fałszywe.

Zakładamy, że jeśli a jest zmienną wolną w ϕ , to symbol $\phi(a/\xi)$ ma sens tylko wtedy, gdy w wyrażeniu ϕ można wykonać podstawienie ξ za a spełniające oba warunki. Jeśli więc np. ϕ jest wyrażeniem „ $\sum_m m > n$ ”, to symbol $\phi(n/m)$ nie ma sensu i nie oznacza żadnego wyrażenia.

Przyjmujemy ponadto, że jeśli a nie jest zmienną wolną w ϕ , to $\phi(a/\xi)$ jest identyczne z wyrażeniem ϕ .

Regułę opuszczania kwantyfikatora ogólnego można zapisać w postaci schematu:

$$\text{OI} \quad \frac{\prod_a \phi}{\phi(a/\xi)}$$

Przykład wnioskowania według reguły OI:

$$\frac{\prod_x x = x}{2 = 2}$$

Regułę dołączania kwantyfikatora ogólnego:

$$\text{DI} \quad \frac{\phi}{\prod_a \phi}$$

można stosować w dowodach założeniowych tylko z tym zastrzeżeniem, że zmienna a nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu.

Ograniczenie to wyjaśnimy na przykładzie następującego twierdzenia arytmetyki liczb rzeczywistych:

$$x > 0 \rightarrow x + y > y$$

Dowód założeniowy tego twierdzenia rozpoczęlibyśmy od wypisania założenia

$$x > 0$$

We wnioskach z tego założenia, np. we wniosku uzyskanym na podstawie reguły DA:

$$x > 0 \vee x = 0$$

zmienna x nie reprezentuje dowolnych liczb rzeczywistych, lecz tylko liczby dodatnie. Wniosek, że

$$\prod_x (x > 0 \vee x = 0)$$

nie byłby więc poprawny.

Przykład wnioskowania według reguły DI:

$$\frac{x \cdot 1 = x}{\prod_x (x \cdot 1 = x)}$$

Regułę dołączania kwantyfikatora szczegółowego określa schemat:

$$\text{DS} \quad \frac{\phi(a/\xi)}{\sum_a \phi}$$

Regułę tę, podobnie jak regułę OI, można stosować bez ograniczeń.

Należy zwrócić uwagę, że reguła $D\Sigma$ pozwala wyprowadzić wyrażenie $\sum_a \phi$ z wyrażenia $\phi(a/\xi)$, które musi spełniać oba warunki podane powyżej w określeniu tego symbolu. A więc np. z prawdziwego w dziedzinie liczb naturalnych wyrażenia „ $\prod_n n+1 > n$ ” nie można według tej reguły wyprowadzić fałszywego w tej dziedzinie wyrażenia „ $\sum_k \prod_n k > n$ ”, gdyż wyrażenie „ $\prod_n n+1 > n$ ” nie jest podstawieniem wyrażenia „ $\prod_k k > n$ ”, bo w tym ostatnim wyrażeniu za zmienną wolną k nie można podstawić wyrażenia „ $n+1$ ”, w myśl drugiego warunku sformułowanego w określeniu symbolu $\phi(a/\xi)$.

Przykład wnioskowania według reguły $D\Sigma$:

$$\frac{2 \text{ jest liczbą parzystą i pierwszą}}{\sum_x (x \text{ jest liczbą parzystą i pierwszą})}$$

Według reguły $D\Sigma$ przeprowadzamy dowody istnienia przedmiotów danego rodzaju przez podanie przykładu takiego przedmiotu.

Zapisanie w postaci schematu reguły opuszczania kwantyfikatora szczegółowego poprzedzimy wyjaśnieniem jej intuicyjnego sensu. W regule tej znajduje sformalizowane ujęcie pewien krok rozumowania stosowany często w dowodach matematycznych. W dowodach takich przeprowadzamy nieraz następujące wnioskowanie: Zostało stwierdzone istnienie co najmniej jednego przedmiotu spełniającego warunek ϕ . Oznaczmy przez a jeden (dowolny) z takich przedmiotów. A więc a spełnia warunek ϕ . Symbol „ a ” nie jest tutaj zmienną, lecz stałą oznaczającą pewien określony przedmiot i to taki, który spełnia warunek ϕ . Podając sformalizowane ujęcie powyższego kroku wnioskowania wprowadzimy przede wszystkim oprócz zmiennych nazwowych $x, y, z, \dots$ stałe nazwowe: $a, b, c, \dots$, które występować będą tylko w wierszach dowodów, lecz nie będą występować w tezach rachunku kwantyfikatorów.

Reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego ($O\Sigma$) pozwala dołączyć do dowodu np. wyrażenie „ $A(a)$ ”, o ile do dowodu należy wyrażenie „ $\sum_x A(x)$ ”. Reguła ta musi być jednak stosowana z pewnymi ograniczeniami, których sens intuicyjny obecnie wyjaśnimy. Jeśli mianowicie do dowodu należą wiersze: (1) $\sum_x \phi(x)$ i (2) $\sum_y \psi(y)$ (lub $\sum_y \psi(y)$), stosując zaś regułę $O\Sigma$ do (1) otrzymaliśmy $\phi(x/a)$, to stosując z kolei regułę $O\Sigma$ do (2) nie możemy dołączyć do dowodu $\psi(x/a)$. Wiersze (1) i (2) stwierdzają bowiem tylko tyle, że istnieje przedmiot spełniający warunek ϕ i że istnieje przedmiot spełniający warunek ψ . Przedmioty te mogą być oczywiście różne, a nawet może tak być, że muszą być różne, jeśli warunki ϕ i ψ wykluczają się. Stosując więc parokrotnie regułę $O\Sigma$ w tym samym dowodzie, musimy za każdym razem wprowadzać nową stałą, dotąd w dowodzie nie występującą.

Dla zrozumienia intuicyjnego sensu drugiego ograniczenia obowiązującego przy stosowaniu reguły $O\Sigma$, zwrócimy uwagę na następujący przykład:

Wyrażenie (3) $\sum_y y > x$, w którym zmienne x i y przebiegają zbiór liczb naturalnych, stwierdza, że dla dowolnej liczby naturalnej x istnieje liczba naturalna y większa od x . Jest to oczywiście prawda. Nie możemy tutaj jednak z (3) wyprowadzić wyrażenia „ $a > x$ ”, gdyż to ostatnie znaczyłoby, że pewna określona liczba naturalna a jest większa od dowolnej liczby naturalnej x , co jest oczywiście fałszem. By móc i w tym wypadku zastosować regułę $O\Sigma$, zaopatrzymy „ a ” we wskaźnik „ x ” u dołu i z wyrażenia (3) wyprowadzimy wyrażenie „ $a_x > x$ ”. Stwierdza ono, że od dowolnej liczby naturalnej x jest większa pewna określona liczba naturalna a wyznaczona w jakiś sposób przez liczbę x (może to być np. liczba $x+1$).

Podobnie z wyrażenia (4) $\sum_z L(x, y, z)$, stwierdzającego, że dla dowolnych dwóch (różnych) punktów x i z istnieje taki punkt y , że y leży między x i z , można przy pomocy reguły $O\Sigma$ wyprowadzić wyrażenie $L(x, a_{x,z}, z)$ stwierdzające, że między dwoma dowolnymi (różnymi) punktami x, z leży pewien określony punkt $a_{x,z}$, wyznaczony przez punkty x i z .

Uwzględniając powyższe uwagi zapisujemy regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego w postaci schematu:

$$O\Sigma \quad \frac{\sum_a \phi}{\phi(a/\sigma_{\beta_1, \dots, \beta_n})}$$

gdzie $\beta_1, \dots, \beta_n$ są wszystkimi wolnymi zmiennymi nazwowymi wyrażenia ϕ różnymi od zmiennej a , wyrażenie zaś $\phi(a/\sigma_{\beta_1, \dots, \beta_n})$ jest wynikiem podstawienia w wyrażeniu ϕ stałej σ zaopatrzonej we wskaźniki $\beta_1, \dots, \beta_n$ za zmienną a . Zauważmy, że zmienne $\beta_1, \dots, \beta_n$ występujące w wyrażeniu $\sigma_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ traktujemy jako wolne. Wyrażenie $\sigma_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ wolno więc podstawić w wyrażeniu ϕ za zmienną a wtedy tylko, gdy zmienna ta nie występuje w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienne $\beta_1, \dots, \beta_n$.

Należy podkreślić, że na podstawie reguły $O\Sigma$ z wyrażenia $\sum_a \phi$ można wyprowadzić tylko takie wyrażenie $\phi(a/\sigma_{\beta_1, \dots, \beta_n})$, które spełnia warunki podane w określeniu symbolu $\phi(a/\xi)$. A więc np. jeśli ϕ jest wyrażeniem „ $xRy \wedge \sum_y xSy$ ”, to z wyrażenia $\sum_x \phi$ nie można według reguły $O\Sigma$ wyprowadzić wyrażenia „ $aRy \wedge \sum_y a_ySy$ ”. To ostatnie wyrażenie nie jest podstawieniem wyrażenia ϕ uzyskanym przez podstawienie „ a_y ” za zmienną wolną x , gdyż w tym przypadku naruszony byłby warunek 2) określenia symbolu $\phi(a/\xi)$. Jeśli zmienne x, y przebiegają zbiór co najmniej dwuelementowy, to wyrażenie „ $\sum_x (x \neq y \wedge \sum_y x = y)$ ” jest wówczas prawdziwe. W myśl podanych powyżej wyjaśnień nie można

z tego wyrażenia według reguły $O\Sigma$ wyprowadzić wyrażenia „ $a_v \neq y \wedge \sum_v a_v = y$ “, które prowadzi do sprzeczności, a więc jest niewątpliwie fałszywe.

Kwantyfikatory o ograniczonym zakresie można wprowadzić bądź przy pomocy definicji, bądź też przy pomocy reguł pierwotnych dołączania i opuszczania, o schematach:

$$O\Pi^* \quad \frac{\prod_{\phi(a)} \psi(a)}{\phi(a/\xi) \rightarrow \psi(a/\xi)}$$

$$D\Pi^* \quad \frac{\phi(a) \rightarrow \psi(a)}{\prod_{\phi(a)} \psi(a)}$$

(o ile a nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu).

$$D\Sigma^* \quad \frac{\frac{\phi(a/\xi)}{\psi(a/\xi)} \quad \sum_{\phi(a)} \psi(a)}{\phi(a/\xi)}$$

$$O\Sigma^* \quad \frac{\sum_{\phi(a)} \psi(a)}{\frac{\phi(a/\sigma_{\beta_1}, \dots, \beta_n)}{\psi(a/\sigma_{\beta_1}, \dots, \beta_n)}}$$

(z analogicznymi ograniczeniami jak przy regule $O\Sigma$).

Ćwiczenia

1. Przyjmijmy, że zmienne nazwowe rachunku kwantyfikatorów reprezentują tylko trzy stałe nazwy: a, b, c . Wtedy wyrażenie $\prod_x \phi(x)$ możemy interpretować jako koniunkcję wyrażen

$$\phi(x/a), \quad \phi(x/b) \quad \text{i} \quad \phi(x/c),$$

wyrażenie zaś $\sum_x \phi(x)$ jako alternatywę tych wyrażen. Sprawdzić, jaki sens przy tej interpretacji uzyskują reguły $O\Pi$ i $D\Sigma$.

2. Przy pomocy reguł $O\Pi^*$, $D\Pi^*$, $O\Sigma$, $D\Sigma^*$ udowodnić równoważności:

$$(I) \quad \prod_{\phi(a)} \psi(a) = \prod_a [\phi(a) \rightarrow \psi(a)]$$

$$(II) \quad \sum_{\phi(a)} \psi(a) = \sum_a [\phi(a) \wedge \psi(a)]$$

3. Przyjmując jako definicje równoważności (I), (II), podane w poprzednim ćwiczeniu, udowodnić reguły $O\Pi^*$, $D\Pi^*$, $O\Sigma^*$, $D\Sigma^*$.

§ 3. TEZY I REGUŁY WTÓRNE WĘSZSZEGO RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

Z podanej na początku poprzedniego paragrafu uwagi, że wszystkie reguły pierwotne rachunku zdań są jednocześnie regułami pierwotnymi rachunku kwantyfikatorów, wynika, że każda teza rachunku zdań jest tezą rachunku kwantyfikatorów oraz że każda reguła wtórna rachunku zdań jest regułą wtórną rachunku kwantyfikatorów. Reguły wtórne rachunku zdań uogólniamy tak, by dotyczyły również wyrażen zdaniowych rachunku kwantyfikatorów, podobnie jak na początku poprzedniego paragrafu zostały uogólnione reguły pierwotne. Należy tu podkreślić, że stosując regułę $D\Pi$ do dodatkowych założeń dowodu lub do wyrażen otrzymanych w dowodzie na ich podstawie, nie wolno ich poprzedzać kwantyfikatorem ogólnym wiążącym zmienną występującą w dodatkowym założeniu dowodu jako zmienna wolna.

$$T1. \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

$$\text{Dow. (1)} \quad \frac{\prod_x A(x)}{A(y)} \quad \begin{matrix} \{\text{zał.}\} \\ \{O\Pi: 1\} \end{matrix}$$

$$T2. \quad A(y) \rightarrow \sum_x A(x)$$

$$\text{Dow. (1)} \quad \frac{A(y)}{\sum_x A(x)} \quad \begin{matrix} \{\text{zał.}\} \\ \{D\Sigma: 1\} \end{matrix}$$

Podobnie jak w rachunku zdań, podanym w tym paragrafie tezom rachunku kwantyfikatorów odpowiadają pewne metatezy, których dowody są analogiczne do dowodu danych tez. Tezom $T1$ i $T2$ odpowiadają metatezy:

$$M1. \quad \vdash \prod_a \phi \rightarrow \phi(a/\xi)$$

$$M2. \quad \vdash \phi(a/\xi) \rightarrow \sum_a \phi$$

Dowody ich są całkowicie analogiczne do dowodów $T1$ i $T2$.

Według $M2$ tezami są np. wyrażenia:

$$\begin{aligned} A(x) &\rightarrow \sum_x A(x) \\ \sim A(x) &\rightarrow \sum_x \sim A(x) \quad \text{itp.} \end{aligned}$$

Powołując się w dalszych dowodach na $T1$ lub $T2$ będziemy mieć na myśli również wyrażenia, będące tezami według metatez $M1$ lub $M2$.

$$T3. \quad \sim \prod_x A(x) \equiv \sum_x \sim A(x)$$

Dow. (a) (1)	$\sim \prod_x A(x)$	{zał.}
(2)	$\sim \sum_x \sim A(x)$	{z. d. n.}
(3)	$\sim A(x) \rightarrow \sum_x \sim A(x)$	{T2}
(4)	$A(x)$	{Tol. 3; 2}
(5)	$\prod_x A(x)$	{DII: 4}
	sprz.	{1; 5}
(b) (1)	$\sum_x \sim A(x)$	{zał.}
(2)	$\prod_x A(x)$	{z. d. n.}
(3)	$\sim A(a)$	{O Σ : 1}
(4)	$A(a)$	{O Π : 2}
	sprz.	{3; 4}

W wierszu (5) części (a) dowodu posłużyliśmy się regułą DII poprawnie, gdyż zmienna x nie występuje w założeniach dowodu jako zmienna wolna.

Tezę T3 można odczytać w następujący sposób:

Nie każdy przedmiot ma daną własność wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przedmioty nie mające tej własności

Podane w tym paragrafie tezy poczynając od T3 mają tę własność, że w żadnej z nich nie występują wyrażenia molekularne o tym samym predykanie a różniące się zmiennymi nazwowymi (zauważmy, że tezy T1 i T2 nie mają tej własności, gdyż w każdej z nich występują dwa wyrażenia molekularne: $A(x)$, $A(y)$, o tym samym predykanie A , różniące się przy tym zmiennymi nazwowymi, będącymi argumentami tego predykatu). Tezy te możemy podzielić na dwa rodzaje. W pierwszym, do którego należą tezy T3-T10 oraz T19-T25, nie występują zmienne zdaniowe. W drugim, do którego należą tezy T11-T18, występują zmienne zdaniowe.

Dla tezy pierwszego rodzaju schemat wyrażenia występujący w odpowiadającej jej metatezie budujemy w następujący sposób:

Zmienne nazwowe występujące w danej tezie zastępujemy przez zmienne $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, molekularne zaś wyrażenia rachunku kwantyfikatorów zastępujemy przez zmienne $\phi, \psi, \chi, \dots$, przy czym te same zmienne (te same wyrażenia molekularne) zastępujemy przez te same zmienne, natomiast różne zmienne (różne wyrażenia molekularne) zastępujemy przez różne zmienne.

Tezie T3 odpowiada w myśl powyższego określenia metateza

$$M3. \quad \vdash \sim \prod_a \phi \equiv \sum_a \sim \phi$$

tezie: $A(x) \rightarrow \sum_x A(x)$ odpowiada metateza: $\vdash \phi \rightarrow \sum_a \phi$.

Według T3 (M3) równoważne są warunki:

$$\sim \prod_x x + 3 = 5$$

$$\sum_x \sim (x + 3 = 5)$$

Dowód twierdzenia, że dla każdej tezy rozważanego rodzaju daje się udowodnić odpowiadająca jej metateza, jest indukcyjny, analogiczny do dowodu odpowiedniego twierdzenia dla rachunku zdań.

Podobnie jak w przypadku reguł wtórnych rachunku zdań będziemy mówić w rachunku kwantyfikatorów o regułach wtórnych ze względu na dane tezy, zamiast mówić o regułach wtórnych ze względu na metatezy odpowiadające tym tezom. A więc np. powiemy, że regułą wtórną ze względu na T3, jest następująca, wtórna ze względu na M3, reguła negowania kwantyfikatora ogólnego:

$$N\Pi \quad \frac{\sim \prod_a \phi}{\sum_a \sim \phi}$$

Tezę T3 nazwiemy prawem negowania kwantyfikatora ogólnego. Następną tezę jest prawem negowania kwantyfikatora szczegółowego. Prawa negowania kwantyfikatorów nazywane są też prawami De Morgana rachunku kwantyfikatorów.

$$T4. \quad \sim \sum_x A(x) \equiv \prod_x \sim A(x)$$

Dow. (a) (1)	$\sim \sum_x A(x)$	{zał.}
(2)	$A(x) \rightarrow \sum_x A(x)$	{T2}
(3)	$\sim A(x)$	{Tol.: 2; 1}
	$\prod_x \sim A(x)$	{DII: 3}
(b) (1)	$\prod_x \sim A(x)$	{zał.}
(2)	$\sum_x A(x)$	{z. d. n.}
(3)	$A(a)$	{O Σ : 2}
(4)	$\sim A(a)$	{O Π : 1}
	sprz.	{3; 4}

Według T4 równoważne są warunki:

$$\sim \sum_x x + 2 = x$$

$$\prod_x \sim (x + 2 = x)$$

Na T4 można oprzeć regułę negowania kwantyfikatora szczegółowego:

$$\text{N}\Sigma \quad \frac{\sim \sum_a \phi}{\prod_a \sim \phi}$$

Opierając się na tezach T3 i T4 stwierdzamy, że negacja wyrażenia, zaczynającego się od jakiegoś układu kwantyfikatorów ogólnych i szczegółowych, jest równoważna wyrażeniu, które powstaje z niego w ten sposób, że każdy kwantyfikator ogólny zastępujemy przez szczegółowy i na odwrót, wyrażenie zaś występujące po tych kwantyfikatorach negujemy. Np.

$$\sim \prod_x \sum_y \prod_z R(x, y, z) \equiv \sum_x \prod_y \sum_z \sim R(x, y, z)$$

Obecnie poznamy tzw. prawa rozkładania kwantyfikatorów. Tezy te pozwalają w określony sposób rozkładać kwantyfikatory, znajdujące się przed wyrażeniami złożonymi, na człony tych wyrażeń złożonych, bądź też wyciągać kwantyfikatory, znajdujące się przed członami wyrażeń złożonych, przed całe wyrażenie złożone.

$$\text{T5.} \quad \prod_x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\prod_x A(x) \rightarrow \prod_x B(x))$$

$$\begin{array}{l} \text{Dow. (1)} \quad \left. \begin{array}{l} \prod_x (A(x) \rightarrow B(x)) \\ (2) \quad \prod_x A(x) \end{array} \right\} \quad \{\text{zał.}\} \\ (3) \quad A(x) \rightarrow B(x) \quad \{\text{O}\Pi: 1\} \\ (4) \quad A(x) \quad \{\text{O}\Pi: 2\} \\ (5) \quad B(x) \quad \{\text{RO: 3; 4}\} \\ \quad \prod_x B(x) \quad \{\text{D}\Pi: 5\} \end{array}$$

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej opartej na T5:

$$\frac{\prod_x (x = x \rightarrow x \leq x)}{\prod_x x = x} \quad \frac{\prod_x x = x}{\prod_x x \leq x}$$

$$\text{T6.} \quad \prod_x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\sum_x A(x) \rightarrow \sum_x B(x))$$

$$\begin{array}{l} \text{Dow. (1)} \quad \left. \begin{array}{l} \prod_x (A(x) \rightarrow B(x)) \\ (2) \quad \sum_x A(x) \end{array} \right\} \quad \{\text{zał.}\} \\ (3) \quad A(a) \quad \{\text{O}\Sigma: 2\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (4) & A(a) \rightarrow B(a) \quad \{\text{O}\Pi: 1\} \\ (5) & B(a) \quad \{\text{RO: 4; 3}\} \\ & \sum_x B(x) \quad \{\text{D}\Sigma: 5\} \end{array}$$

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej opartej na T6:

$$\frac{\prod_x (x+2 = 5 \rightarrow x+2 \leq 5)}{\sum_x x+2 = 5} \quad \frac{\sum_x x+2 = 5}{\sum_x x+2 \leq 5}$$

$$\text{T7.} \quad \prod_x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \prod_x A(x) \wedge \prod_x B(x)$$

Dowód tej tezy pozostawiamy czytelnikowi.

Na podstawie T7 równoważne są warunki:

$$\prod_x (f(x) = 0 \wedge g(x) = 0) \quad \prod_x f(x) = 0 \wedge \prod_x g(x) = 0$$

$$\text{T8.} \quad \prod_x A(x) \vee \prod_x B(x) \rightarrow \prod_x (A(x) \vee B(x))$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & \prod_x A(x) \vee \prod_x B(x) \quad \{\text{zał.}\} \\ (1.1) & \prod_x A(x) \quad \{\text{z. dow.}\} \\ (1.2) & A(x) \quad \{\text{O}\Pi: 1.1\} \\ (1.3) & A(x) \vee B(x) \quad \{\text{DA: 1.2}\} \\ (1.4) & \prod_x (A(x) \vee B(x)) * \quad \{\text{D}\Pi: 1.3\} \\ (2.1) & \prod_x B(x) \quad \{\text{z. dow.}\} \\ (2.2) & B(x) \quad \{\text{O}\Pi: 2.1\} \\ (2.3) & A(x) \vee B(x) \quad \{\text{DA: 2.2}\} \\ (2.4) & \prod_x (A(x) \vee B(x)) \quad \{\text{D}\Pi: 2.3\} \\ & \prod_x (A(x) \vee B(x)) \quad \{1.1 \rightarrow 1.4; 2.1 \rightarrow 2.4; 1\} \end{array}$$

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej opartej na T8:

$$\frac{\prod_x f(x) > 0 \vee \prod_x f(x) < 0}{\prod_x (f(x) > 0 \vee f(x) < 0)}$$

* Regułę D\Pi wolno było tu zastosować, gdyż w dodatkowym założeniu dowodu (1.1), na którego podstawie otrzymaliśmy (1.3), nie występuje zmienna wolna x (która nie jest też wolna w założeniu dowodu).

Implikacja odwrotna do T8 jest fałszywa, na co wskazuje wyrażenie:

$$\prod_x (x = 0 \vee x \neq 0) \rightarrow \prod_x x = 0 \vee \prod_x x \neq 0$$

w którym poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

T9.
$$\sum_x (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \sum_x A(x) \wedge \sum_x B(x)$$

Dow. (1)	$\sum_x (A(x) \wedge B(x))$	{zał.}
(2)	$A(a) \wedge B(a)$	{OΣ: 1}
(3)	$A(a)$	{OK: 2}
(4)	$B(a)$	{DΣ: 3}
(5)	$\sum_x A(x)$	{DΣ: 4}
(6)	$\sum_x B(x)$	{DK: 5; 6}
	$\sum_x A(x) \wedge \sum_x B(x)$	

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej opartej na T9:

$$\frac{\sum_x (x+2 = 5 \wedge 0 < x < 4)}{\sum_x x+2 = 5 \wedge \sum_x 0 < x < 4}$$

Implikacja odwrotna do T9 jest fałszywa, na co wskazuje przykład:

$$\sum_x (x+1 = 10) \wedge \sum_x (0 < x < 4) \rightarrow \sum_x (x+1 = 10 \wedge 0 < x < 4)$$

Poprzednik bowiem tego wyrażenia jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

T10.
$$\sum_x (A(x) \vee B(x)) \equiv \sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$$

Dow. (a) (1)	$\sum_x (A(x) \vee B(x))$	{zał.}
(2)	$A(a) \vee B(a)$	{OΣ: 1}
(1.1)	$A(a)$	{z. dow.}
(1.2)	$\sum_x A(x)$	{DΣ: 1.1}
(1.3)	$\sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$	{DA: 1.2}
(2.1)	$B(a)$	{z. dow.}
(2.2)	$\sum_x B(x)$	{DΣ: 2.1}
(2.3)	$\sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$	{DA: 2.2}
	$\sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$	{1.1 → 1.3; 2.1 → 2.3; 2}

(b) (1)	$\sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$	{zał.}
(1.1)	$\sum_x A(x)$	{z. dow.}
(1.2)	$A(a)$	{OΣ: 1.1}
(1.3)	$A(a) \vee B(a)$	{DA: 1.2}
(1.4)	$\sum_x (A(x) \vee B(x))$	{DΣ: 1.3}
(2.1)	$\sum_x B(x)$	{z. dow.}
(2.2)	$B(a)$	{OΣ: 2.1}
(2.3)	$A(a) \vee B(a)$	{DA: 2.2}
(2.4)	$\sum_x (A(x) \vee B(x))$	{DΣ: 2.3}
	$\sum_x (A(x) \vee B(x))$	{1.1 → 1.4; 2.1 → 2.4; 1}

Według T10 równoważne są warunki:

$$\sum_x 2x^2 \leq 0$$

$$\sum_x 2x^2 < 0 \vee \sum_x 2x^2 = 0$$

Obecnie poznamy kilka praw rachunku kwantyfikatorów, w których występują zmienne zdaniowe. Za zmienne te wolno podstawiać dowolne wyrażenia zdaniowe, z następującym jednak ograniczeniem, analogicznym do warunku 2), dotyczącego podstawiania za zmienne nazwowe: Jeśli dana zmienna zdaniowa występuje w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną nazwową a , to za tę zmienną zdaniową nie wolno podstawiać wyrażeń zdaniowych zawierających zmienną wolną a .

Tezy, które teraz podamy, noszą nazwę praw przenoszenia kwantyfikatorów.

T11.
$$\prod_x (p \rightarrow A(x)) \equiv p \rightarrow \prod_x A(x)$$

Podamy tylko część (b) dowodu.

Dow. (b) (1)	$p \rightarrow \prod_x A(x)$	{zał.}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	$\prod_x A(x)$	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	$A(x)$	{OP: 1.2}
(2)	$p \rightarrow A(x)$	{1.1 → 1.3}
	$\prod_x (p \rightarrow A(x))$	{DH: 2}

Dla wyróżnionych na str. 90 też drugiego rodzaju, do których należy T11, budujemy schematy wyrażeń występujących w odpowiadających im meta-

tezach analogicznie jak dla omawianych tam też pierwszego rodzaju, z tym że zmienne zdaniowe zastępujemy przez zmienne $\phi, \psi, \chi, \dots$, różne od tych zmiennych, którymi zastępujemy występujące w danej tezie wyrażenia molekularne rachunku kwantyfikatorów (oczywiście, różne zmienne zdaniowe zastępujemy przez różne zmienne, te same zaś zmienne zdaniowe przez te same zmienne).

Ponadto przyjmujemy następujące ograniczenie:

Jeśli jakaś zmienna zdaniowa, np. zmienna p , występuje w danej tezie w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną a , w metatezie zaś odpowiada jej zmienna ϕ , to w odpowiadającej jej metatezie musimy wprowadzić warunek stwierdzający, że a nie jest zmienną wolną w wyrażeniu ϕ (gdyż w myśl ograniczenia podanego powyżej za zmienną zdaniową p nie wolno podstawiać wyrażeń zawierających wolną zmienną a).

W myśl tych uwag tezie T11 odpowiada metateza:

$$M11. \quad \vdash \prod_a (\phi \rightarrow \psi) \equiv \phi \rightarrow \prod_a \psi, \quad \text{o ile } a \text{ nie jest wolne w } \phi.$$

Według T11 (M11) równoważne są warunki:

$$T12. \quad \prod_x (y > 0 \rightarrow |x| + y > 0) \\ y > 0 \rightarrow \prod_x |x| + y > 0 \\ \sum_x (p \rightarrow A(x)) \equiv p \rightarrow \sum_x A(x)$$

Podajemy tylko część (b) dowodu.

Dow. (b) (1)	$p \rightarrow \sum_x A(x)$	{zał.}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	$\sum_x A(x)$	{RO: 1; 1.1}
(1.3)	$A(a)$	{O Σ : 1.2}
(2)	$p \rightarrow A(a)$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3}
	$\sum_x (p \rightarrow A(x))$	{D Σ : 2}

Równoważne są więc warunki:

$$\sum_x (b^2 - 4ac > 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0) \\ b^2 - 4ac > 0 \rightarrow \sum_x (ax^2 + bx + c = 0)$$

Dowody dwóch następnych tez pozostawiamy czytelnikowi.

$$T13. \quad \prod_x (A(x) \rightarrow p) \equiv \sum_x A(x) \rightarrow p$$

Równoważne są więc warunki:

$$\prod_x (ax^2 > 0 \rightarrow a > 0) \\ \sum_x ax^2 > 0 \rightarrow a > 0$$

$$T14. \quad \sum_x (A(x) \rightarrow p) \equiv \prod_x A(x) \rightarrow p$$

Według T14 równoważne są warunki:

$$\sum_x (ax^2 + bx + c \neq 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0) \\ \prod_x (ax^2 + bx + c \neq 0) \rightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$$T15. \quad \prod_x (p \vee A(x)) \equiv p \vee \prod_x A(x)$$

Dow. (a) (1)	$\prod_x (p \vee A(x))$	{zał.}
(2)	$p \vee A(x)$	{OII: 1}
(1.1)	p	{z. dow.}
(1.2)	$p \vee \prod_x A(x)$	{DA: 1.1}
(2.1)	$\sim p$	{z. dow.}
(2.2)	$A(x)$	{OA: 2; 2.1}
(2.3)	$\prod_x A(x)$	{DII: 2.2}
(2.4)	$p \vee \prod_x A(x)$	{DA: 2.3}
	$p \vee \prod_x A(x)$	{1.1 $\rightarrow$ 1.2; 2.1 $\rightarrow$ 2.4}

Część (b) dowodu jest analogiczna do dowodu T8.

Dowody dalszych tez pozostawiamy znów czytelnikowi.

$$T16. \quad \sum_x (p \wedge A(x)) \equiv p \wedge \sum_x A(x)$$

$$T17. \quad \prod_x (p \wedge A(x)) \equiv p \wedge \prod_x A(x)$$

$$T18. \quad \sum_x (p \vee A(x)) \equiv p \vee \sum_x A(x)$$

Poznamy teraz prawa przestawiania kwantyfikatorów.

$$T19. \quad \prod_x \prod_y xRy \equiv \prod_y \prod_x xRy$$

Dow. (a) (1)	$\prod_x \prod_y xRy$	{zał.}
(2)	$\prod_y xRy$	{OI: 1}

(3) xRy

(4) $\prod_x xRy$

$\prod_y \prod_x xRy$

{OΠ: 2}

{DΠ: 3}

{DΠ: 4}

Część (b) dowodu jest analogiczna.

T20.

$$\sum_x \sum_y xRy \equiv \sum_y \sum_x xRy$$

{zał.}

Dow. (a) (1) $\sum_x \sum_y xRy$

(2) $\sum_y aRy$

(3) aRb

(4) $\sum_x xRb$

$\sum_y \sum_x xRy$

{OΣ: 1}

{OΣ: 2}

{DΣ: 3}

{DΣ: 4}

Część (b) dowodu jest analogiczna.

Tezie T20 odpowiada metateza:

M20.

$$\vdash \sum_x \sum_y \phi \equiv \sum_y \sum_x \phi$$

Według M20 tezą jest np. wyrażenie:

$$\sum_x \sum_y R(x, y, z) \equiv \sum_y \sum_x R(x, y, z)$$

Część (a) dowodu tego wyrażenia jest następująca:

Dow. (a) (1) $\sum_x \sum_y R(x, y, z)$

(2) $\sum_y R(a_x, y, z)$

(3) $R(a_x, b_x, z)$

(4) $\sum_x R(x, b_x, z)$

$\sum_y \sum_x R(x, y, z)$

{zał.}

{OΣ: 1}

{OΣ: 2}

{DΣ: 3}

{DΣ: 4}

W dowodzie tym po raz pierwszy posłużyliśmy się nazwami uzależnionymi od zmiennych (stałymi ze wskaźnikami), mianowicie wyrażeniami „ a_x ”, „ b_x ”. Dwa ostatnie kroki dowodu są poprawne, gdyż wyrażenie „ $R(a_x, b_x, z)$ ” jest podstawieniem wyrażenia „ $R(x, b_x, z)$ ”, wyrażenie zaś „ $\sum_x R(x, b_x, z)$ ” jest podstawieniem wyrażenia „ $\sum_x R(x, y, z)$ ”.

T21.

$$\sum_x \prod_y xRy \rightarrow \prod_y \sum_x xRy$$

Dow. (1) $\sum_x \prod_y xRy$

(2) $\prod_y aRy$

(3) aRy

(4) $\sum_x xRy$

$\prod_y \sum_x xRy$

{zał.}

{OΣ: 1}

{OΠ: 2}

{DΣ: 3}

{DΠ: 4}

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej opartej na T21:

$$\frac{\sum_x \prod_y x \cdot y = y}{\prod_y \sum_x x \cdot y = y}$$

Implikacja odwrotna do T21 jest fałszywa, na co wskazuje następujące wyrażenie arytmetyki liczb naturalnych:

$$\prod_y \sum_x x > y \rightarrow \sum_x \prod_y x > y$$

Wyrażenie to jest fałszywe, gdyż jego poprzednik jest prawdziwy (stwierdza bowiem, że dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba od niej większa), a następnik fałszywy (stwierdza bowiem, że istnieje liczba naturalna większa od każdej liczby naturalnej).

Implikacja odwrotna do T21 nie daje się też dowieść w sposób analogiczny jak T21, ze względu na ograniczenia wprowadzone dla reguł operowania kwantyfikatorami. Z założenia „ $\prod_y \sum_x xRy$ ” otrzymujemy przy pomocy reguły OΠ wyrażenie „ $\sum_x xRy$ ”, a stąd przy pomocy reguły OΣ otrzymujemy „ $a_y Ry$ ”. Stosując do tego wyrażenia regułę DΠ otrzymujemy „ $\prod_y a_y Ry$ ”. Z tego ostatniego wyrażenia nie można jednak przy pomocy reguły DΣ wyprowadzić wyrażenia „ $\sum_x \prod_y xRy$ ”, gdyż w wyrażeniu „ $\prod_y xRy$ ” za zmienną „ x ” nie wolno podstawić wyrażenia „ a_y ”, bo występująca w nim wolna zmienna wskaźnikowa „ y ” stałaby się związana po takim podstawieniu.

T22.
$$\prod_x (A(x) \equiv B(x)) \rightarrow (\prod_x A(x) \equiv \prod_x B(x))$$

Dow. (1) $\prod_x (A(x) \equiv B(x))$

(2) $A(x) \equiv B(x)$

(3) $A(x) \rightarrow B(x)$

(4) $B(x) \rightarrow A(x)$

(5) $\prod_x (A(x) \rightarrow B(x))$

{zał.}

{OΠ: 1}

{OΠ: 2}

{DΠ: 3}

- (6) $\prod_x (B(x) \rightarrow A(x))$ {DΠ: 4}
 (7) $\prod_x A(x) \rightarrow \prod_x B(x)$ {RO: T5; 5} *
 (8) $\prod_x B(x) \rightarrow \prod_x A(x)$ {RO: T5; 6}
 $\prod_x A(x) \equiv \prod_x B(x)$ {DE: 7; 8}

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej ze względu na T22:

$$\frac{\prod_x (2(x+3) - 5 > 2x \equiv 2x+1 > 2x)}{\prod_x (2(x+3) - 5 > 2x) \equiv \prod_x (2x+1 > 2x)}$$

T23. $\prod_x (A(x) \equiv B(x)) \rightarrow (\sum_x A(x) \equiv \sum_x B(x))$

- Dow. (1) $\prod_x (A(x) \equiv B(x))$ {zał.}
 (2) $A(x) \equiv B(x)$ {OΠ: 1}
 (3) $A(x) \rightarrow B(x)$ {OE: 2}
 (4) $B(x) \rightarrow A(x)$
 (5) $\prod_x (A(x) \rightarrow B(x))$ {DΠ: 3}
 (6) $\prod_x (B(x) \rightarrow A(x))$ {DΠ: 4}
 (7) $\sum_x A(x) \rightarrow \sum_x B(x)$ {RO: T6; 5}
 (8) $\sum_x B(x) \rightarrow \sum_x A(x)$ {RO: T6; 6}
 $\sum_x A(x) \equiv \sum_x B(x)$ {DE: 7; 8}

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej ze względu na T23:

$$\frac{\prod_x (3(x-1)+1 = 2(x-3) \equiv x+4 = 0)}{\sum_x (3(x-1)+1 = 2(x-3)) \equiv \sum_x (x+4 = 0)}$$

Na podstawie reguły ekstensjonalności z rachunku zdań ** oraz tez T22 i T23 można udowodnić, w analogiczny sposób, regułę ekstensjonalności w ra-

* Korzystamy tu z reguły dołączania do dowodu poprzednio udowodnionych tez. W celu skrócenia zapisu nie przepisujemy jednak w dowodzie tezy, z której korzystamy, lecz tylko podajemy w nawiasach klamrowych jej numer.

** Por. str. 42-43.

chunku kwantyfikatorów, o schematach:

$$\frac{\prod_{a_1} \dots \prod_{a_n} (\phi \equiv \psi)}{\chi \equiv \chi(\phi/\psi)}$$

$$\frac{\prod_{a_1} \dots \prod_{a_n} (\phi \equiv \psi)}{\chi}$$

$$\chi(\phi/\psi)$$

Zmienne $a_1, \dots, a_n$ są tu wszystkimi wolnymi zmiennymi nazwowymi wyrażenia $\phi \equiv \psi$.

Z tez T3 i T4, na podstawie prawa podwójnego przeczenia (T5b, § 3, rozdz. I) i prawa pozwalającego na dołączanie negacji do obu stron równoważności (T33a, § 3, rozdz. I), otrzymujemy tezy:

T24. $\prod_x A(x) \equiv \sim \sum_x \sim A(x)$

T25. $\sum_x A(x) \equiv \sim \prod_x \sim A(x)$

Widać stąd, że kwantyfikator ogólny można zdefiniować przy pomocy negacji i kwantyfikatora szczegółowego. Podobnie, kwantyfikator szczegółowy można zdefiniować przy pomocy negacji i kwantyfikatora ogólnego.

Wiele z podanych w tym paragrafie tez jest ważnych w analogicznej postaci dla kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie. Takie tezy dla kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie będziemy oznaczać tymi samymi numerami, które mają odpowiadające im tezy dla zwykłych kwantyfikatorów, zaopatrując te numery w gwiazdkę u góry. Dowody tych tez, przeprowadzone przy pomocy reguł OΠ*, DΠ*, OΣ*, DΣ*, są częściowo analogiczne do dowodów odpowiadających im tez sformułowanych przy pomocy zwykłych kwantyfikatorów. Podamy tu dla przykładu dowód tezy odpowiadającej T21.

T21*. $\sum_{A(x)} \prod_{B(y)} xRy \rightarrow \prod_{B(y)} \sum_{A(x)} xRy$

- Dow. (1) $\sum_{A(x)} \prod_{B(y)} xRy$ {zał.}
 (2) $A(a)$ {OΣ*: 1}
 (3) $\prod_{B(y)} aRy$
 (4) $B(y) \rightarrow aRy$ {OΠ*: 3}
 (1.1) $B(y)$ {z. dow.}
 (1.2) aRy {RO: 4; 1.1}
 (1.3) $\sum_{A(x)} xRy$ {DΣ*: 2; 1.2}
 (5) $B(y) \rightarrow \sum_{A(x)} xRy$ {1.1→1.3}
 $\prod_{B(y)} \sum_{A(x)} xRy$ {DΠ*: 5}

Przykład wnioskowania według reguły wtórnej ze względu na T21*:

$$\frac{\sum_{x \text{ jest książką}} \prod_{y \text{ jest uczniem II klasy}} y \text{ przeczytał } x}{\prod_{y \text{ jest uczniem II klasy}} \sum_{x \text{ jest książką}} y \text{ przeczytał } x}$$

Innymi słowy: z przesłanki „istnieje taka książka, którą przeczytał każdy uczeń II klasy”, możemy wyprowadzić wniosek „każdy uczeń II klasy przeczytał pewną książkę”.

Implikacja odwrotna do T21* jest fałszywa, na co wskazuje następujący przykład:

$$\prod_{x \text{ jest państwem}} \sum_{y \text{ jest miastem}} y \text{ jest stolicą } x \rightarrow \sum_{y \text{ jest miastem}} \prod_{x \text{ jest państwem}} y \text{ jest stolicą } x$$

Poprzednik tej implikacji jest prawdziwy (gdyż każde państwo posiada swą stolicę), następnik zaś jest fałszywy (gdyż stwierdza on, że istnieje takie miasto, które jest stolicą każdego państwa, co jest oczywiście fałszem).

Do najczęściej stosowanych tez dla kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie należą oprócz T21* tezy: T3*, T4*, T13*, T16*, T19*, T20*, które podane są w zestawieniu tez.

W przedstawionym tutaj systemie wtórne są następujące reguły:

1) Reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego do poprzednika implikacji:

$$\text{R1.} \quad \frac{\phi \rightarrow \psi}{\prod_a \phi \rightarrow \psi}$$

2) Reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego do następnika implikacji:

$$\text{R2.} \quad \frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \prod_a \psi} \quad (\text{o ile zmienna } a \text{ nie jest wolna w } \phi \text{ ani w założeniach dowodu})$$

3) Reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego do następnika implikacji:

$$\text{R3.} \quad \frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \sum_a \psi}$$

4) Reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego do poprzednika implikacji:

$$\text{R4.} \quad \frac{\phi \rightarrow \psi}{\sum_a \phi \rightarrow \psi} \quad (\text{o ile zmienna } a \text{ nie jest wolna w } \psi \text{ ani w założeniach dowodu})$$

5) Reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego w następniku implikacji:

$$\text{R1'.} \quad \frac{\phi \rightarrow \prod_a \psi}{\phi \rightarrow \psi}$$

6) Reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego w poprzedniku implikacji:

$$\text{R3'.} \quad \frac{\sum_a \phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \psi}$$

Łatwe dowody tych reguł pozostawiamy czytelnikowi.

7) Reguła podstawiania za wolne zmienne nazwowe:

$$\text{Jeśli } \vdash \phi, \text{ to } \vdash \phi(a/\xi)$$

$$\text{Dow. (1) } \vdash \phi$$

$$(2) \vdash \prod_a \phi$$

$$\vdash \phi(a/\xi)$$

{DII: 1}

{OII: 2}

8) Reguła podstawiania za zmienne reprezentujące predykaty:

$$\text{Jeśli } \vdash \phi, \text{ to } \vdash \phi(\varphi_1/\varphi_2)$$

gdzie φ_1 i φ_2 są zmiennymi reprezentującymi predykaty.

Dowód tej reguły jest indukcyjny ze względu na rząd tezy. Dla tez pierwszego rzędu budujemy dowód tezy $\phi(\varphi_1/\varphi_2)$ zastępując wszędzie w dowodzie tezy ϕ zmienną φ_1 przez zmienną φ_2 . Zakładając następnie ważność tej reguły dla tez rzędów mniejszych niż n , dowodzimy jej dla tez rzędu n -go, analogicznie jak w pierwszym kroku indukcyjnym.

9) Reguła przemianowywania zmiennych związanych:

Reguła ta pozwala w każdym wyrażeniu ϕ , przy założeniu, że zmienna β nie jest wolna w ψ :

a) zastąpić (w pewnym miejscu) wyrażenie $\prod_a \psi$ przez wyrażenie

$$\prod_\beta \psi(a/\beta)$$

b) zastąpić (w pewnym miejscu) wyrażenie $\sum_a \psi$ przez wyrażenie

$$\sum_\beta \psi(a/\beta)$$

A więc np. wyrażenie „ $\prod_x A(x)$ ” można zastąpić przez wyrażenie „ $\prod_y A(y)$ ”, wyrażenie „ $\prod_x xRy$ ” można zastąpić przez wyrażenie „ $\prod_z zRy$ ”. Podobnie np. wyrażenie „ $\sum_x A(x)$ ” można zastąpić przez wyrażenie „ $\sum_y A(y)$ ”, wyrażenie „ $\sum_x xRy$ ” można zastąpić przez wyrażenie „ $\sum_z zRy$ ”.

Założenie, że zmienna β nie jest wolna w ψ , jest tu istotne, gdyż w przeciwnym wypadku wyrażenia zastępowane mogłyby nie być równoważne, co ma np. miejsce w przypadku wyrażen: „ $\prod_x xRy$ ” i „ $\prod_y yRy$ ” czy też wyrażen: „ $\sum_x xRy$ ” i „ $\sum_y yRy$ ”.

Reguły tej dowodzimy przy pomocy reguły ekstensjonalności oraz metatez:

- (a) $\vdash \prod_a \psi \equiv \prod_\beta \psi(a/\beta)$, o ile zmienna β nie jest wolna w ψ ;
 (b) $\vdash \sum_a \psi \equiv \sum_\beta \psi(a/\beta)$, o ile zmienna β nie jest wolna w ψ .

Podamy dowód metatezy a). Z wyrażenia $\prod_a \psi$ otrzymujemy przy pomocy OΠ wyrażenie $\psi(a/\beta)$, stąd zaś wyrażenie $\prod_\beta \psi(a/\beta)$ przy pomocy reguły DΠ, którą wolno tu zastosować, gdyż — w myśl założenia — β nie jest zmienną wolną w wyrażeniu $\prod_a \psi$.

Z drugiej strony, otrzymujemy z wyrażenia $\prod_\beta \psi(a/\beta)$ przy pomocy OΠ wyrażenie $(\psi(a/\beta))(\beta/a)$, które przy założeniu, że β nie jest zmienną wolną w ψ , jest identyczne z wyrażeniem ψ . Stąd zaś otrzymujemy wyrażenie $\prod_a \psi$ przy pomocy reguły DΠ (regułę tę wolno tu zastosować, gdyż w wyrażeniu $\prod_\beta \psi(a/\beta)$ zmienna a nie jest wolna).

Dowód metatezy b) jest analogiczny.

Wtórna jest również tzw. reguła podstawiania za wyrażenia funkcyjne. Jednakże dowód indukcyjny tej reguły jest dość skomplikowany. Łatwiejszy jest jej dowód przy pomocy reguły dołączania definicji do dowodu, którą zajmujemy się w § 5. Tam też sformułujemy i omówimy dokładniej regułę podstawiania za wyrażenia funkcyjne.

Wymienione powyżej reguły odgrywają rolę reguł pierwotnych przy pewnych innych ujęciach węższego rachunku kwantyfikatorów, o których obecnie krótko wspomnimy.

Węższy rachunek kwantyfikatorów można mianowicie zbudować dołączając do aksjomatów i reguł rachunku zdań z § 6, rozdz. I, regułę podstawiania za wolne zmienne nazwowe oraz reguły R1-R4. Zamiast reguł R1 i R3 można przy tym przyjąć reguły R1' i R3'.

Węższy rachunek kwantyfikatorów można też zbudować metodą aksjomatyczną, dołączając do aksjomatów i reguł pierwotnych rachunku zdań z § 6, rozdz. I, jako aksjomaty rachunku kwantyfikatorów tezy T1 i T11, a jako reguły pierwotne — regułę dołączania kwantyfikatora ogólnego do tez, regułę podstawiania za wolne zmienne nazwowe i za wyrażenia funkcyjne, i wreszcie

regułę przemianowywania zmiennych związanych przez kwantyfikator ogólny. Kwantyfikator szczegółowy wprowadzamy przy pomocy definicji:

$$\sum_a \phi \equiv \sim \prod_a \sim \phi$$

(por. T25).

Tak zbudowane systemy są równoważne z systemem węższego rachunku kwantyfikatorów przedstawionym w tym podręczniku.

W dowodzie równoważności tych systemów z systemem założeniowym istotną rolę odgrywa — analogicznie jak w przypadku rachunku zdań — twierdzenie o dedukcji dla węższego rachunku kwantyfikatorów.

Weźmy np. pod uwagę system węższego rachunku kwantyfikatorów nadbudowany nad implikacyjno-negacyjnym rachunkiem zdań, dla którego ważne jest twierdzenie o dedukcji z rozdz. I, § 6, oparty na regułach R1-R4. Definicję — Def. I. z rozdz. I, § 6, rozszerzamy, określając dla takiego systemu dowód wyrażenia ϕ_n , na podstawie wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, jako skończony ciąg wyrażen, którego ostatnim wyrazem jest wyrażenie ϕ_n , i w którym każdy wyraz ciągu jest bądź aksjomatem, bądź jednym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, bądź jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu przy pomocy reguły RO lub jednej z reguł R1-R4, z zachowaniem zastrzeżeń podanych w sformułowaniu reguł R2 i R4 (m. in. zmienna a wprowadzana przy pomocy R2 czy też R4 nie może być zmienną wolną w żadnym z wyrażen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$). Przy pomocy tak określonego pojęcia dowodu definiujemy pojęcie konsekwencji, analogicznie jak w Def. II. z rozdz. I, § 6. Dla rozpatrywanego systemu Tw. 1, 2, 3, z rozdz. I, § 6 dają się udowodnić przy tak określonym pojęciu konsekwencji. Dowód twierdzenia o dedukcji przeprowadzamy analogicznie jak dowód Tw. 1. z rozdz. I § 6, z tym, że — stosownie do definicji pojęcia dowodu — uwzględniamy jeszcze cztery dodatkowe ewentualności (w których dalsze wiersze dowodu są uzyskane z wcześniejszych przy pomocy jednej z reguł R1-R4). Powołujemy się przy tym na odpowiednie tezy węższego rachunku kwantyfikatorów.

Udowodniwszy Tw. 1, 2, 3 dla rozpatrywanego systemu wykazujemy następnie, że reguła OΣ jest w tym systemie regułą wtórną, w tym sensie, że jeśli istnieje dowód jakiegoś wyrażenia przeprowadzony przy pomocy reguły OΣ, to istnieje dowód tego wyrażenia przeprowadzony przy pomocy reguł pierwotnych (RO, R1-R4) i tez systemu.

W odniesieniu do systemu węższego rachunku kwantyfikatorów powstają — podobnie jak w odniesieniu do rachunku zdań — zagadnienia niesprzeczności, niezależności, zupełności i pełności, którym poświęcimy obecnie kilka uwag.

Można wykazać, że system ten jest niesprzeczny i że reguły pierwotne, na których oparliśmy go, są niezależne. W przeciwieństwie do rachunku zdań, węższy rachunek kwantyfikatorów nie jest zupełny. Można mianowicie wykazać, że np. wyrażenie „ $\sum_x A(x) \rightarrow \prod_x A(x)$ ” ani nie jest tezą, ani też dołączone do tez nie prowadzi do sprzeczności. Natomiast węższy rachunek kwantyfi-

katorów jest pełny, a więc każde jego wyrażenie prawdziwe jest jego tezą. Twierdzenie to udowodnił K. Gödel w r. 1930.

Pojęcie prawdziwości, użyte tutaj, określa się przy pomocy pojęcia spełniania. Intuicyjny sens tego ostatniego pojęcia wyjaśnimy na następujących przykładach:

Mówimy, że liczba 2 spełnia równanie $x + 3 = 5$, że liczby 1 i 3 spełniają warunek: $x + y = 4$. Natomiast liczba 1 nie spełnia równania: $x + 3 = 5$, liczby 1 i 2 nie spełniają warunku: $x + y = 4$. Jeśli każdy ciąg przedmiotów pewnego niepustego zbioru lub, jak zwykle mówimy, pewnej dziedziny spełnia dane wyrażenie, to mówimy, że to wyrażenie jest prawdziwe w tej dziedzinie. Np. wyrażenie „ $x < y \rightarrow \sum_x x < z < y$ ” jest prawdziwe w dziedzinie wszystkich liczb

wymiernych (lub liczb rzeczywistych), nie jest zaś prawdziwe w dziedzinie wszystkich liczb naturalnych, gdyż liczby naturalne 2 i 3 nie spełniają tego wyrażenia. Wyrażenie, które jest prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie (tzn. w dziedzinie, do której należy przynajmniej jeden przedmiot), nazywamy wyrażeniem prawdziwym*. W tym też sensie każda teza węższego rachunku kwantyfikatorów jest prawdziwa, każde zaś wyrażenie prawdziwe tego rachunku jest jego tezą. Ograniczenie dotyczące niepustości dziedziny jest istotne. Niektóre bowiem tezy węższego rachunku kwantyfikatorów nie są prawdziwe w dziedzinie pustej. Np. wyrażenie „ $\sim \sum_x \sim A(x) \rightarrow \sum_x A(x)$ ” jest tezą, lecz w dzie-

dzinie pustej jest fałszywe. Poprzednik bowiem jego jest wtedy prawdziwy (bo skoro nie istnieją przedmioty należące do dziedziny, to nie istnieją też przedmioty tej dziedziny nie mające własności A), następnik zaś jest fałszywy (stwierdza bowiem istnienie w danej dziedzinie przedmiotów mających własność A).

Chociaż dla każdego wyrażenia prawdziwego węższego rachunku kwantyfikatorów istnieje jego dowód, to jednak nie istnieje ogólna metoda pozwalająca w skończonej ilości określonych kroków rozstrzygnąć o każdym wyrażeniu tego rachunku, czy jest ono prawdziwe. Węższy rachunek kwantyfikatorów jest więc — w przeciwieństwie do rachunku zdań — systemem nierozstrzygalnym**. Dlatego też nie mogliśmy podać dla węższego rachunku kwantyfikatorów metody sprawdzania takiej, jaką jest metoda zerojedynkowa dla rachunku zdań. Jednakże pewne części rozważanego systemu, jak np. węższy jednoargumentowy rachunek kwantyfikatorów (do którego należą wszystkie tezy podane w tym paragrafie z wyjątkiem praw przestawiania kwantyfikatorów), są rozstrzygalne i dla nich podawane są w obszerniejszych podręcznikach różne metody rozstrzygnięcia (sprawdzania).

* Dokładną definicję pojęcia spełniania i prawdy podał A. Tarski w pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. 1933.

** Twierdzenie to udowodnił A. Church w r. 1936. Pojęcie rozstrzygalności precyzuje się przy pomocy pojęcia funkcji rekursywnych.

Jak widzieliśmy w rozdz. I, § 3 i w obecnym paragrafie, twierdzenia rachunku zdań czy też rachunku kwantyfikatorów mogą być formułowane w dwojaki sposób: 1) w postaci tez systemu, 2) w postaci twierdzeń metasystemu, stwierdzających, że tezami są wyrażenia o określonej budowie. To drugie ujęcie będziemy nazywać metalogicznym. W związku z tym, stosując rachunek zdań czy też węższy rachunek kwantyfikatorów w jakiejś dziedzinie wiedzy, możemy postępować w dwojaki sposób.

Pierwszy polega na tym, że system twierdzeń danej dziedziny wiedzy opieramy na rachunku zdań czy też na węższym rachunku kwantyfikatorów w taki sam sposób, w jaki węższy rachunek kwantyfikatorów oparliśmy na rachunku zdań. Wówczas wszystkie symbole rachunku zdań czy też węższego rachunku kwantyfikatorów, w szczególności zmienne zdaniowe czy też zmienne reprezentujące predykaty, należą do symboli danego systemu. Wszystkie zaś tezy systemu rachunku zdań czy też węższego rachunku kwantyfikatorów należą do tez danego systemu.

Przy drugim ujęciu posługujemy się metalogicznym sformułowaniem twierdzeń rachunku zdań czy też węższego rachunku kwantyfikatorów. Nie wprowadzamy wówczas do systemu ani zmiennych zdaniowych, ani zmiennych reprezentujących predykaty. Litery greckie $\phi, \psi, \chi, \dots$, występujące w metalogicznym sformułowaniu twierdzeń rachunku zdań lub węższego rachunku kwantyfikatorów, oznaczają wtedy dowolne wyrażenia danego systemu. Tak ujęty rachunek zdań (węższy rachunek kwantyfikatorów) nazywa się niekiedy stosowanym rachunkiem zdań (stosowanym węższym rachunkiem kwantyfikatorów).

Reguły pierwotne rachunku zdań, jak również węższego rachunku kwantyfikatorów, które podaliśmy w tych rozdziałach, pozwalają zbudować te rachunki zarówno w pierwszym, jak i w drugim ujęciu.

Ćwiczenia

1. Udowodnić tezy:

- $\sum_x (A(x) \rightarrow B(x)) \equiv \prod_x A(x) \rightarrow \sum_x B(x)$
- $\sum_x \prod_y (A(x) \rightarrow B(y)) \equiv \prod_y \sum_x (A(x) \rightarrow B(y))$
- $\prod_x (A(x) \rightarrow p) \rightarrow (\prod_x A(x) \rightarrow p)$
- $(\sum_x A(x) \rightarrow p) \rightarrow \sum_x (A(x) \rightarrow p)$
- $\sum_x \sum_{A(y)} xRy \equiv \sum_{A(y)} \sum_x xRy$
- $\prod_x \prod_{A(y)} xRy \equiv \prod_{A(y)} \prod_x xRy$

Wykazać przy pomocy przykładów, że implikacje odwrotne do c) i d) są fałszywe.

2. Udowodnić następujące prawa negowania, rozkładania, przenoszenia i przestawiania kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie:

- a) $\sim \prod_{A(x)} B(x) = \sum_{A(x)} \sim B(x)$
- b) $\sim \sum_{A(x)} B(x) = \prod_{A(x)} \sim B(x)$
- c) $\prod_{A(x)} (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow (\prod_{A(x)} B(x) \rightarrow \prod_{A(x)} C(x))$
- d) $\prod_{A(x)} (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow (\sum_{A(x)} B(x) \rightarrow \sum_{A(x)} C(x))$
- e) $\prod_{A(x)} B(x) \vee \prod_{A(x)} C(x) \rightarrow \prod_{A(x)} (B(x) \vee C(x))$
- f) $\sum_{A(x)} (B(x) \vee C(x)) = \sum_{A(x)} B(x) \vee \sum_{A(x)} C(x)$
- g) $\sum_{A(x)} (B(x) \wedge C(x)) \rightarrow \sum_{A(x)} B(x) \wedge \sum_{A(x)} C(x)$
- h) $\prod_{A(x)} (p \rightarrow B(x)) = p \rightarrow \prod_{A(x)} B(x)$
- i) $\sum_{A(x)} (p \rightarrow B(x)) \rightarrow (p \rightarrow \sum_{A(x)} B(x))$
- j) $\prod_{A(x)} (B(x) \rightarrow p) = \sum_{A(x)} B(x) \rightarrow p$
- k) $\sum_{A(x)} (B(x) \rightarrow p) \rightarrow (\prod_{A(x)} B(x) \rightarrow p)$
- l) $\prod_{A(x)} \prod_{B(y)} xRy = \prod_{B(y)} \prod_{A(x)} xRy$
- m) $\sum_{A(x)} \sum_{B(y)} xRy = \sum_{B(y)} \sum_{A(x)} xRy$
- n) $\sum_{A(x)} [B(x) \wedge p] = \sum_{A(x)} B(x) \wedge p$

Wykazać przy pomocy przykładów, że implikacje odwrotne do i) oraz k) nie są prawdziwe. Udowodnić te implikacje odwrotne poprzedzone warunkiem: $\sum_x A(x)$.

§ 4. IDENTYCZNOŚĆ

Do terminów logicznych, prócz stałych rachunku zdań i kwantyfikatorów, zaliczamy też znak „=”, który nazywamy znakiem identyczności lub równości. Przy pomocy tego znaku zanotowana jest większość wzorów matematycznych.

Wprowadzając do logiki znak identyczności przyjmujemy aksjomat

$$A1. \quad x = x$$

Jest to jedyny aksjomat, który wprowadzamy do systemów logicznych rozwijanych w tej książce. Aksjomat ten jest najzupełniej intuicyjny.

Równie intuicyjna jest reguła dołączania nowych wierszy do dowodu, o schemacie

$$EI \quad \frac{a = \beta \quad \phi}{\phi(\beta/a)}$$

Litery a i β są tu zmiennymi nazwowymi, ϕ jest dowolnym wyrażeniem zdaniowym, $\phi(\beta/a)$ jest wyrażeniem, które powstaje z ϕ przez zastąpienie zmiennej wolnej a , nie będącej w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną β , przez zmienną β . Jeśli zmienna a występuje parokrotnie w ϕ , to nie musimy zastępować jej wszędzie zmienną β . Jeśli więc ϕ oznacza wyrażenie „ $x = y \rightarrow y = x$ ”, to $\phi(t/x)$ oznacza zarówno wyrażenie „ $t = y \rightarrow y = t$ ”, jak też wyrażenie „ $t = y \rightarrow y = x$ ” i „ $x = y \rightarrow y = t$ ”.

Wprowadzoną regułę nazywamy regułą ekstensjonalności dla identyczności. Jest ona analogiczna do reguły ekstensjonalności dla równoważności. O ile jednak ta druga reguła jest regułą wtórną rachunku zdań, to reguła ekstensjonalności dla identyczności jest regułą pierwotną.

Dołączając do węższego rachunku kwantyfikatorów aksjomat A1 oraz regułę EI i uogólniając jednocześnie reguły tego rachunku tak, by dotyczyły również wyrażeń zdaniowych zanotowanych przy pomocy znaku identyczności, otrzymujemy tzw. węższy rachunek kwantyfikatorów z identycznością. Podamy kilka najprostszych tez tego rachunku.

$$T1. \quad \begin{array}{ll} x = y \rightarrow y = x & \\ \text{Dow. (1) } x = y & \{\text{zał.}\} \\ \quad (2) \quad x = x & \{A1\} \\ \quad \quad y = x & \{EI: 1; 2\} \end{array}$$

Regułą wtórną ze względu na EI i T1 jest następująca reguła, którą również oznaczamy symbolem EI:

$$EI \quad \frac{a = \beta \quad \phi}{\phi(a/\beta)}$$

$$T2. \quad \begin{array}{ll} x = y \wedge y = z \rightarrow x = z & \\ \text{Dow. (1) } x = y & \{\text{zał.}\} \\ \quad (2) \quad y = z & \\ \quad \quad x = z & \{EI: 1; 2\} \end{array}$$

Aksjomat A1 i tezy T1, T2 stwierdzają, że identyczność jest zwrotna, symetryczna i przechodnia*.

* Relacja R jest zwrotna, gdy $\prod_x xRx$; symetryczna, gdy $\prod_x \prod_y (xRy \rightarrow yRx)$; przechodnia, gdy $\prod_x \prod_y \prod_z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Z T1 i T2 wynika

$$T2a. \quad x = x' \cdot y = x \rightarrow x = y$$

Reguła ekstensjonalności EI ograniczona jest dwoma warunkami:

- 1) zastępujemy tylko zmienne wolne,
- 2) zmienna a , którą zastępujemy, nie występuje w ϕ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną, którą wstawiamy na miejsce zmiennej a .

Wykażemy, że oba ograniczenia są istotne. W tym celu narzucamy, że wyrażenie:

$$(a) \quad \prod_x x = x$$

$$(b) \quad \prod_x x = y \rightarrow x = y$$

są tezami węższego rachunku kwantyfikatorów z identycznością. Wyrażenie a) otrzymujemy z A1 stosując regułę poprzedzania tez kwantyfikatorem ogólnym, wyrażenie b) otrzymujemy na podstawie reguły OII.

Wyrażenie

$$x = y \rightarrow x = y$$

w którym zmienne reprezentują nazwy liczb naturalnych, jest — oczywiście — fałszywe. Nie przestrzegając jednak ograniczeń 1), 2) moglibyśmy udowodnić to wyrażenie:

Dow. (1) $x = y$		{zal.}
(2) $\prod_x x = x$		{a}
(3) $\prod_x x = y \rightarrow x = y$		{b}
(4) $\prod_x x = x \rightarrow x = y$		{EI: 1; 3}
$x = y$		{EO: 4; 2}

Otrzymując wyrażenie (4) zastąpiliśmy, wbrew ograniczeniu 2), zmienną „ y ”, występującą w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną „ x ”, tą zmienną.

Podajemy inny (również niepoprawny) dowód rozważanego wyrażenia:

Dow. (1') $x = y$		{zal.}
(2') $\prod_x x = x$		{a}
(3') $\prod_x x = y \rightarrow x = y$		{b}
(4') $\prod_x x = y$		{EI: 1'; 2'}
$x = y$		{EO: 3'; 4'}

Otrzymując wyrażenie (4') zastąpiliśmy, wbrew ograniczeniu 1), zmienną „ x ” przez zmienną „ y ”.

$$T3. \quad x = y \cdot A(x) \rightarrow A(y)$$

Latwy dowód tej tezy postawiamy czytelnikowi.

Na podstawie jednego z praw transpozycji słownej otrzymujemy z T3

$$T3a. \quad A(x) \cdot \sim A(y) \rightarrow x \neq y$$

Wyrażenie „ $x = y$ ” jest użyte tutaj jako skrót wyrażenia „ $\sim(x \neq y)$ ”. Tezę T3 można odczytać w następujący sposób: Jeśli jakiś własność przypisuje pewnemu przedmiotowi, to przypisuje również przedmiotowi z nim identycznemu.

Według T3a, jeśli jakiś własność przypisuje przedmiotowi x , a nie przypisuje przedmiotowi y , to x jest różny od y .

Pewne sformułowanie tez T3, T3a znajdujemy już u Arystotelesa, który sformułował również jeszcze kilka innych twierdzeń dotyczących identyczności (wśród nich np. T21a).

$$T4. \quad A(x) = \sum_{y=x} A(y)$$

Dow. (a) (1) $A(x)$		{zal.}
(2) $x = x$		{A1}
$\sum_{y=x} A(y)$		{DS*: 2; 1}
(b) (1) $\sum_{y=x} A(y)$		{zal.}
(2) $a_x = x$		{OS*: 1}
(3) $A(a_x)$		{EI: 2; 3}
$A(x)$		

Tezę T4 narwał H. Scholtz uogólnionym podstawowym twierdzeniem Descartes'a. Przeprowadzając swoje rozumowanie, mające na celu uzyskanie twierdzenia nie dającego się w żadnym wypadku podać w wątpliwość, dochodzi Descartes do wniosku, że jest nim twierdzenie „ja myślę”. I dalej wnioskując: myślę, a więc istnieję. Według T4 zdanie „ja myślę” jest równoważne zdaniu „istnieje taki x , że x jest identyczny ze mną i x myśli” (innymi słowy „istnieje identyczny ze mną istota myśląca”). Z tego zaś ostentacyjnego zdania wynika zdanie „istnieje taki x , że x jest identyczny ze mną” (czyli „ja istnieję”). Nazwą właściwego podstawowego twierdzenia Descartes'a oznaczamy Scholtz tezę: $A(x) \rightarrow \sum_y y = x$, według której można bezpośrednio przeprowadzić rozumowanie tu wnioskowanie.

Zdanie o postaci „ $A(x)$ ”, w którym na miejscu zmiennej x występuje jakiś nazwa jednostkowa, nazywa się zdaniem jednostkowym. Tem T4 porwało zastąpić zdanie jednostkowe przez logicznie równoważne zdanie zaczynające się od kwantyfikatora uniwersalnego.

Następna teza, której dowód pozostawiamy czytelnikowi, pozwala zastąpić zdanie jednostkowe przez logicznie równoważne mu zdanie zaczynające się od kwantyfikatora ogólnego.

$$T5. \quad A(x) \equiv \prod_{y=x} A(y)$$

W zastosowaniach węższego rachunku kwantyfikatorów z identycznością do systemów, w których za zmienne nazwowe można podstawiać złożone wyrażenia nazwowe (np. wyrażenia $a+b$, $a \cdot b$ itp.), posługujemy się wtórną regułą ekstensjonalności dla identyczności, pozwalającą na zastępowanie złożonych wyrażeń nazwowych. Podamy tu jedno ze sformułowań takiej reguły wtórnej.

Niech ξ i η będą dowolnymi wyrażeniami nazwowymi. Reguła o schemacie:

$$\frac{\xi = \eta \quad \phi}{\phi(\eta/\xi)}$$

pozwała zastąpić wyrażenie ξ przez wyrażenie η , o ile spełnione są następujące dwa warunki (będące uogólnieniami warunków 1) i 2), podanych w sformułowaniu reguły EI):

- 1) żadna zmienna wolna wyrażenia ξ nie jest związana w ϕ w tym miejscu, w którym wyrażenie ξ jest zastępowane,
- 2) żadna zmienna wolna wyrażenia η nie może stać się związana w $\phi(\eta/\xi)$ w tym miejscu, w którym ξ zostało zastąpione przez η (tj. wyrażenie ξ nie występuje w ϕ w miejscu, w którym jest zastępowane, w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąś zmienną, która jest wolna w wyrażeniu η).

Dowód tej reguły pozostawiamy czytelnikowi.

Według tej reguły np. na podstawie tezy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ z wyrażenia „ $(a+b)^2 = x$ ” otrzymujemy wyrażenie „ $a^2 + 2ab + b^2 = x$ ”.

W węższym rachunku kwantyfikatorów z identycznością zdefiniować możemy kwantyfikator jednostkowy:

$$D1. \quad \vdash \sum_a \phi(a) \equiv \sum_a \phi(a) \wedge \prod_{\phi(a)} \prod_{\phi(\beta)} a = \beta$$

$\phi(a)$ jest tu funkcją zdaniową o zmiennej wolnej a , β nie jest zmienną wolną w $\phi(a)$, zaś $\phi(\beta)$ powstaje z $\phi(a)$ przez podstawienie zmiennej β za zmienną a . Wyrażenie „ $\sum_x A(x)$ ” czytamy: istnieje dokładnie jedno takie x , że $A(x)$.

Przy pomocy kwantyfikatora jednostkowego następującemu twierdzeniu arytmetyki liczb rzeczywistych:

$$\sum_x x^2 = 2 \wedge \prod_{x^2=2} \prod_{y^2=2} x = y$$

możemy nadać wyraźnie prostszą postać:

$$\sum_x x^2 = 2$$

Na podstawie prawa negowania koniunkcji i prawa negowania kwantyfikatora ogólnego o ograniczonym zakresie otrzymujemy z D1 tezę:

$$T6. \quad \sim \sum_x A(x) \equiv \sim \sum_x A(x) \vee \sum_{A(x)} \sum_{A(y)} x \neq y$$

Według T6 zdanie „nieprawda, że istnieje dokładnie jeden przedmiot o własności A ” jest równoważne zdaniu „nie istnieją przedmioty o własności A bądź też istnieją dwa różne przedmioty o własności A ”.

Przy pomocy reguły ekstensjonalności rachunku kwantyfikatorów oraz definicji D1 można udowodnić następującą tezę:

$$T7. \quad \prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow [\sum_x A(x) \equiv \sum_x B(x)]$$

Na podstawie tej tezy można stosować regułę ekstensjonalności w rachunku kwantyfikatorów również do wyrażeń, w których występuje kwantyfikator jednostkowy.

W węższym rachunku kwantyfikatorów z identycznością można wprowadzić deskrypty. Deskryptem jest sensowne wyrażenie nazwowe $\iota\phi(a)$, zbudowane z operatora deskrypcyjnego „ ι ”, zmiennej nazwowej a i funkcji zdaniowej $\phi(a)$, w której a jest zmienną wolną. Tę funkcję zdaniową nazywamy zasięgiem operatora deskrypcyjnego w danym wyrażeniu. Podobnie jak w przypadku wyrażeń zbudowanych przy pomocy kwantyfikatorów odróżniamy w zasięgu operatora deskrypcyjnego zmienne wolne i związane. Deskrypt „ $\iota A(x)$ ” czy-

tamy: jedyne x takie, że $A(x)$. Jeśli istnieje dokładnie jeden przedmiot spełniający funkcję zdaniową $\phi(a)$, wyrażenie $\iota\phi(a)$ jest sensowne, jeśli nie istnieje

dokładnie jeden taki przedmiot, wyrażenie to jest bezsensowne. Przyjmijmy np. że zmienna x przebiega liczby naturalne. Wtedy wyrażenie nazwowe „ $\iota(2 < x < 4)$ ” jest sensowne, bo istnieje dokładnie jedna liczba naturalna zawarta między 2 i 4. Natomiast wyrażenia „ $\iota(2 < x < 3)$ ”, „ $\iota(2 < x < 5)$ ”

są bezsensowne, gdyż nie istnieje dokładnie jedna liczba naturalna spełniająca funkcję zdaniową „ $2 < x < 3$ ” czy też funkcję zdaniową „ $2 < x < 5$ ”; w pierwszym przypadku taka liczba naturalna w ogóle nie istnieje, w drugim istnieją dwie różne liczby naturalne spełniające daną funkcję zdaniową. Jeśli w funkcji zdaniowej $\phi(a)$, stanowiącej zasięg operatora deskrypcyjnego, występują zmienne wolne różne od zmiennej a , związanej przez ten operator, to pewne podstawienia wyrażenia $\iota\phi(a)$ mogą być sensowne, zaś inne bezsensowne.

Np. z wyrażenia „ $\iota(y < x < z)$ ”, w którym zmienne przebiegają liczby natu-

ralne można przez podstawienie uzyskać wyrażenie sensowne „ $\sum_x (2 < x < 4)$ “, jak i wyrażenie bezsensowne „ $\sum_x (2 < x < 5)$ “. Wyrażenie „ $\sum_x (y < x < z)$ “ uważamy za sensowne przy założeniu $\sum_x (y < x < z)$, tzn. formułując twierdzenia zawierające wyrażenie „ $\sum_x (y < x < z)$ “ będziemy je poprzedzać warunkiem: $\sum_x (y < x < z)$.

W myśl tych uwag w węższym rachunku kwantyfikatorów z identycznością do deskryptów, rozumianych jako sensowne wyrażenia nazwowe o postaci „ $\iota\phi(a)$ “, nie zaliczymy wyrażenia „ $\sum_x (x \neq x)$ “, gdyż $\sim \sum_x x \neq x$, natomiast zaliczymy do nich wyrażenie „ $\sum_x (x = y)$ “, gdyż $\sum_x (x = y)$. Zaliczymy do nich również wyrażenie „ $\sum_x A(x)$ “ przy założeniu $\sum_x A(x)$. Deskrypty, jako wyrażenia nazwowe, można podstawiać za zmienne nazwowe, stosując czy to regułę podstawiania do tez, czy o regułę opuszczania kwantyfikatora ogólnego. Przyjmujemy jednak — zgodnie z podanymi powyżej uwagami o sensowności wyrażen o postaci „ $\iota\phi(a)$ “ — następujące ogólne ograniczenie, dotyczące tez zawierających deskrypty:

Każdą tezę, uzyskaną z dotychczasowych tez, a zawierającą deskrypt „ $\iota\phi(a)$ “ poprzedzamy warunkiem $\sum_a \phi(a)$. Warunek ten można pominąć, gdy jest on tezą lub jest konsekwencją innych warunków, stanowiących poprzednik danego wyrażenia.

W myśl tego ograniczenia z aksjomatu A1 uzyskujemy przez podstawienie tezę:

$$(a) \quad \sum_x A(x) \rightarrow \iota A(x) = \iota A(x)$$

Podobnie: z tezy $\sum_y y = x$ otrzymujemy przez podstawienie tezę:

$$(b) \quad \sum_x A(x) \rightarrow \sum_y y = \iota A(x)$$

Zgodnie z naszym ograniczeniem: z tezy (b) nie będziemy mogli przez transpozycję wyprowadzić wyrażenia: $\sim \sum_y y = \iota A(x) \rightarrow \sim \sum_x A(x)$ jako tezy. Natomiast stosując do tezy (b) transpozycję i uwzględniając nasze ograniczenie otrzymamy tezę:

$$(c) \quad \sum_x A(x) \rightarrow [\sim \sum_y y = \iota A(x) \rightarrow \sim \sum_x A(x)]$$

Jako szczególny przypadek tezy (a) otrzymujemy tezę:

$$(a') \quad \sum_x x = y \rightarrow [\iota(x = y) = \iota(x = y)]$$

Ponieważ jednak wyrażenie: $\sum_x x = y$ jest tezą (por. ćwic. 2c), możemy do tej tezy i tezy (a') zastosować regułę odrywania. Otrzymamy wtedy tezę:

$$(d) \quad \iota(x = y) = \iota(x = y)$$

Przyjmujemy również następującą pierwotną regułę dołączania operatora deskrypcyjnego:

$$D\iota \quad \frac{\sum_a \phi(a)}{\phi(a/\iota\phi(a))}$$

Podamy przykładowo dowody kilku tez, w których będziemy korzystać z reguły D ι jako reguły dołączania nowych wierszy do dowodu.

$$T8. \quad \sum_x A(x) \rightarrow [A(y) \equiv y = \iota A(x)]$$

Dow. (1)	$\sum_x A(x)$	{zał.}
(2)	$A(\iota A(x))$	{D ι : 1}
(1.1)	$A(y)$	{z. dow.}
(1.2)	$A(y) \wedge A(\iota A(x)) \rightarrow y = \iota A(x)$	{D1; 1}
(1.3)	$y = \iota A(x)$	{1.2; 1.1; 2}
(2.1)	$y = \iota A(x)$	{z. dow.}
(2.2)	$A(y)$	{EI: 2.1; 2}
	$A(y) \equiv y = \iota A(x)$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3; 2.1 $\rightarrow$ 2.2}

$$T9. \quad \sum_x A(x) \rightarrow [B(\iota A(x)) \equiv \sum_{B(x) \wedge A(x)} \prod_{A(y)} y = x]$$

Dow. (1)	$\sum_x A(x)$	{zał.}
(2)	$A(\iota A(x))$	{D ι : 1}
(1.1)	$B(\iota A(x))$	{z. dow.}
(1.2)	$A(y) \rightarrow y = \iota A(x)$	{RO, OE: T8; 1}
(1.3)	$\prod_{A(y)} y = \iota A(x)$	{D Π^* : 1.2}
(1.4)	$\sum_{B(x) \wedge A(x)} \prod_{A(y)} y = x$	{DK, D Σ^* : 1.1; 2; 1.3}
(2.1)	$\sum_{B(x) \wedge A(x)} \prod_{A(y)} y = x$	{z. dow.}

		{O Σ^* , OK: 2.1}
(2.2)	$B(a)$	
(2.3)	$A(a)$	{RO, OE: T8; 1}
(2.4)	$A(a) \rightarrow a = \iota A(x)$	{RO: 2.4; 2.3}
(2.5)	$a = \iota A(x)$	{EI: 2.5; 2.2}
(2.6)	$B(\iota A(x))$	
	$B(\iota A(x)) = \sum_{B(x) \wedge A(x)} \prod_{A(y)} y = x$	{1.1 $\rightarrow$ 1.4; 2.1 $\rightarrow$ 2.6}
T10.	$\sum_x A(x) \wedge \prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow \iota A(x) = \iota B(x)$	{zał.}
(1)	$\sum_x A(x)$	
(2)	$\prod_x [A(x) \equiv B(x)]$	
(3)	$\sum_x B(x)$	{RO, RO _E : T7; 2; 1}
(4)	$A(\iota A(x))$	{D ι : 1}
(5)	$A(\iota A(x)) \equiv B(\iota A(x))$	{O Π : 2}
(6)	$B(\iota A(x))$	{RO _E : 5; 4}
(7)	$B(\iota A(x)) \equiv \iota A(x) = \iota B(x)$	{RO: T8; 3}
	$\iota A(x) = \iota B(x)$	{RO _E : 7; 6}

W poprzedniku T10 pominęliśmy warunek $\sum_x B(x)$, gdyż — jak widać z dowodu — jest on konsekwencją pozostałych warunków stanowiących poprzednik tezy T10. Teza T10 pozwala rozszerzyć regułę ekstensjonalności rachunku kwantyfikatorów na wyrażenia zawierające deskrypty.

Ćwiczenia

1. Udowodnić tezy:

- $\prod_x \sum_y x = y$
- $x = y = \prod_z (x = z \equiv y = z)$
- $u = z \wedge v = t \equiv \prod_x \prod_y (x = u \wedge y = v \equiv x = z \wedge y = t)$
- $u = z \wedge v = t \rightarrow \prod_x \prod_y (x = u \vee y = v \equiv x = z \vee y = t)$
- $xRy = \sum_{z=x} \sum_{u=y} zRu$
- $xRy = \prod_{z=x} \prod_{u=y} zRu$

2. Udowodnić tezy

- $\sum_a \phi(a) = \sum_{\phi(a)\phi(\beta)} \prod \beta = a$
- $\sum_a \phi(a) = \sum_a \prod_{\beta} [\beta = a \equiv \phi(\beta)]$
- $\sum_x x = y$
- $\iota(x = y) = y$

Wykazać, że przyjmując każdą z równoważności a), b) jako definicję kwantyfikatora jednostkowego, można z niej wyprowadzić równoważność podaną w D1.

3. Zdefiniować kwantyfikatory ilościowe występujące w kontekstach:

- istnieją dokładnie dwa takie x , że $A(x)$,
- istnieją co najmniej dwa takie x , że $A(x)$,
- istnieją co najwyżej dwa takie x , że $A(x)$,
- istnieją dokładnie trzy takie x , że $A(x)$.

§ 5. DEFINICJE

W systemach opartych na węższym rachunku kwantyfikatorów (z identycznością) posługujemy się zwykle jeszcze jedną regułą, dotychczas nie omówioną, mianowicie regułą dołączania definicji do dowodu. Sformułowanie tej reguły poprzedzimy kilkoma ogólnymi uwagami o definicjach.

W każdej niemal nauce wprowadza się definicje nowych terminów przy pomocy terminów, których znaczenie zostało uprzednio ustalone. Budując system aksjomatyczny staramy się o to, by ilość terminów pierwotnych była jak najmniejsza. Inne terminy takiego systemu definiujemy przy pomocy terminów pierwotnych.

Przy pomocy definicji można dla każdego wyrażenia zawierającego wyraz zdefiniowany podać wyrażenie równoważne nie zawierające tego wyrazu, czyli — jak to nieraz mówimy — można wyeliminować wyraz definiowany z każdego kontekstu.

Definicje formułowane bywają bądź jako reguły (należące do metasystemu), pozwalające na zastępowanie określonych wyrażeń systemu innymi wyrażeniami, bądź jako wyrażenia o specjalnej postaci, zaliczane do tez systemu. O pierwszym sposobie była mowa w związku z definicjami w aksjomatycznym systemie rachunku zdań (rozdz. I, § 6). Spośród definicji drugiego rodzaju zajmiemy się tutaj pokrótce definicjami normalnymi, warunkowymi i indukcyjnymi.

Definicje normalne mają postać równoważności lub równości. Po lewej stronie takiej definicji występuje wyraz definiowany. Człon definicji normalnej zawierający wyraz definiowany nazywa się definiendum, drugi jej człon nazywa się definiensem.

Przykładami tego rodzaju definicji są:

- (1) $\text{Prim}(x) \equiv x > 1 \wedge \prod_{y \neq 1} (y|x \rightarrow y = x)$
 (2) $x \geq y \equiv x > y \vee x = y$
 (3) $1 = \text{seq}(0)$
 (4) $\text{seq}(n) = n + 1$
 (5) $|x| = y \equiv (x \geq 0 \wedge y = x \vee x < 0 \wedge y = -x)$
 (6) $x - y = z \equiv z + y = x$

W definicjach (1) i (4) zmienne przebiegają zbiór wszystkich liczb naturalnych, w pozostałych — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

W definicji (1) wyraz definiowany jest predykatem jednoargumentowym, w definicji (2) — predykatem dwuargumentowym, w definicji (3) wyrazem definiowanym jest stała nazwa, w definicjach (4) i (5) — funktor nazwotwórczy o jednym argumentem nazwowym, w (6) — funktor nazwotwórczy o dwóch argumentach nazwowych.

Definicje normalne, aby były poprawne, powinny spełniać następujące warunki:

- 1) W definiensie mogą występować tylko terminy pierwotne lub terminy uprzednio poprawnie zdefiniowane. Wyraz definiowany musi być różny od wszystkich wyrazów występujących już w systemie. Nie może więc w definiensie wystąpić ani wyraz definiowany, ani żaden wyraz, który został określony przy pomocy wyrazu definiowanego.

Jeśli ten ostatni warunek nie jest spełniony, mówimy o błędnym kole w definiowaniu.

- 2) W definiendum każda zmienna może wystąpić tylko jeden raz.

Jeśli ten warunek nie jest spełniony, nie można przy pomocy definicji wyeliminować wyrazu definiowanego z pewnych kontekstów.

Np. przy pomocy równoważności:

$$\log_a a = b \equiv a^b = a$$

nie spełniającej warunku 2), nie można wyeliminować znaku „log” np. z kontekstu „ $\log_{10} 100 = 2$ ”.

- 3) Warunek jednorodności: każda zmienna wolna występująca po jednej stronie definicji powinna wystąpić jako wolna po drugiej jej stronie.

Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to definicja może prowadzić do sprzeczności. Np. z definicji:

- (7) $a||b \equiv a$ i b leżą na płaszczyźnie a i nie mają punktu wspólnego

można otrzymać sprzeczność w następujący sposób:

Niech a_1 i b_1 nie mają punktu wspólnego, leżą na płaszczyźnie a_1 i nie leżą na płaszczyźnie a_1 . Podstawiając w (7): $a/a_1, b/b_1, a/a_1$ i odrywając prawą stronę

tego podstawienia otrzymamy: $a_1||b_1$. Podstawiając zaś w (7): $a/a_1, b/b_1, a/a_2$, negując obie strony tego podstawienia i odrywając prawą stronę tej równoważności otrzymujemy: $\sim(a_1||b_1)$.

Warunki 1), 2), 3) są wystarczającymi warunkami poprawności takich definicji normalnych, w których w definiendum oprócz wyrazu definiowanego występują tylko zmienne (jak np. w definicjach (1)-(4)).

W definicjach (5) i (6) w definiendum oprócz wyrazu definiowanego występuje jeszcze znak równości. Ogólna postać takich definicji jest następująca:

$$(a) \quad f(x_1, \dots, x_n) = y \equiv \phi(x_1, \dots, x_n, y)$$

gdzie „ f ” jest definiowanym funktorem nazwotwórczym o n argumentach nazwowych lub funktorowych, definiens zaś jest funkcją zdaniową, w której zmiennymi wolnymi są zmienne $x_1, \dots, x_n, y$ i tylko te zmienne.

Definicja normalna o postaci (a) oprócz warunków 1), 2), 3) powinna jeszcze spełniać tzw. warunek istnienia i jedyności. Mówimy zaś, że definicja normalna spełnia ten warunek, jeśli wyrażenie

$$(8) \quad \prod_{x_1} \dots \prod_{x_n} \sum_y \phi(x_1, \dots, x_n, y)$$

jest tezą.

Jeśli natomiast wyrażenie (8) jest fałszywe, to definicja o postaci (a) może prowadzić do sprzeczności. Np. definicja:

$$(9) \quad \sqrt{x} = y \equiv y^2 = x$$

nie spełnia warunku istnienia i jedyności, gdyż nie jest prawdą, że $\prod_x \sum_y y^2 = x$.

Dokonując w (9) raz podstawienia: $x/4, y/2$, a drugi raz podstawienia: $x/4, y/-2$, wyprowadzamy wniosek: $2 = -2$, sprzeczny z tezą: $2 \neq -2$.

Warunki 1), 2), 3) oraz warunek istnienia i jedyności są wystarczającymi warunkami poprawności definicji normalnych o postaci (a).

Przykładem definicji warunkowej jest definicja:

$$(10) \quad y \neq 0 \rightarrow \left(\frac{x}{y} = z \equiv y \cdot z = x \right)$$

Gdybyśmy w definicji (10) pominęli poprzednik, to prowadziłyby ona do sprzeczności, gdyż definiens nie spełniałby wówczas warunku istnienia i jedyności (bo $0 \cdot 2 = 0$ i $0 \cdot 3 = 0$, a więc nieprawda, że $\prod_x \prod_y \sum_z y \cdot z = x$).

Ogólna postać definicji warunkowych jest następująca:

$$(b) \quad \psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \rightarrow [f(x_1, \dots, x_n) = y \equiv \phi(x_1, \dots, x_n, y)]$$

gdzie zmienne $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ są pewnymi (niekiedy wszystkimi) spośród zmiennych $x_1, \dots, x_n$, $\psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ jest wyrażeniem zdaniowym, w którym zmienne $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ i tylko te zmienne są wolne, następnik zaś wyrażenia (b) jest wyrażeniem o postaci (a).

Definicja o postaci (b) jest poprawna, gdy jej następnik spełnia warunki 1), 2), 3), wymagane od definicji normalnych oraz warunek istnienia i jedyności dla przedmiotów spełniających poprzednik definicji. Warunek istnienia i jedyności ma więc tu postać:

$$(11) \quad \prod_{x_1} \dots \prod_{x_n} [\psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \rightarrow \sum_y \phi(x_1, \dots, x_n, y)]$$

Np. dla definicji (10) warunek ten ma postać:

$$\prod_x \prod_{y \neq 0} \sum_z y \cdot z = x$$

Definiując terminy przy pomocy definicji warunkowych przyjmujemy też pewne ograniczenia dotyczące sensowności wyrażeń zawierających te terminy. Za sensowne uważamy mianowicie wszystkie i tylko te wyrażenia, z których termin zdefiniowany daje się wyeliminować przy pomocy jego definicji warunkowej.

W szczególności sensowne są wyrażenia otrzymane z wyrażenia „ $f(x_1, \dots, x_n)$ ” przez podstawienie za zmienne $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ takich wartości, dla których warunek danej definicji jest prawdziwy.

Np. w przypadku terminu zdefiniowanego przy pomocy definicji (10)* sensowne są wyrażenia: $\frac{6}{3}, \frac{x}{3}$ itp., gdyż warunek: $y \neq 0$ jest prawdziwy dla 3.

Sensowne są też wyrażenia o postaci implikacji, w których następnik zawiera takie tylko podstawienie wyrażenia „ $f(x_1, \dots, x_n)$ ”, w którym na miejscu pewnych spośród zmiennych $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ występują wyrażenia zawierające zmienne, poprzednik zaś powstaje przez odpowiednie podstawienie z wyrażenia $\psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$.

Np. w rozważanym przykładzie sensowne jest wyrażenie:

$$a + b \neq 0 \rightarrow \frac{x}{a+b} + 1 = z$$

Jeśli w następniku wyraz definiowany występuje kilkakrotnie w różnych kontekstach, to poprzednik musi być koniunkcją odpowiednich warunków lub wyrażeniem, z którego wynika taka koniunkcja.

Np. w rozważanym przykładzie sensowne są wyrażenia:

$$y \neq 0 \wedge t \neq 0 \rightarrow \left(\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \equiv x \cdot t = y \cdot z \right)$$

$$a \cdot b \neq 0 \rightarrow \frac{x}{a \cdot b} = \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

Natomiast do sensownych nie zaliczamy wyrażeń otrzymanych z wyrażenia „ $f(x_1, \dots, x_n)$ ” przez podstawienie za zmienne $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ takich stałych, dla których warunek danej definicji jest fałszywy.

Np. w rozważanym przykładzie wyrażenie „ $\frac{x}{0} = z$ ” nie jest sensowne, gdyż warunek $y \neq 0$ jest fałszywy dla 0.

Przykładem definicji indukcyjnej jest należąca do arytmetyki liczb naturalnych definicja:

$$(12) \quad \begin{cases} a \cdot 1 = a \\ a \cdot (n+1) = a \cdot n + a \end{cases}$$

Definicja ta składa się z dwóch równości. W pierwszej — termin zdefiniowany występuje tylko po jednej stronie definicji, a jednym z jego argumentów jest stała „1”. W drugiej równości termin zdefiniowany występuje po obu stronach, ale po prawej stronie jednym z jego argumentów jest „n”, a po lewej stronie odpowiednim argumentem jest „n+1”.

Definicje indukcyjne występują też w bardziej skomplikowanej postaci.

Definicje indukcyjne dają się sprowadzić do postaci normalnej. Np. dla definicji (12) taką postacią jest każde z wyrażeń:

$$(13) \quad a \cdot b = c \equiv \sum_f \left\{ \prod_a [f(a, 1) = a \wedge \prod_n [f(a, n+1) = f(a, n) + a] \wedge f(a, b) = c] \right\}$$

$$(13') \quad a \cdot b = c \equiv \prod_f \left\{ \prod_a [f(a, 1) = a \wedge \prod_n [f(a, n+1) = f(a, n) + a] \rightarrow f(a, b) = c] \right\}^*$$

Wyrażenie „ $\prod_a [f(a, 1) = a \wedge \prod_n [f(a, n+1) = f(a, n) + a]$ ”, występujące w (13) i (13'), otrzymujemy w ten sposób, że tworzymy koniunkcję dwóch równości stanowiących definicję (12), poprzedzonych kwantyfikatorami ogólnymi, i definiowany funktor „ $\cdot$ ” zastępujemy przez zmienną.

Analogicznie postępujemy w innych przykładach.

W wyrażeniach (13), (13') występują kwantyfikatory wiążące zmienną reprezentującą funktory. Wykraczamy tu więc poza obręb węższego rachunku kwantyfikatorów.

Definicją indukcyjną jest definicja tezy rzędu n -go, podana na str. 21. Analogicznie można sformułować definicję wyrażenia zdaniowego rzędu n -go. Definicje te można również sprowadzić do postaci normalnej. Na przykładzie definicji wyrażenia zdaniowego rachunku zdań (por. wyżej, str. 8) zaznajomimy tu czytelnika z pewnym sformulowaniem postaci normalnej dla takich definicji, często stosowanym w analogicznych przypadkach. W sformulowaniu tym posługujemy się pojęciem zbioru zamkniętego ze względu na pewne operacje i pojęciem najmniejszego zbioru o danej własności. Podajemy definicje tych pojęć:

Zbiór Z jest zamknięty ze względu na operację O wtedy i tylko wtedy, gdy zastosowanie operacji O do elementów zbioru Z daje w wyniku znowu elementy zbioru Z .

* Dowód, że ze wzorów (12) wynika każdy ze wzorów (13) i (13'), i odwrotnie, że z każdego z tych wzorów wynikają wzory (12), pomijamy.

Zbiór Z jest najmniejszym zbiorem o własności W wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Z posiada własność W i gdy zbiór Z zawiera się w każdym zbiorze o własności W .

Przy pomocy tych pojęć można definicję podaną na str. 8 sformułować w następujący sposób:

Zbiór wyrażeń zdaniowych rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór, do którego należą zmienne zdaniowe i który jest zamknięty ze względu na operacje tworzenia negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności.

Analogicznie określa się zbiór tez danego systemu aksjomatycznego jako najmniejszy zbiór, który zawiera aksjomaty tego systemu i jest zamknięty ze względu na jego reguły wnioskowania.

Gdybyśmy takie definicje zapisali przy pomocy symboliki, to wystąpiłyby kwantyfikatory, wiążące zmienne reprezentujące już nie indywidua, którymi są w tym wypadku wyrażenia, lecz zbiory takich indywiduów.

Reguła dołączania definicji pozwala:

- 1) wprowadzić jako tezy systemu poprawnie zbudowane definicje nowych terminów przy pomocy terminów pierwotnych lub terminów uprzednio poprawnie zdefiniowanych;
- 2) dołączyć do dowodu założeniowego, jako nowe wiersze, poprawnie zbudowane definicje nowych terminów przy pomocy terminów systemu (pierwotnych lub uprzednio poprawnie zdefiniowanych) oraz stałych, wprowadzonych w tym dowodzie przy pomocy reguły $O\Sigma$.

W sformułowaniu powyższym nie czynimy żadnych ograniczeń w odniesieniu do postaci definicji, a więc możemy wprowadzić w dowodach założeniowych nie tylko definicje normalne, ale również warunkowe czy indukcyjne. Np. wprowadziliśmy w dowodzie przy pomocy reguły $O\Sigma$ stałe „ a ” oraz „ b ”, oznaczające pewne liczby, możemy zdefiniować indukcyjnie ciąg $\{c_n\}$:

$$c_1 = a$$

$$c_{n+1} = c_n \cdot b$$

Definicjami i regułą dołączania definicji zajęliśmy się głównie z tego względu, że w drugiej części podręcznika korzystać będziemy z definicji należących do omawianych tutaj rodzajów. Ponadto, już w niniejszej części wprowadzaliśmy różne definicje. Należało więc uświadomić sobie warunki ich poprawności.

Z reguły dołączania definicji korzystamy zwykle w systemach opartych na węższym rachunku kwantyfikatorów. W obrębie samego węższego rachunku kwantyfikatorów nie ma potrzeby wprowadzania tej reguły jako nowej reguły pierwotnej, gdyż dotychczasowe reguły wystarczają do dowodu wszystkich wyrażeń prawdziwych tego systemu.

Wskazemy tutaj jednak, w jaki sposób przy pomocy reguły dołączania definicji można udowodnić regułę podstawiania za wyrażenia funkcyjne, która należy do najbardziej skomplikowanych reguł logicznych i której dowód in-

dukcyjny jest również skomplikowany. Droga, którą obieramy, pozwala zrozumieć potrzebę wprowadzenia ograniczeń występujących w sformułowaniu rozważanej reguły.

Zasadnicza koncepcja reguły podstawiania za wyrażenia funkcyjne opiera się na interpretacji wyrażeń molekularnych węższego rachunku kwantyfikatorów, według której np. wyrażenie „ $A(x)$ ” reprezentuje dowolne funkcje zdaniowe o zmiennej wolnej „ x ”, które to funkcje można podstawiać za wyrażenie „ $A(x)$ ” (por. wyżej, str. 80-81). Przy dokładnym sformułowaniu tej reguły musimy jednak, po pierwsze, uwzględnić tę okoliczność, że w danym wzorze, np. w tezie $T1$ (§ 3, rozdz. II), zmienna reprezentująca predykaty może występować w różnych miejscach z różnymi argumentami, po drugie zaś musimy wprowadzić pewne ograniczenia dotyczące zmiennych wolnych i związanych, bez uwzględnienia których reguła prowadziłaby od wyrażeń prawdziwych do wyrażeń fałszywych. Ponieważ sformułowanie tej reguły jest — na skutek wymienionych okoliczności — dość skomplikowane, podamy najpierw przykład jej zastosowania.

Przykład 1. Według tej reguły z tezy

$$(1) \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

otrzymujemy tezę

$$(2) \quad \prod_x R(z, x, u) \rightarrow R(z, y, u)$$

dokonując w (1) następujących podstawień:

$$A(x)/R(z, x, u)$$

$$A(y)/R(z, y, u)$$

Wyrażenia podstawiane różnią się tylko tym, że w wyrażeniu podstawianym za „ $A(x)$ ” występuje w pewnym miejscu zmienna „ x ”, w wyrażeniu zaś podstawianym za „ $A(y)$ ” w tym samym miejscu występuje zmienna „ y ”. Aby zaznaczyć w sposób ogólny to podstawienie, wprowadzamy zmienną „ t ”, o której zakładamy, że nie występuje ani w tezie, do której podstawiamy, ani w wyrażeniach, które podstawiamy. Dokonane podstawienie zaznaczamy w następujący sposób:

$$A(t)/R(z, t, u)$$

Podajemy obecnie ogólne sformułowanie reguły podstawiania za wyrażenia funkcyjne:

Niech ϕ będzie dowolną tezą węższego rachunku kwantyfikatorów, w której występuje zmienna φ reprezentująca predykaty. Określimy, w jaki sposób otrzymujemy z tezy ϕ nową tezę, zastępując w ϕ wszystkie wyrażenia zbudowane z predykatu φ i jakichś jego argumentów przez wyrażenia różniące się od pewnego wyrażenia ψ tylko zmiennymi. W podanym poprzednio przykładzie rolę wyrażenia ψ grało wyrażenie „ $R(z, t, u)$ ”.

Niech $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_k)$ będzie częścią wyrażenia ϕ i niech $\psi(a_1, \dots, a_k)$ będzie dowolnym wyrażeniem zdaniowym zawierającym zmienne wolne $a_1, \dots, a_k$, o których zakładamy, że nie występują w ϕ ani jako wolne, ani jako związane. Zmienne $a_1, \dots, a_k$ nie muszą być wszystkimi zmiennymi wolnymi wyrażenia ψ . Wstawiamy na miejsce wyrażenia $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_k)$ wyrażenie, które powstaje z $\psi(a_1, \dots, a_k)$ przez podstawienie β_1 za a_1 , β_2 za a_2 , $\dots$, β_k za a_k . W podobny sposób postępujemy z każdą częścią wyrażenia ϕ mającą postać $\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

Zakładamy, że:

- 1) żadna ze zmiennych $a_1, \dots, a_k$ nie występuje w ψ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienne, które podstawiliśmy w wyrażeniu ψ za zmienne $a_1, \dots, a_k$ a więc np. zmienne $\beta_1, \dots, \beta_k$ lub $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.
- 2) Jeśli jedno z wyrażeń $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, itp. występuje w ϕ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąś zmienną γ , to w wyrażeniu $\varphi(a_1, \dots, a_k)$ zmienna γ nie może wystąpić jako zmienna wolna.

Podamy teraz przykłady nieprawidłowych podstawień, naruszających jedno z ograniczeń 1), 2).

Przykład 2.

$$(1) \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

$$A(t) / \sum_y tRy$$

$$(2) \quad \prod_x \sum_y xRy \rightarrow \sum_y yRy$$

Podstawienie to jest niezgodne z ograniczeniem 1), gdyż zmienna t występuje w wyrażeniu „ $\sum_y tRy$ ” w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną y , którą podstawiliśmy (wbrew ogólnym ograniczeniom reguły podstawiania) za zmienną t .

Wyrażenie (2) jest fałszywe, o czym świadczy jego podstawienie:

$$\prod_x \sum_y x < y \rightarrow \sum_y y < y$$

w którym poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Przykład 3.

$$(1) \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

$$A(t) / xRt$$

$$(2) \quad \prod_x xRx \rightarrow xRy$$

Podstawienie to jest niezgodne z ograniczeniem 2), gdyż wyrażenie „ $A(x)$ ” występuje w wyrażeniu (1), do którego podstawiamy, w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną x , która jest jednocześnie zmienną wolną w wyrażeniu „ xRy ”.

żeniu „ xRt ”. O fałszywości wyrażenia (2) świadczy fałszywość jego podstawienia:

$$\prod_x x = x \rightarrow x = y$$

w którym poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Wskażemy, w jaki sposób w przykładzie 1 z wyrażenia (1) można wprowadzić wyrażenie (2) przy pomocy reguły podstawiania za zmienne (nazwowe i zmienne reprezentujące predykaty) oraz reguły dołączania definicji.

W dowodzie tym wprowadzimy definicję:

$$f_1 \langle R, z, u \rangle (t) \equiv R(z, t, u)$$

W definicji tej wyrażenie „ $f_1 \langle R, z, u \rangle$ ” jest predykatem jednoargumentowym. Wyrażenia typu „ $f_1 \langle R, z, u \rangle$ ” nazywamy predykatami zależnymi od parametrów. W rozważanym przykładzie parametrami są zmienne: „ R ”, „ z ”, „ u ”.

Przykład 1.

$$(1) \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

$$(2) \quad \prod_t [f_1 \langle R, z, u \rangle (t) \equiv R(z, t, u)] \quad \{Df.\}$$

$$(3) \quad \prod_x f_1 \langle R, z, u \rangle (x) \rightarrow f_1 \langle R, z, u \rangle (y) \quad \{(1): A/f_1 \langle R, z, u \rangle\}$$

$$(4) \quad f_1 \langle R, z, u \rangle (x) \equiv R(z, x, u) \quad \{Op: 2\}$$

$$(5) \quad f_1 \langle R, z, u \rangle (y) \equiv R(z, y, u) \quad \{3; 4; 5\}^*$$

$$\prod_x R(z, x, u) \rightarrow R(z, y, u)$$

Analogicznie postępujemy w innych przykładach tego rodzaju: wprowadzamy definicję odpowiedniego predykatu zależnego od parametrów, podstawiamy go za zmienną reprezentującą predykaty, a następnie podstawienia lewej strony definicji zastępujemy przez odpowiednie podstawienia prawej jej strony.

Dla wyjaśnienia roli ograniczeń 1), 2), podanych w sformułowaniu reguły podstawiania za wyrażenia funkcyjne, rozpatrzmy, dlaczego w przykładach 2 i 3 nie da się przeprowadzić analogicznego dowodu.

Przykład 2.

$$(1) \quad \prod_x A(x) \rightarrow A(y)$$

$$(2) \quad \prod_t [f_2 \langle R \rangle (t) \equiv \sum_y tRy] \quad \{Df.\}$$

$$(3) \quad \prod_x f_2 \langle R \rangle (x) \rightarrow f_2 \langle R \rangle (y) \quad \{(1): A/f_2 \langle R \rangle\}$$

$$(4) \quad f_2 \langle R \rangle (x) \equiv \sum_y xRy \quad \{Op: 2\}$$

* Skorzystaliśmy tutaj z reguły ekstensjonalności rachunku kwantyfikatorów (por. str. 101).

Dalszy dowód urywa się, gdyż podstawienie w (2) „y” za „t” naruszałoby ograniczenie reguły podstawiania za zmienne, zmienna bowiem wolna y stałaby się związana w wyniku podstawienia.

Przykład 3.

- (1) $\prod_x A(x) \rightarrow A(y)$ {Df.}
- (2) $\prod_t [f_s(R, x)(t) \equiv xRt]$

Dalszy dowód urywa się już w tym miejscu, gdyż w (1) nie wolno podstawić „f_s(R, x)” za „A”, bo zmienna wolna „x” stałaby się związana w wyniku podstawienia.

Ogólnie:

Jeśli ograniczenie 1) nie jest spełnione, a więc jeśli np. zmienna α_i występuje w ψ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego np. zmienną β_j , to w definicji

$$f(\delta_1, \dots, \delta_m)(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \psi(\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

za zmienną α_i nie wolno podstawić zmiennej β_j , i, podobnie jak w przykładzie 2, nie będziemy mogli zastąpić wyrażenia $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_k)$ przez wyrażenie $\psi(\delta_1, \dots, \delta_m, \beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_k)$.

Jeśli zaś ograniczenie 2) nie jest spełnione, a więc np. $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_k)$ występuje w ϕ w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną γ i zmienna γ jest wolna w wyrażeniu $\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, to po wprowadzeniu definicji

$$f(\gamma, \delta_1, \dots, \delta_m)(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma, \delta_1, \dots, \delta_m)$$

w wyrażeniu ϕ za zmienną φ nie można — podobnie jak w przykładzie 3 — podstawić wyrażenia „f($\gamma, \delta_1, \dots, \delta_m$)”, bo zmienna wolna γ stałaby się związana w wyniku podstawienia.

Po tych uwagach staje się też zrozumiałe, że jeśli spełnione są ograniczenia 1), 2), to tezę, którą otrzymujemy przy pomocy podstawiania za wyrażenia funkcyjne, można też otrzymać przy pomocy odpowiedniej definicji i podstawiania za zmienne. Jeśli bowiem spełniony jest warunek 2), to po wprowadzeniu odpowiedniej definicji można dokonać podstawienia za zmienną reprezentującą predykaty, a jeśli przy tym spełniony jest jeszcze warunek 1), to w każdym miejscu można zastąpić lewą stronę odpowiedniego podstawienia definicji przez prawą jego stronę.

Regułę podstawiania za wyrażenia funkcyjne omówiliśmy dokładniej przede wszystkim z tego względu, że stosując wzory rachunku kwantyfikatorów w jakiejś dziedzinie wiedzy, dokonujemy właśnie podstawienia za wyrażenia funkcyjne. Należy więc zdać sobie sprawę dokładnie z ograniczeń, które muszą być przy tym przestrzegane.

Zauważmy jeszcze, że wyrażenie (2), do którego dochodzimy (poprawnie) w przykładzie 1 jest tezą według metatezy M1 (por. wyżej, str. 89), odpowia-

dającej tezie (1), gdyż wyrażenie „R(z, y, u)” można otrzymać z wyrażenia „R(z, x, u)” przez podstawienie „y” za „x”.

Natomiast wyrażenia (2), do których dochodzimy (niepoprawnie) w przykładach 2 i 3, nie podpadają pod schemat metatezy M1, gdyż wyrażenia „ $\sum_y yRy$ ” nie można otrzymać z wyrażenia „ $\sum_x xRy$ ” przez podstawienie „y” za „x”, a tak samo wyrażenie „xRy” nie jest podstawieniem wyrażenia „xRx”.

Jak w tym przypadku, tak też w wielu innych stosowanie metatez rachunku kwantyfikatorów jest łatwiejsze niż stosowanie odpowiednich tez, wymagające posługiwania się podstawianiem za wyrażenia funkcyjne.

Ćwiczenia

1. Podać indukcyjną definicję dodawania i potęgowania liczb naturalnych, a następnie przekształcić ją w definicję normalną.
2. W tezie: $\sum_x \prod_y R(x, y) \rightarrow \sum_x R(x, x)$ wykonać podstawienie: $R(t_1, t_2) / \sum_u R(t_1, z, t_2, u)$. Wyprowadzić tezę uzyskaną przez to podstawienie przy pomocy odpowiedniej definicji.
3. W tezie podanej w ćwiczeniu 2 dokonać podstawienia:

$$R(t, t_1)/t = t \cdot t_1$$

§ 6. RACHUNEK KWANTYFIKATORÓW WYŻSZYCH RZĘDÓW

W poprzednich paragrafach tego rozdziału omówiony został węższy rachunek kwantyfikatorów, zwany też rachunkiem kwantyfikatorów rzędu 1-go. Powtórzmy niektóre najistotniejsze własności tego rachunku.

Jedynymi zmiennymi węższego rachunku kwantyfikatorów, prócz zmiennych zdaniowych, są zmienne nazwowe i zmienne reprezentujące predykaty. Kwantyfikatory wiążą w wyrażeniach tego rachunku tylko zmienne nazwowe. Wyrażeniami molekularnymi węższego rachunku kwantyfikatorów są zmienne zdaniowe oraz wyrażenia zbudowane z predykatu * i z jego argumentów, a więc wyrażenia takie, jak:

$$A(x), \quad B(y), \quad xRy, \quad R(x, y, z).$$

Wprowadzimy ogólniejsze pojęcie wyrażenia molekularnego. Pojęcie to jest dość trudne, określenie poprzedzimy więc kilkoma przykładami. Następująca równoważność

$$\text{DI.} \quad \alpha(A) \equiv \sum_x A(x)$$

* Dokładniej mówiąc: z predykatu lub zmiennej reprezentującej predykaty. Ze skrótu tego i skrótów analogicznych skorzystamy w tym paragrafie wielokrotnie.

definiuje symbol α . Interpretując jednoargumentowe predykaty jako wyrażenia oznaczające cechy przedmiotów (indywidualiów), wyrażenie $\alpha(A)$ możemy czytać: A jest cechą przysługującą jednemu tylko przedmiotowi.

$$DII. \quad A \varrho B \equiv \sim \sum_x (A(x) \equiv B(x))$$

Wyrażenie $A \varrho B$ możemy czytać: cechy A i B nie przysługują jednocześnie żadnemu przedmiotowi.

Symbole α i ϱ są, podobnie jak predykaty, funktorami zdaniotwórczymi, tworzą bowiem wraz ze swymi argumentami wyrażenia zdaniowe. Argumenty tych funktorów nie są jednak nazwami, lecz predykatami.

Podamy jeszcze definicję:

$$DIII. \quad x \sigma A \equiv A(x) \wedge \alpha(A)$$

Zdefiniowane wyrażenie czytamy: x jest jedynym przedmiotem o cesze A . Pierwszy argument funktora σ jest nazwą, drugi predykatem.

Predykaty nazywamy inaczej funktorami rzędu 1-go, wyrażenia zaś molekularne węższego rachunku kwantyfikatorów — wyrażeniami molekularnymi rzędu 1-go. Funktorami rzędu 2-go są funktory zdaniotwórcze o argumentach będących nazwami lub funktorami rzędu 1-go, przy czym co najmniej jeden argument jest funktorem rzędu 1-go.

Wyrażenia zbudowane z funktora rzędu 2-go i argumentów nazywamy wyrażeniami molekularnymi rzędu 2-go. Zdefiniowane symbole: α , ϱ , σ są więc funktorami rzędu 2-go, wyrażenia: $\alpha(A)$, $A \varrho B$, $x \sigma A$ są wyrażeniami molekularnymi rzędu 2-go.

Przyjmujemy, że litery „tłuste” $A, B, C, \dots$ reprezentują jednoargumentowe funktory rzędu 2-go, litery zaś R, S, T — funktory rzędu 2-go o większej liczbie argumentów.

Następujące wyrażenia są wyrażeniami molekularnymi rzędu 2-go, zanotowanymi wyłącznie przy pomocy zmiennych:

$$A(A), \quad B(A), \quad ARB, \quad xRA, \quad S(A, x, y).$$

Podobnie jak węższy rachunek kwantyfikatorów został nadbudowany nad rachunkiem zdań, możemy nad węższym rachunkiem kwantyfikatorów nadbudować system bogatszy, którego wyrażeniami molekularnymi będą zmienne zdaniowe oraz wyrażenia molekularne rzędów 1-go i 2-go. System ten nazywamy szerszym rachunkiem kwantyfikatorów lub rachunkiem kwantyfikatorów rzędu 2-go. W rachunku tym kwantyfikatory wiążą zmienne nazwowe i zmienne reprezentujące predykaty, nie wiążą jednak zmiennych reprezentujących funktory rzędu 2-go.

Podajemy przykładowo kilka tez szerszego rachunku kwantyfikatorów. Pierwsze trzy spośród nich są odpowiednikami pewnych tez węższego rachunku

kwantyfikatorów, w szczególności np. TIII odpowiada tezie T21 (§ 3, rozdz. II), TII odpowiada implikacji prostej, zawartej w T7 (§ 3, rozdz. II).

$$\begin{aligned} \text{TI.} \quad & \prod_A A(A) \rightarrow \sum_A A(A) \\ \text{TII.} \quad & \prod_A [A(A) \wedge B(A)] \rightarrow \prod_A A(A) \wedge \prod_A B(A) \\ \text{TIII.} \quad & \sum_A \prod_B (ARB) \rightarrow \prod_B \sum_A (ARB) \\ \text{TIV.} \quad & \prod_x \sum_A A(x) \end{aligned}$$

Tezę TIV możemy czytać: dla każdego przedmiotu istnieje cecha przysługująca temu przedmiotowi. W tezie tej nie występuje wyrażenie molekularne rzędu 2-go, pomimo to nie należy ona do węższego rachunku kwantyfikatorów, gdyż kwantyfikator szczegółowy wiąże w niej zmienną reprezentującą predykaty.

$$\text{TV.} \quad \sum_R (xRy \equiv yRx)$$

W myśl tej tezy istnieje relacja, która zachodzi pomiędzy przedmiotami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi pomiędzy y i x .

Reguły operowania kwantyfikatorami, wiążącymi zmienne reprezentujące predykaty, są całkowicie analogiczne do reguł węższego rachunku kwantyfikatorów. Uwagę tę zilustrujemy przykładem TII:

Dow. TII. (1)	$\prod_A [A(A) \wedge B(A)]$	{zał.}
(2)	$A(A) \wedge B(A)$	{OII: 1}
(3)	$A(A) \}$	{OK: 2}
(4)	$B(A) \}$	
(5)	$\prod_A A(A)$	{DII: 3}
(6)	$\prod_A B(A)$	{DII: 4}
	$\prod_A A(A) \wedge \prod_A B(A)$	{DK: 5; 6}

W dowodach tez szerszego rachunku kwantyfikatorów korzystamy często z definicji. Tak np. dowód TIV oparty jest na następującej definicji:

$$(a) \quad \star \langle x \rangle (y) \equiv x = y$$

Wprowadzone w tej definicji wyrażenie „ $\star \langle x \rangle$ ” jest jednoargumentowym predykatem zależnym od parametru „ x ”. Wyrażenie to można interpretować jako wyrażenie oznaczające własność przysługującą przedmiotowi wtedy i tylko wtedy, gdy jest on identyczny z przedmiotem x , a więc własność charakterystyczną przedmiotu x .



Z definicji (a) i aksjomatu A1, podanego w § 4, rozdz. II, wynika

(b) $\star\langle x \rangle(x)$
Ze wzoru tego skorzystamy w dalszych dowodach.

Dow. TIV. (1) $\star\langle x \rangle(x)$

$$(2) \sum_A A(x)$$

$$(3) \prod_x \sum_A A(x)$$

{b}

{DΣ: 1}

{DΠ: 2}

TV dowodzimy na podstawie tezy: $x = y \equiv y = x$.
Udowodnimy jeszcze następującą ważną tezę:

TVI. $x = y \equiv \prod_A (A(x) \equiv A(y))$

Dow. (a) (1) $x = y$

$$(2) A(x) \equiv A(x)$$

$$(3) A(x) \equiv A(y)$$

$$\prod_A (A(x) \equiv A(y))$$

$$(b) (1) \prod_A (A(x) \equiv A(y))$$

$$(2) \star\langle x \rangle(x) \equiv \star\langle x \rangle(y)$$

$$(3) \star\langle x \rangle(y)$$

$$x = y$$

{zał.}

{T11a. § 3, rozdz. I}

{EI: 1; 2}

{DΠ: 3}

{zał.}

{OΠ: 1}

{RO_E: 2; b}

{RO_E: a; 3}

Zgodnie z TVI przedmioty x i y są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy każda cecha przysługująca dowolnemu z nich przysługuje też pozostałemu. Żadna więc cecha nie może przysługiwać przedmiotowi x , nie przysługując jednocześnie identycznemu z nim przedmiotowi y .

Teza TVI może być traktowana jako definicja identyczności. Zasadnicza jej myśl występuje u Arystotelesa, który stwierdza, że tylko przedmiotom identycznym przysługują wszystkie te same własności. Według określenia św. Tomasza z Akwinu (XIII w.) identyczne są takie przedmioty, że cokolwiek przysługuje jednemu, przysługuje innemu. Najbardziej znane było określenie Leibniza (XVII w.), w myśl którego identyczne są przedmioty nie różniące się żadną cechą (*principium identitatis indiscernibilium*). Symboliczne sformułowanie tezy TVI jako definicji identyczności podał pierwszy Peirce w r. 1885. Rozpowszechniła się ta definicja po zamieszczeniu jej w *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella. Nazywa się ją niekiedy russelowską lub leibnizowsko-russelowską definicją identyczności.

Funktorami rzędu 3-go nazywamy funktory zdaniotwórcze, których argumentami są nazwy oraz funktory rzędów 1-go i 2-go, przy czym co najmniej jeden argument musi być funktorem rzędu 2-go. Analogicznie jak określiliśmy wyrażenie molekularne rzędu 2-go, określamy wyrażenie molekularne rzędu 3-go.

Rachunkiem kwantyfikatorów rzędu 3-go nazywamy system nadbudowany nad szerszym rachunkiem kwantyfikatorów w ten sposób, w jaki szerszy rachunek kwantyfikatorów nadbudowany jest nad węższym, system, którego wyrażeniami molekularnymi są zmienne zdaniowe oraz wyrażenia molekularne rzędów 1-go, 2-go i 3-go. W rachunku tym kwantyfikatory wiążą zmienne nazwowe oraz zmienne reprezentujące funktory rzędów 1-go i 2-go, nie wiążą jednak zmiennych reprezentujących funktory rzędu 3-go. W podobny sposób budujemy rachunki kwantyfikatorów rzędu 4-go, 5-go itp. Zrozumiałe jest, że im wyższy jest rząd rachunków kwantyfikatorów, tym mniejsze mają zastosowanie w rozumowaniach poszczególnych nauk tezy tego rachunku nie będące tezami rachunków rzędów niższych. Jednak rozwój współczesnej matematyki polega między innymi na tym, że poszczególne jej działy opierają się na rachunkach kwantyfikatorów coraz wyższych rzędów.

Na podstawie TVI wnioskujemy, że identyczność indywiduów może być zdefiniowana na gruncie szerszego rachunku kwantyfikatorów. Podobnie relacja

$$A = B$$

którą możemy czytać: cecha A jest identyczna z cechą B , daje się zdefiniować w rachunku kwantyfikatorów rzędu 3-go. Możemy jednak relację identyczności cech wprowadzić do szerszego rachunku kwantyfikatorów przyjmując aksjomat

$$A = A$$

analogiczny do aksjomatu A1, i przyjmując regułę analogiczną do reguły EI.

Do zagadnień poruszonych w tym paragrafie powrócimy w § 3 „Dodatku”.

Ćwiczenia

1. Udowodnić tezy:

$$a) \sum_A \prod_B [\prod_x (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \prod_x (A(x) \rightarrow \sim B(x))]$$

$$b) \sum_A \prod_x A(x)$$

$$c) \sum_A \prod_x \sim A(x)$$

$$d) A(x) = \sum_B [\prod_x (A(x) = B(x)) \wedge B(x)]$$

2. Przyjmując tezę TVI jako definicję identyczności udowodnić A1 i regułę EI.
3. Wykazać, że znak identyczności można również wprowadzić przy pomocy następujących reguł pierwotnych opuszczania i dołączania:

OI

$$\frac{x = y}{A(x) = A(y)}$$

DI

$$\frac{A(x) = A(y)}{x = y}$$

Zakładamy w DI, że „ A ” nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu.

Udowodnić przy pomocy reguł OI i DI tezę TVI, przy pomocy zaś tezy TVI udowodnić reguły OI i DI.

4. Udowodnić równoważność tezy TVI i tezy:

$$x = y \equiv \prod_A (A(x) \rightarrow A(y))$$

5. Udowodnić tezę:

$$a) \quad x \neq y \equiv \sum_A (A(x) \wedge \sim A(y) \vee A(y) \wedge \sim A(x))$$

$$b) \quad x \neq y \equiv \sum_A (A(x) \wedge \sim A(y))$$

§ 7. PRZYKŁADY SFORMALIZOWANYCH DOWODÓW MATEMATYCZNYCH

Przykład 1.

Dowód tezy o istnieniu lewostronnego modułu mnożenia na podstawie następujących aksjomatów teorii grup:

$$AI. \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$AII. \quad \sum_z (y \cdot z = x)$$

$$AIII. \quad \sum_z (z \cdot y = x)$$

Teza:

$$\sum_y \prod_x (y \cdot x = x)$$

$$\text{Dow. (1) } \sum_z (z \cdot y = y)$$

{AIII}

$$(2) \quad a_y \cdot y = y$$

{OΣ: 1}

$$(3) \quad y \cdot b_{x,y} = x$$

{OΣ: AII}

$$(4) \quad a_y \cdot (y \cdot b_{x,y}) = (a_y \cdot y) \cdot b_{x,y}$$

{AI}

$$(5) \quad a_y \cdot x = (a_y \cdot y) \cdot b_{x,y}$$

{EI: 3; 4}

$$(6) \quad a_y \cdot x = y \cdot b_{x,y}$$

{EI: 2; 5}

$$(7) \quad a_y \cdot x = x$$

{EI: 3; 6}

$$(8) \quad \prod_x (a_y \cdot x = x)$$

{DΠ: 7}

$$\sum_y \prod_x (y \cdot x = x)$$

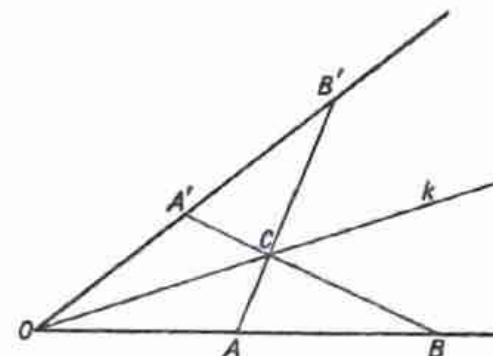
{DΣ: 8}

Przykład 2.

Dowód twierdzenia o istnieniu dwusiecznej*. Wprowadzamy następujące skróty, przy pomocy których zostanie zapisany dowód:

* Por. A. Mostowski Logika matematyczna. 1948, str. 68-69.

Litera X jest skrótem układu zmiennych O, A, A', B, B' , reprezentujących punkty przedstawione na rysunku.



Wyrażenie „ $\Phi(X)$ ” jest skrótem zdania „punkty A, B leżą na jednym ramieniu kąta, punkty A', B' na drugim, a odcinki $OA, AB, OA', A'B'$ przy stają do siebie”.

Wyrażenie „ $\Psi(X, C)$ ” jest skrótem zdania „punkt C leży na prostych AB' i $A'B$ ”.

Wyrażenie „ $\Theta(C, k)$ ” jest skrótem zdania „ k jest prostą OC ”.

Wyrażenie „ $\Delta(k)$ ” jest skrótem zdania „prosta k jest dwusieczną danego kąta”.

Stosując w dowodzie regułę $O\Sigma$ będziemy używać jako stałych — liter X, C, k ze wskaźnikami u dołu, a więc: X_1, C_1, k_1 .

Przyjmujemy bez dowodu następujące twierdzenia:

$$I. \quad \prod_X [\Phi(X) \rightarrow \sum_C \Psi(X, C)]$$

W słownym sformułowaniu: przy założeniu $\Phi(X)$ proste AB' i $A'B$ przecinają się.

$$II. \quad \prod_X \prod_C \prod_k [\Phi(X) \wedge \Psi(X, C) \wedge \Theta(C, k) \rightarrow \Delta(k)]$$

(przy założeniach $\Phi(X)$, $\Psi(X, C)$ i $\Theta(C, k)$ kąty COA i COA' przystają do siebie)

$$III. \quad \sum_X \Phi(X)$$

(na każdym z ramion kąta można odłożyć odcinki $OA, AB, OA', A'B'$ przystające do siebie)

$$IV. \quad \prod_C \sum_k \Theta(C, k)$$

(przez punkty O i C zawsze przechodzi prosta)

Teza:

$$\sum_k \Delta(k) \quad (\text{istnieje dwusieczna danego kąta})$$

$$\text{Dow. (1) } \phi(X_1) \\ (2) \phi(X_1) \rightarrow \sum_c \psi(X_1, c)$$

$$(3) \sum_c \psi(X_1, c)$$

$$(4) \psi(X_1, c_1)$$

$$(5) \sum_k \theta(c_1, k)$$

$$(6) \theta(c_1, k_1)$$

$$(7) \phi(X_1) \wedge \psi(X_1, c_1) \wedge \theta(c_1, k_1) \rightarrow \Delta(k_1)$$

$$(8) \phi(X_1) \wedge \psi(X_1, c_1) \wedge \theta(c_1, k_1)$$

$$(9) \Delta(k_1) \\ \sum_k \Delta(k)$$

$$\{O\Sigma: III\}$$

$$\{O\Pi: I\}$$

$$\{RO: 2; 1\}$$

$$\{O\Sigma: 3\}$$

$$\{O\Pi: IV\}$$

$$\{O\Sigma: 5\}$$

$$\{O\Pi: II\}$$

$$\{DK: 1; 4; 6\}$$

$$\{RO: 7; 8\}$$

$$\{D\Sigma: 9\}$$

Przykład 3.

Dowód zwykłej zasady indukcji:

$$I. \quad A(0) \wedge \prod_a [A(a) \rightarrow A(a+1)] \rightarrow A(a)$$

Zakładamy tu, że zmienne a, b, c przebiegają zbiór liczb naturalnych, do którego zaliczamy również liczbę 0. W dowodzie skorzystamy z następujących twierdzeń.

$$II. \quad \prod_a \left[\left[\prod_{b < a} A(b) \right] \rightarrow A(a) \right] \rightarrow A(a) *$$

$$T1. \quad a + b = b + a$$

$$T2. \quad a + 0 = a$$

$$T3. \quad a \neq 0 \wedge a \neq 1 \rightarrow 1 < a$$

$$T4. \quad a < b \equiv \sum_{c \neq 0} a + c = b$$

$$T5. \quad 1 \neq 0$$

Teza:

$$A(0) \wedge \prod_a [A(a) \rightarrow A(a+1)] \rightarrow A(a)$$

$$\text{Dow. (1) } A(0) \\ (2) \prod_a [A(a) \rightarrow A(a+1)]$$

$$(3) \sim A(a)$$

$$(4) A(0) \rightarrow A(0+1)$$

$$(5) 0+1 = 1$$

$$(6) A(1)$$

{zał.}

{z. d. n.}

{O\Pi: 2}

{T1; T2}

{RO, EI: 4; 1;}

* Twierdzenie to nazywane jest też często zasadą indukcji.

$$(7) \sim \prod_a \left[\left[\prod_{b < a} A(b) \right] \rightarrow A(a) \right]$$

$$(8) \sum_a \left[\left[\prod_{b < a} A(b) \right] \wedge \sim A(a) \right]$$

$$(9) \prod_{b < a_1} A(b) \Bigg\}$$

$$(10) \sim A(a_1) \Bigg\}$$

$$(11) a_1 \neq 0$$

$$(12) a_1 \neq 1$$

$$(13) 1 < a_1$$

$$(14) \sum_{c \neq 0} (1 + c = a_1)$$

$$(15) 1 + c_1 = a_1 \Bigg\}$$

$$(16) c_1 \neq 0 \Bigg\}$$

$$(17) c_1 + 1 = a_1$$

$$(18) c_1 < a_1$$

$$(19) c_1 < a_1 \rightarrow A(c_1)$$

$$(20) A(c_1)$$

$$(21) A(c_1) \rightarrow A(c_1 + 1)$$

$$(22) A(a_1)$$

sprz.

{ToI: II; 3}

{NII, T21. § 3, rozdz. I: 7}

{O\Sigma, OK: 8}

{10; 1; T3a. § 4. rozdz. II}

{10; 6; T3a. § 4, rozdz. II}

{RO: T3; 11; 12}

{RO_E: T4; 13}

{O\Sigma*: 14}

{EI: T1; 15}

{RO_E, D\Sigma*: 17; T5; T4}

{O\Pi*: 9}

{RO: 19; 18}

{O\Pi: 2}

{RO, EI: 21; 20; 17}

{10; 22}

Część druga
ELEMENTY TEORII MNOGOŚCI

Rozdział I
OGÓLNA TEORIA MNOGOŚCI

§ 1. ALGEBRA ZBIORÓW

Pojęcie zbioru należy do tych pojęć, którymi posługujemy się w różnych naukach równie powszechnie jak stałymi rachunku zdań i kwantyfikatorów. Z dawna też posługiwano się tym pojęciem w logice, choć przez długi czas nie poddawano go dokładniejszej analizie. Tak zwane zakresy nazw (pojęć) są zbiorami przedmiotów oznaczanych przez dane nazwy (podpadających pod dane pojęcia), a stosunki między zakresami są pewnymi stosunkami między zbiorami. Szczególnie często używa się pojęcia zbioru w różnych działach matematyki. Np. w analizie rozpatruje się między innymi zbiory liczb i funkcji, w algebrze — zbiory wielomianów i równań, w geometrii — zbiory punktów, prostych i płaszczyzn. Dział matematyki, który ustala własności zbiorów niezależnie od tego, jakie są elementy tych zbiorów, nosi nazwę teorii mnogości.

Podstawowym pojęciem teorii mnogości jest pojęcie należenia elementu do zbioru. Dla zaznaczenia, że przedmiot a należy do zbioru A , piszemy:

$$a \in A$$

Wzór ten czytamy też często: zbiór A zawiera element a , lub krótko: a jest A .

O ile oznaczymy przez $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$ i $\mathbb{R}$ odpowiednio zbiory wszystkich liczb naturalnych (tzn. całkowitych dodatnich), wymiernych i rzeczywistych, to prawdziwe będą następujące wzory:

$$2 \in \mathbb{N}, \quad 10 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{B}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \pi \in \mathbb{R}$$

fałszywe zaś będą wzory:

$$-2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \in \mathbb{N}, \quad 2\frac{1}{2} \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{B}, \quad \sqrt{-5} \in \mathbb{R}$$

W rozważaniach różnych nauk zarówno dedukcyjnych, jak i przyrodniczych ustalony jest zwykle zbiór przedmiotów, których własności bada dana nauka. Zbiór ten nazywać będziemy zbiorem pełnym i oznaczać symbolem 1.

W arytmetyce liczb rzeczywistych zbiorem pełnym jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, w arytmetyce liczb naturalnych — zbiór wszystkich liczb naturalnych, w antropologii — zbiór wszystkich ludzi.

W teorii mnogości można zdefiniować — przy pomocy pojęcia zbioru — wiele ważnych pojęć matematycznych, takich jak: pojęcie funkcji, ciągu itp. Pojęcie liczby zostało tu dokładniej zanalizowane. Jest więc teoria mnogości podstawową teorią matematyczną.

W różnych działach matematyki wyróżniamy często zbiory o nieskończonej ilości elementów. Teoria mnogości zajmuje się własnościami charakterystycznymi takich zbiorów i różnymi ich rodzajami. Powstanie i rozwój teorii mnogości wiąże się właśnie z badaniem zbiorów nieskończonych. Twórcą tego działu matematyki był Jerzy Cantor (1845-1918). Pierwsze prace Cantora spotkały się z niezrozumieniem i opozycją ze strony wielu współczesnych mu matematyków. Nawet wybitni matematycy sądzili bowiem, że pojęcie nieskończoności nie wejdzie nigdy w skład pojęć matematycznych. Pogląd ten podzielał np. Gauss, którego twórczość przypada na okres nieco poprzedzający ukazanie się pierwszych prac Cantora. Uprzedzenia te okazały się jednak nieuzasadnione, a teoria mnogości rozwinęła się szybko, stając się w krótkim czasie podstawową nauką matematyczną i uzyskując zastosowania w różnych działach matematyki.

Powstanie i rozwój cantorowskiej teorii mnogości zostały poprzedzone opracowaniem pewnych pojęć dotyczących zbiorów w tak zwanej algebrze zbiorów*. W paragrafie tym budując algebrę zbiorów przyjmujemy jako jej terminy pierwotne: symbol ϵ oznaczający relację należenia elementu do zbioru, oraz symbol 1 oznaczający zbiór pełny.

Przyjmujemy następujące umowy dotyczące symboliki:

Litery małe alfabetu łacińskiego:

$$x, y, z, t, u, \dots$$

oznaczać będą dowolne przedmioty nie będące zbiorami. Przedmioty takie nazywać będziemy indywiduami. Dowolne zbiory indywiduów oznaczać będziemy literami

$$X, Y, Z, T, U, \dots$$

Litery „tłuste“

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \dots$$

oznaczać będą dowolne zbiory, których wszystkie elementy są zbiorami. Zbiory takie nazywamy rodzinami zbiorów.

Przyjmujemy aksjomat

$$\text{A1.1.} \quad x \in 1$$

* Algebra zbiorów została ugruntowana przez matematyka angielskiego Jerzego Boole'a. Pierwsza praca Boole'a z tej dziedziny ukazała się w r. 1854. Wiele twierdzeń z algebry zbiorów było znanych wcześniej Leibnizowi (XVII w.).

Rozważamy więc tylko te indywidua, które są elementami ustalonego zbioru pełnego. Dalsze aksjomaty teorii mnogości wprowadzać będziemy stopniowo.

Podajemy definicje dwóch podstawowych pojęć algebry zbiorów:

$$\text{D1.1.} \quad X \doteq Y \equiv \prod_x (x \in X \equiv x \in Y)$$

Wyrażenie $X \doteq Y$ czytamy: *zbiór X jest zakresowo równy zbiorowi Y . Każde więc indywiduum, które jest elementem jednego ze zbiorów zakresowo równych, jest też elementem pozostałego.*

$$\text{D1.2.} \quad X \subset Y \equiv \prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

Wyrażenie $X \subset Y$ czytamy: *zbiór X jest zawarty w zbiorze Y lub też: zbiór X jest częścią zbioru Y , lub wreszcie: zbiór X jest podzbiorem zbioru Y .*

Zbiór X jest więc częścią zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y , przy czym zbiór Y zawierać może (lecz nie musi!) elementy nie należące do X .

Udowodnimy kilka twierdzeń algebry zbiorów. Dowody tych twierdzeń zanotujemy w podobny sposób, w jaki notowaliśmy dowody tez logicznych, ale nie będziemy na ogół zaznaczać w nawiasach klamrowych reguł logicznych, z których korzystamy. Będziemy też dokonywali w dowodach pewnych skrótów. Uzupełnienie jednak dowodów tak, by nie zawierały luk, nie powinno sprawić czytelnikowi trudności.

$$\text{T1.1.} \quad X \subset 1$$

Wzór ten stwierdza, że *każdy zbiór indywiduów jest podzbiorem zbioru pełnego.*

Dow. (1)	$x \in 1 \rightarrow (x \in X \rightarrow x \in 1)$	$\{p \rightarrow (q \rightarrow p)\}^*$
(2)	$x \in X \rightarrow x \in 1$	$\{1, \text{A1.1}\}$
(3)	$\prod_x (x \in X \rightarrow x \in 1)$	$\{2\}$
	$X \subset 1$	$\{\text{D1.2, 3}\}$

$$\text{T1.2a.} \quad X \doteq X$$

$$\text{b.} \quad X \doteq Y \rightarrow Y \doteq X$$

$$\text{c.} \quad X \doteq Y \wedge Y \doteq Z \rightarrow X \doteq Z$$

Twierdzeniu temu można nadać też następujące słowne sformułowanie: *relacja równości zakresowej zbiorów jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

* Zamiast numeru podaliśmy samą tezę logiczną. W podobny sposób będziemy postępowali dalej.

Podamy tylko dowód wzoru c, dowód dwóch pozostałych wzorów pozostawiamy czytelnikowi.

Dow. c. (1)	$X \doteq Y$	{zał.}
(2)	$Y \doteq Z$	
(3)	$\prod_x (x \in X \equiv x \in Y)$	{D1.1, 1}
(4)	$\prod_x (x \in Y \equiv x \in Z)$	{D1.1, 2}
(5)	$x \in X \equiv x \in Y$	{3}
(6)	$x \in Y \equiv x \in Z$	{4}
(7)	$x \in X \equiv x \in Z$	{(p = q) → [(q = r) → (p = r)], 5, 6}
(8)	$\prod_x (x \in X \equiv x \in Z)$	{7}
	$X \doteq Z$	{D1.1, 8}

$$\text{T1.3a.} \quad X \doteq Y \rightarrow X \subset Y$$

$$\text{b.} \quad X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X \doteq Y$$

Udowodnimy tylko wzór a, pozostawiając czytelnikowi dowód wzoru b.

Dow. a. (1)	$X \doteq Y$	{zał.}
(2)	$x \in X \equiv x \in Y$	{D1.1, 1}
(3)	$x \in X \rightarrow x \in Y$	{2}
(4)	$\prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)$	{3}
	$X \subset Y$	{D1.2, 4}

$$\text{T1.4a.} \quad X \subset X \quad \{\text{T1.3a, T1.2a}\}$$

$$\text{b.} \quad X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z$$

Relacja $\subset$ jest więc zwrotna i przechodnia, nie jest jednak symetryczna, gdyż np. zbiór liczb pierwszych jest zawarty w zbiorze liczb naturalnych, lecz nie na odwrót. Łatwy dowód twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

$$\text{L1.1.} \quad x = y \rightarrow \prod_x (x \in X \equiv y \in X)$$

Dow. (1)	$x = y$	{zał.}
(2)	$x \in X \equiv x \in X$	{p = p}
(3)	$x \in X \equiv y \in X$	{EI: 1, 2}
	$\prod_x (x \in X \equiv y \in X)$	{3}

$$\text{D1.3a.} \quad x \in \{y\} \equiv x = y$$

$$\text{b.} \quad x \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \equiv x = y_1 \vee x = y_2 \vee \dots \vee x = y_n$$

Symbol $\{y\}$ oznacza więc zbiór, którego jedynym elementem jest y ; symbol $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — zbiór, którego elementami są indywidua $y_1, y_2, \dots, y_n$ i tylko

te indywidua. Zbiór $\{y\}$ nazywamy zbiorem jednoelementowym lub jednostkowym.

$$\text{L1.2.} \quad \prod_x (x \in X \equiv y \in X) \rightarrow x = y$$

Dow. (1)	$\prod_x (x \in X \equiv y \in X)$	{zał.}
(2)	$x \in \{y\} \equiv y \in \{y\}$	{1}
(3)	$x = y \equiv y = y$	{D1.3a, 2} *
	$x = y$	{y = y, 3}

$$\text{T1.5.} \quad x = y \equiv \prod_x (x \in X \equiv y \in X) \quad \{\text{L1.1, L1.2}\}$$

Dwa indywidua są więc identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru bądź jednocześnie są jego elementami, bądź jednocześnie nie są jego elementami. T1.5 może służyć za definicję identyczności indywiduów. Często jednak znak identyczności traktowany jest w algebrze zbiorów jako termin pierwotny. Twierdzenie T1.5 jest wyraźnie analogiczne do tezy TVI, podanej w § 6 rozdziału II części pierwszej. Różnią się one tylko tym, że w jednym mówimy o zbiorach, a w drugim o własnościach. Istnieje też między nimi ściślejszy związek, gdyż każde z nich można udowodnić przy pomocy pozostałego (por. § 5, str. 162).

$$\text{T1.6.} \quad X = Y \rightarrow X \doteq Y$$

Dow. (1)	$X = Y$	{zał.}
	$X \doteq Y$	{EI: 1, T1.2a}

Zbiory identyczne są więc zakresowo równe.

Nasuwa się pytanie, czy twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe, a więc czy zbiory zakresowo równe są identyczne. Intuicyjnie twierdzenie to nie budzi wątpliwości, jednak na podstawie przyjętych dotąd założeń nie może być udowodnione. Wprowadzamy więc nowy aksjomat

$$\text{A1.2.} \quad X \doteq Y \rightarrow X = Y$$

Zgodnie z tym aksjomatem, noszącym nazwę aksjomatu ekstensjonalności dla zbiorów, zbiory o tych samych elementach są identyczne. Zbiór jest więc całkowicie wyznaczony, gdy podane jest, jakie przedmioty do niego należą.

Prawdziwa jest więc równoważność

$$\text{T1.7.} \quad X \doteq Y \equiv X = Y \quad \{\text{A1.2, T1.6}\}$$

Każde więc wyrażenie typu $X \doteq Y$ możemy zastąpić przez wyrażenie typu $X = Y$. Z tego względu w dalszych rozważaniach posługiwaliśmy się wyłącznie symbolem „ $=$ ”.

* Skorzystaliśmy tu z reguły ekstensjonalności rachunku zdań (por. cz. I, rozdz. I, § 3.)

Zauważmy, że z T1.7 i uwagi, że relacja identyczności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, wynika natychmiast T1.2. Gdyby jednak twierdzenie to nie było wcześniej udowodnione, nie moglibyśmy przyjąć aksjomatu A1.2 bez obawy otrzymania natychmiastowej sprzeczności.

Wprowadzamy dalsze definicje algebry zbiorów. Notując je posłużymy się symbolem $\bar{\epsilon}$. Wyrażenie $x \bar{\epsilon} X$ jest równoznaczne z wyrażeniem $\sim(x \in X)$.

D1.4.

$$x \in X + Y \equiv x \in X \vee x \in Y$$

D1.5.

$$x \in X \cdot Y \equiv x \in X \wedge x \in Y$$

D1.6.

$$x \in X - Y \equiv x \in X \wedge x \bar{\epsilon} Y$$

D1.7.

$$x \in X' \equiv x \bar{\epsilon} X$$

D1.8.

$$x \in 0 \equiv x \in 1'$$

W pierwszych trzech spośród tych definicji użyliśmy symboli zaczerpniętych z arytmetyki. Zachowujemy też jej terminologię. Tak np. działanie określone w D1.4 nazywamy dodawaniem, wynik tego działania — sumą, zbiory, które dodajemy — składnikami.

Zbiór X' , określony w D1.7, nazywamy dopełnieniem zbioru X , zbiór 0 , określony w D1.8 — zbiorem pustym.

Widzimy, że do sumy dwóch zbiorów należą te i tylko te elementy, które należą do jednego co najmniej ze składników, do iloczynu — elementy należące jednocześnie do obu czynników, do różnicy — elementy odjemnej nie będące elementami odjemnika, do dopełnienia zbioru — elementy nie należące do samego zbioru, i wreszcie do zbioru pustego — elementy należące do dopełnienia zbioru pełnego.

Podamy przykładowo parę twierdzeń, w których wystąpią zdefiniowane pojęcia.

T1.8. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\}$ {D1.3a, b, D1.4, D1.1}

T1.9. $x \bar{\epsilon} 0$

W myśl tego twierdzenia żaden przedmiot nie jest elementem zbioru pustego.

Dow. (1) $x \in 0$ {z. d. n.}

(2) $x \in 1'$ {D1.8, 1}

(3) $x \bar{\epsilon} 1$ {D1.7, 2}

sprz. {A1.1, 3}

T1.10a.

$$0 = 1'$$

b.

$$1 = 0'$$

Każdy więc ze zbiorów 0 i 1 jest dopełnieniem pozostałego.

Dow. a. (1) $\prod_z (x \in 0 \equiv x \in 1')$ {D1.8}

(2) $0 \neq 1'$ {D1.1, 1}

$0 = 1'$ {A1.2, 2}

W dalszych dowodach pomijać będziemy krok dowodu, prowadzący od wyrażenia typu $X \neq Y$ do wyrażenia typu $X = Y$, pisząc od razu wniosek: $X = Y$.

Dow. b. (1) $x \in 0'$

(2) $x \in 1 \equiv x \in 0'$

$1 = 0'$

{D1.7, T1.9}

{ $p \rightarrow [q \rightarrow (p \equiv q)]$, A1.1, 1}

{D1.1, 2}

T1.11a.

$$X + 0 = X$$

b.

$$X \cdot 1 = X$$

c.

$$X + 1 = 1$$

d.

$$X \cdot 0 = 0$$

Wzór a stwierdza, że zbiór pusty jest modulem dodawania zbiorów, wzór b — że zbiór pełny jest modulem mnożenia zbiorów.

Dow. a. (1) $(x \in X \vee x \in 0) \equiv x \in X$

{ $\sim q \rightarrow [(p \vee q) \equiv p]$, T1.9}

(2) $x \in X + 0 \equiv x \in X$

{D1.4, 1}

$X + 0 = X$

{D1.1, 2}

Dowody pozostałych wzorów są analogiczne, przy czym w dowodzie

wzoru b powołujemy się na A1.1, D1.5 i tezę $q \rightarrow (p \wedge q \equiv p)$

" c " " " A1.1, D1.4 i " $q \rightarrow (p \vee q \equiv q)$

" d " " " T1.9, D1.5 i " $\sim q \rightarrow (p \wedge q \equiv q)$

Podamy jeszcze jedną definicję algebry zbiorów:

D1.9.

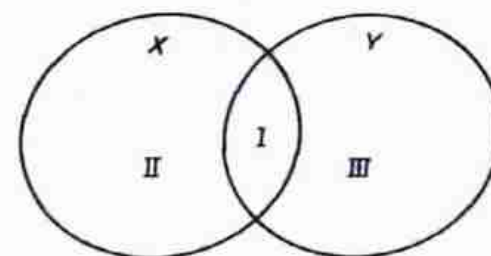
$$X \subsetneq Y \equiv X \subset Y \wedge X \neq Y$$

Zdefiniowaną relację czytamy: X jest częścią właściwą zbioru Y .

Zauważmy jeszcze, że zamiast pisać $x \in X \wedge y \in X$ piszemy zwykle $x, y \in X$ oraz że zbiory, których iloczyn jest pusty, nazywamy rozłącznymi.

Omówimy pewną graficzną metodę sprawdzania wzorów algebry zbiorów. Jest to tak zwana metoda diagramów Venna. Zbiory — z wyjątkiem zbioru pełnego — symbolizujemy tu przy pomocy kół. Mając do czynienia z dwoma zbiorami X, Y rysujemy dwa przecinające się koła, z których jedno symbolizuje zbiór X , a drugie zbiór Y . Otrzymujemy wówczas diagram

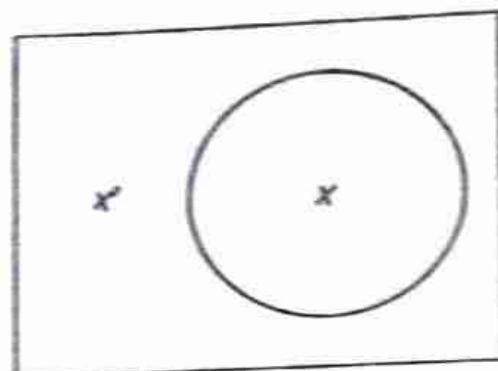
(A)



Iloczyn $X \cdot Y$ symbolizuje obszar I, różnicę $X - Y$ obszar II, zaś sumę $X + Y$ obszar złożony z I, II i III.

Dla symbolicznego przedstawienia dopełnienia zbioru wprowadzamy prostokąt odpowiadający zbiorowi pełnemu. Umieszczając w tym prostokącie koło symbolizujące zbiór X otrzymujemy diagram

(B)



w którym część prostokąta znajdująca się poza kołem odpowiadającym zbiorowi X przedstawia dopełnienie tego zbioru, tj. zbiór X' .

Zbiór X zawiera się w zbiorze Y wtedy i tylko wtedy, gdy obszar symbolizujący zbiór X jest częścią obszaru symbolizującego zbiór Y lub też pokrywa się z tym obszarem.

Mając to na uwadze odczytujemy z diagramu (A), że prawdziwe są np. wzory: $X \cdot Y \subset X$, $X \cdot Y \subset Y$, $X \subset X + Y$, $Y \subset X + Y$, $X - Y \subset X$.

Zbiór X jest równy zbiorowi Y wtedy i tylko wtedy, gdy są one symbolizowane przez ten sam obszar. Jest więc np. widoczne z diagramu (A), że prawdziwe są wzory:

$$X \cdot Y = Y \cdot X, \quad X + Y = Y + X$$

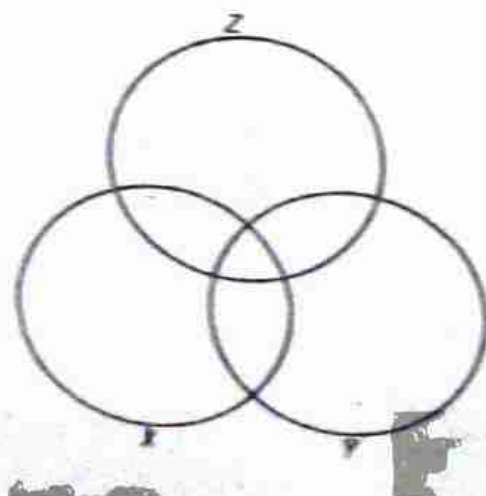
z diagramu zaś (B) jest widoczne, że prawdziwe są wzory:

$$X \cdot 1 = X, \quad X + X' = 1$$

Wyrażenie:

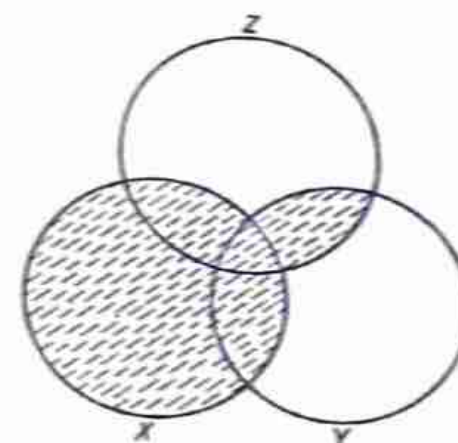
$$X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

sprawdzamy rysując diagram

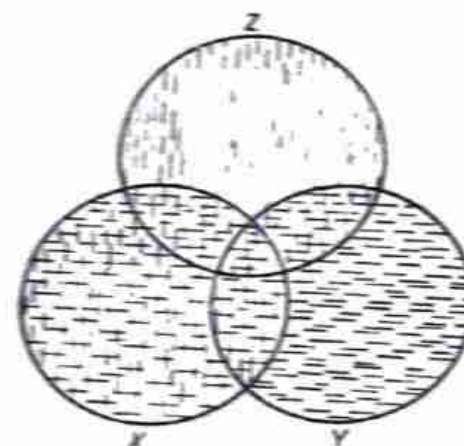


i zaznaczając na nim raz obszar symbolizujący zbiór $X + Y \cdot Z$, drugi raz obszar symbolizujący zbiór $(X + Y) \cdot (X + Z)$.

Dla lewej strony sprawdzanej równości otrzymujemy wówczas diagram

(C₁)

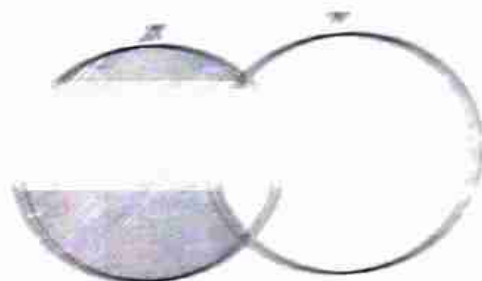
w którym obszar zakreskowany symbolizuje zbiór $X + Y \cdot Z$. Dla prawej zaś strony tej równości otrzymujemy diagram

(C₂)

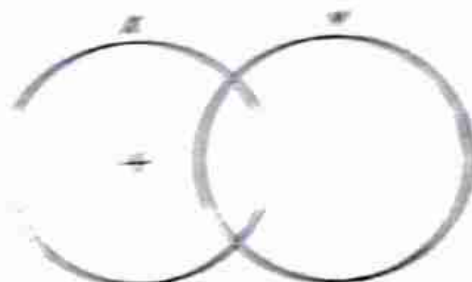
Obszar zakreskowany kreskami poziomymi przedstawia tutaj zbiór $X + Y$, obszar zakreskowany kreskami pionowymi — zbiór $X + Z$, część zaś ich wspólna, zakreskowana podwójnie, przedstawia iloczyn $(X + Y) \cdot (X + Z)$. Ponieważ obszary symbolizujące zbiory $X + Y \cdot Z$ i $(X + Y) \cdot (X + Z)$ pokrywają się, więc zbiory te są równe, a zatem sprawdzane wyrażenie jest prawdziwe.

Przy powyższym sprawdzaniu użyliśmy kresek przerywanych, gdyż kreski ciągle używane są dla zaznaczania pustości zbioru. Tak np. prawdziwość wyrażenia $X \subset Y$ zaznaczamy na diagramie (A) zacieniając obszar II przy pomocy kresek ciągłych. W myśl podanych powyżej wyjaśnień wyrażenie $X \subset Y$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy obszar symbolizujący zbiór X jest częścią obszaru symbolizującego zbiór Y (lub pokrywa się z tym drugim obszarem).

to są metody wstępy i tylko wstępy, gdyż stwierdzenie $A \rightarrow B$, reprezentowane przez obszar II, jest pusty. Prawdziwość więc wyrażenia $A \subseteq B$ symbolizujemy przy pomocy diagramu:

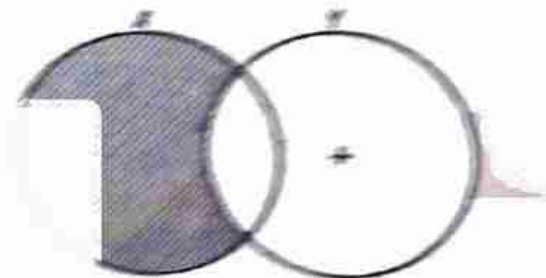
(A₁)

Kontrowersja fałszywości tego wyrażenia oznaczamy przy pomocy diagramu

(A₂)

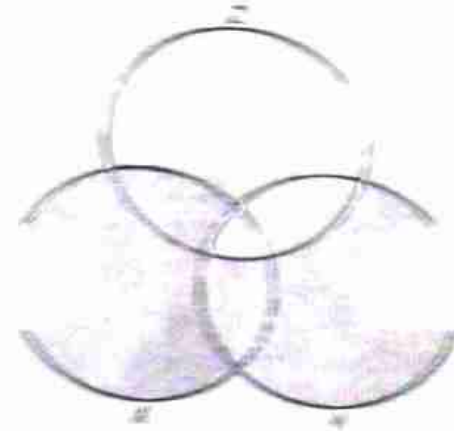
Przy pomocy znaku „+” umieszczonego na jakimś obszarze oznaczamy niepustotą obszaru symbolizowanego przez ten obszar.

W myśl tych uwag i D1.9 prawdziwość wyrażenia $A \subseteq B$ symbolizuje diagram

(A₃)

Wyrażenie algebry zbiorów mające postać implikacji sprawdzamy przy pomocy diagramów Venna, podlegając się przy tym skróconej następującej metodzie sprawdzania wyrażenia rachunka zdań. Zakładając więc np., że poprzednik danej implikacji jest prawdziwy, oznaczamy na odpowiednim diagramie warunki prawdziwości poprzednika i badamy, czy wówczas nie nastąpiłaby danej implikacji może być fałszywy. W innych przypadkach zakładamy, że następnik danej implikacji jest fałszywy, i oznaczamy na diagramie odpowiednie warunki fałszywości tego następnika, a następnie badamy, czy poprzednik tej implikacji może być prawdziwy.

W ten sposób sprawdzamy np. warunek T1.61 przy pomocy diagramu:

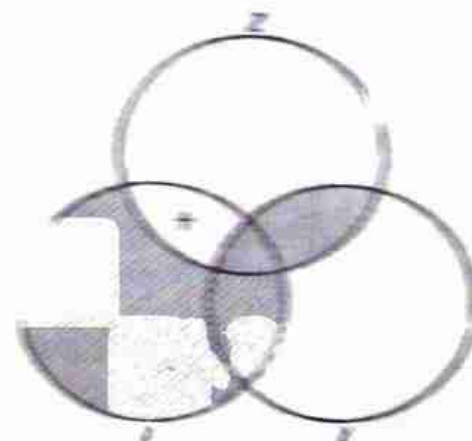


Z diagramu T1.61 wiad, że jeśli poprzednik T1.61 jest prawdziwy, a więc jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to wtedy nieprawdą jest, że zbiór A jest zawarty w zbiorze C (gdyż po oznaczeniu graficznych warunków prawdziwości poprzednika cały obszar zbioru A znajdujący się poza obszarem zbioru C został nadmieniony). A więc warunek T1.61 jest prawdziwy.

Fałszywość wyrażenia:

$$A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$$

wyraża diagram

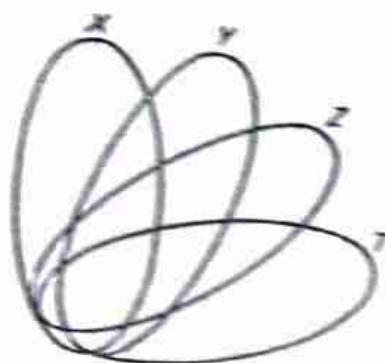
(A₄)

z którego wiad, że przy prawdziwym poprzedniku tej implikacji jej następnik może być fałszywy, gdyż zbiór $A - C$ może być niepusty.

Wyrażenie o czterech zmiennych sprawdzamy przy pomocy następującego diagramu utworzonego z czterech przecinających się obszarów*:

* Uogólnienie graficznej metody sprawdzania przy pomocy diagramów Venna podano już w rozdziale prof. S. Łukasiewicza. Rachunek zdań. Analiza i uogólnienie metody sprawdzania formuł logicznych przy pomocy diagramów Venna. „Studia Logica”. T. I (1955).

(D)

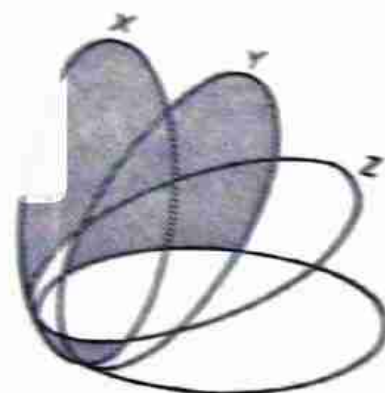


Prawdziwość wzoru:

$$X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z$$

wykazuje diagram:

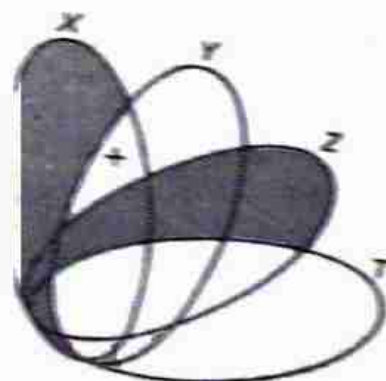
(D)



Fałszywość wyrażenia:

$$X \subset Y \wedge Z \subset Y \rightarrow X \subset Z$$

wykazuje diagram



(D)

Ćwiczenia

1. Udowodnić następujące wzory:

- $X' = 1 - X$
- $X - Y = X \cdot Y'$
- $0 \subset X$
- $X = Y = X' = Y'$
- $X \subset Y = Y' \subset X'$
- $X \subset Y = X + Y = Y$
- $X \subset Y = X \cdot Y = X$
- $X \subset Y = X - Y = 0$
- $X \cdot (X - Y) = 0$

2. Wykazać na przykładach fałszywość następujących wzorów:

- $(X - Y) + Y = X$
- $(X + Y) - Y = X$

3. Sprawdzić, że twierdzenie T1.11 jest prostym wnioskiem ze wzorów a, f, g ćwiczenia 1, T1.1 i następujących dwóch wzorów, których dowód zostanie podany w § 3:

$$X + Y = Y + X, \quad X \cdot Y = Y \cdot X$$

4. Sumę i iloczyn zbiorów można też zdefiniować w następujący sposób:

$$X + Y = X \cup Y = X \cup Y \cup (X \cap Y)$$

$$X \cdot Y = X \cap Y = X \cap Y \cup (X \cap Y)$$

W myśl tych definicji suma dwóch zbiorów jest „najmniejszym” zbiorem zawierającym oba składniki, iloczyn dwóch zbiorów jest „największym” zbiorem zawartym w obu czynnikach.

a) Udowodnić na podstawie tych definicji wzory podane w ćwiczeniu 3 oraz wzory

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z), \quad (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

$$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z, \quad X \cdot Y + Z = (X + Z) \cdot (Y + Z)$$

b) Wykazać równoważność podanych tu definicji sumy i iloczynu zbiorów z definicjami D1.4 i D1.5.

5. Sprawdzić przy pomocy diagramów Venna następujące wzory:

$$X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z$$

$$X \subset Y \wedge X \subset Z \rightarrow X \subset Y \cdot Z$$

$$Y \cdot Z = 0 \wedge X \cdot Z \neq 0 \rightarrow X - Y \neq 0$$

$$Y \cdot Z = 0 \wedge X - Y = 0 \rightarrow X \cdot Z = 0$$

6. Wprowadzając stałe syllogistyki arystotelesowskiej przy pomocy definicji

$$SeP = S \subset P$$

$$SeP = S \cdot P = 0$$

$$SiP = S \cdot P \neq 0$$

$$SoP = S - P \neq 0$$

sprawdź graficznie następujące prawa wnioskowania bezpośredniego oraz tryby sylogistyczne:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \sim SoP \\ SaP &\rightarrow \sim SeP \\ \sim SiP &\rightarrow SoP \\ MaP \wedge SaM &\rightarrow SiP \\ MeP \wedge SiM &\rightarrow SoP \\ MaP \wedge SeM &\rightarrow SeP \\ PeM \wedge SaM &\rightarrow SeP \\ PaM \wedge SeM &\rightarrow SoP \end{aligned}$$

Które z tych praw są prawdziwe tylko przy założeniu niepustości rozważanych zbiorów?

7. Sprawdź graficznie wzory:

$$X \subset Z \wedge Y \subset T \rightarrow X + Y \subset Z + T$$

$$X \subset Y \wedge T \subset Z \wedge Y + Z \subset X + T \wedge X \cdot Y = 0 \wedge Z \cdot T \subset Y \rightarrow X + Y + Z + T = Y \cdot Z \cdot T - X$$

$$X \subset Y \wedge Z \subset T \wedge X + Z = 1 \wedge Y \cdot T = 0 \rightarrow Y \subset X \wedge T \subset Z$$

Przy sprawdzaniu tego ostatniego wzoru, będącego odpowiednikiem prawa rachunku zdań o zamkniętym układzie twierdzeń, należy diagram (D) umieścić w prostokącie symbolizującym zbiór pełny.

8. Wykazać prawdziwość następujących twierdzeń:

- $Y \subset X \rightarrow (X - Y) + Y = X$
- $X \cdot Y = 0 \rightarrow (X + Y) - Y = X$
- $Y \subset X \wedge Z = X - Y \rightarrow X = Y + Z$
- $X \subset Y \wedge Y \cdot Z = 0 \rightarrow X + Z \subset Y + Z$
- $Z = X - Y \rightarrow Y \cdot Z = 0$
- $X \subset Y \wedge Y \cdot Z = 0 \rightarrow X \cdot Z = 0$
- $X \subset Y \rightarrow Y - X \neq 0$
- $X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z$
- $Z \cdot X = 0 \rightarrow (Z + Y) \cdot (X - Y) = 0$
- $Z \subset X + Y \rightarrow X + Z + (Y - Z) = X + Y$

Sprawdź te wzory przy pomocy diagramów Venna.

9. Wzór $X \dot{-} Y = (X - Y) + (Y - X)$ określa działanie na zbiorach różne od działań poprzednio wprowadzonych. Zbiór $X \dot{-} Y$ nazywamy różnicą symetryczną zbiorów X i Y . Udowodnić wzory:

- $X \dot{-} X = 0$
- $X \dot{-} Y = Y \dot{-} X$
- $X \dot{-} Y = (X + Y) - X \cdot Y$
- $X - Y = X \dot{-} X \cdot Y$
- $X + Y = (X \dot{-} Y) \dot{-} X \cdot Y$

Podać diagram dla różnicy symetrycznej i sprawdzić przy jego pomocy wzory b-d.

10. Udowodnić następujące twierdzenia:

- $x \in X \dot{-} Y = \sim (x \in X = x \in Y)$
- $X = Y = X \dot{-} Y = 0$
- $X \cdot Y = 0 \rightarrow X \dot{-} Y = X + Y$
- $X \subset Y \rightarrow Y \dot{-} X = Y - X$

§ 2. ZWIĄZEK POMIĘDZY RACHUNKIEM ZDAŃ A ALGEBRĄ ZBIORÓW

W rozważaniach tego paragrafu dogodnie jest przyjąć, że zmiennymi rachunku zdań są symbole

Przyjmujemy też, że

$$p_1, p_2, p_3, \dots$$

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

oznaczają dowolne zbiory oraz że symbole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ oznaczają dowolne wyrażenia rachunku zdań, w których występują tylko stałe

$$\vee, \wedge, \sim$$

I. Przez α^* oznaczamy wyrażenie, które powstaje z α przez podstawienie za zmienne $p_1, p_2, p_3, \dots$ odpowiednio wyrażeń $x \in Z_1, x \in Z_2, x \in Z_3, \dots$

II. Przez Z_α oznaczamy wyrażenie, które powstaje z wyrażenia α przez zastąpienie zmiennych $p_1, p_2, p_3, \dots$ odpowiednio przez symbole $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, symboli zaś $\vee, \wedge, \sim$ odpowiednio przez $+, \cdot, '$.

Przykłady:

α	α^*	Z_α
$p_1 \vee p_2$	$x \in Z_1 \vee x \in Z_2$	$Z_1 + Z_2$
$\sim(p_1 \wedge p_2)$	$\sim(x \in Z_1 \wedge x \in Z_2)$	$(Z_1 \cdot Z_2)'$

L2.1a.	$(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$
b.	$(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$
c.	$(\sim \alpha)^* = \sim(\alpha^*)$

Wzory te wynikają bezpośrednio z oznaczenia I.

L2.2a.	$Z_{\alpha \vee \beta} = Z_\alpha + Z_\beta$
b.	$Z_{\alpha \wedge \beta} = Z_\alpha \cdot Z_\beta$
c.	$Z_{\sim \alpha} = (Z_\alpha)'$

Wzory te wynikają bezpośrednio z oznaczenia II.

L2.3. Równoważność

$$(1) \quad \alpha^* \equiv x \in Z_\alpha$$

jest twierdzeniem algebry zbiorów.

Dow. Lemat udowodnimy na drodze indukcji względem ilości symboli stałych, występujących w α .

Jeśli w α nie występują symbole stałe, a więc jeśli α jest pojedynczą zmienną, np. zmienną p_1 , to na podstawie oznaczeń I i II stwierdzamy, że w rozważanym

przypadku zarówno wyrażenie α^* , jak i wyrażenie $x \in Z_\alpha$ przyjmują postać $x \in Z_\beta$. W rozważanym przypadku wzór (1) ma więc postać

$$x \in Z_\beta \equiv x \in Z_\beta$$

i jest — oczywiście — prawdziwy.

Założmy teraz, że w α występuje k ($k > 0$) symboli stałych oraz że dla wyrażen, w których występuje mniej niż k symboli stałych, wzór (1) jest prawdziwy.

Wyrażenie α ma jedną z następujących postaci:

- a. $\beta \vee \gamma$
 b. $\beta \wedge \gamma$
 c. $\sim \beta$

W każdym z wyrażen β i γ występują mniej niż k symboli stałych. Stąd i z założenia indukcyjnego wynikają wzory:

- (2) $\beta^* \equiv x \in Z_\beta$
 (3) $\gamma^* \equiv x \in Z_\gamma$

Udowodnimy lemat w przypadku a.

- (4) $\alpha^* \equiv (\beta \vee \gamma)^* \equiv \beta^* \vee \gamma^*$ {L2.1a}
 (5) $\alpha^* \equiv x \in Z_\beta \vee x \in Z_\gamma$ {4, 2, 3}
 $\alpha^* \equiv x \in Z_\beta + Z_\gamma \equiv x \in Z_{\beta \vee \gamma} \equiv x \in Z_\alpha^*$ {5, D1.4, L2.2a}

W przypadku a wzór jest więc prawdziwy. Dowód lematu w przypadkach b i c jest analogiczny.

T2.1. Jeśli wyrażenie

- a. $\alpha \equiv \beta$ jest tezą rachunku zdań, to $Z_\alpha = Z_\beta$
 b. $\alpha \rightarrow \beta$ " " " " " $Z_\alpha \subset Z_\beta$
 c. α " " " " " $Z_\alpha = 1$

- Dow. a. (1) $\alpha \equiv \beta$ {zał.}
 (2) $\alpha^* \equiv \beta^*$ {1, I}
 (2) $x \in Z_\alpha \equiv x \in Z_\beta$ {L2.3, 2}
 $Z_\alpha \equiv Z_\beta$ {D1.1, 3}

- Dow. b. (1) $\alpha \rightarrow \beta$ {zał.}
 (2) $\alpha^* \rightarrow \beta^*$ {1, I}
 (3) $x \in Z_\alpha \rightarrow x \in Z_\beta$ {L2.3, 2}
 $Z_\alpha \subset Z_\beta$ {D1.2, 3}

* Wyrażenie $\phi = \psi = \chi$ jest koniunkcją wyrażen $\phi = \psi$ oraz $\psi = \chi$.

- Dow. c. (1) α {zał.}
 (2) α^* {1, I}
 (3) $x \in Z_\alpha$ {L2.3, 2}
 (4) $x \in Z_\alpha \equiv x \in 1$ {p $\rightarrow$ [q $\rightarrow$ (p $\equiv$ q)], 3, A1.1}
 $Z_\alpha = 1$ {D1.1, 4}

Udowodnione twierdzenie wskazuje na bliski związek pomiędzy rachunkiem zdań a algebrą zbiorów. Pozwala też ono otrzymywać bezpośrednio z tez rachunku zdań twierdzenia algebry zbiorów, utworzone z dwóch wyrażen, zanotowanych przy pomocy znaków działań na zbiorach i połączonych znakiem równości lub zawierania się. Twierdzenia te stanowią zespół najczęściej stosowanych twierdzeń algebry zbiorów. W następnym twierdzeniu podane są wzory algebry zbiorów, obok każdego z tych wzorów umieszczona jest teza rachunku zdań, z której na podstawie T2.1 wynika dany wzór.

- T2.2a. $X + Y = Y + X$ {p $\vee$ q $\equiv$ q $\vee$ p}
 b. $X \cdot Y = Y \cdot X$ {p $\wedge$ q $\equiv$ q $\wedge$ p}
 c. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ {(p $\vee$ q) $\vee$ r $\equiv$ p $\vee$ (q $\vee$ r)}
 d. $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ {(p $\wedge$ q) $\wedge$ r $\equiv$ p $\wedge$ (q $\wedge$ r)}
 e. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ {p $\wedge$ (q $\vee$ r) $\equiv$ p $\wedge$ q $\vee$ p $\wedge$ r}
 f. $X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$ {p $\vee$ q $\wedge$ r $\equiv$ (p $\vee$ q) $\wedge$ (p $\vee$ r)}
 g. $X + X = X$ {p $\vee$ p $\equiv$ p}
 h. $X \cdot X = X$ {p $\wedge$ p $\equiv$ p}
 i. $(X + Y)' = X' \cdot Y'$ {~(p $\vee$ q) $\equiv$ ~p $\wedge$ ~q}
 j. $(X \cdot Y)' = X' + Y' *$ {~(p $\wedge$ q) $\equiv$ ~p $\vee$ ~q}
 k. $X \subset X + Y$ {p $\rightarrow$ p $\vee$ q}
 l. $X \cdot Y \subset X$ {p $\wedge$ q $\rightarrow$ p}
 m. $X + X' = 1$ {p $\vee$ ~p}

Ćwiczenia

1. Na podstawie jakich tez rachunku zdań otrzymujemy następujące wzory algebry zbiorów:
 a) $(X')' = X$
 b) $X \cdot Y + X = X$
 c) $(X + Y) \cdot X = X$

* Wzory i oraz j noszą nazwę praw De Morgana dla zbiorów.

2. Podać wzory algebry zbiorów, które otrzymujemy na podstawie następujących tez rachunku zdań:

- a) $\sim(\sim p \vee \sim q) = p \wedge q$
 b) $\sim(\sim p \wedge \sim q) = p \vee q$
 c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

3. Uogólnić twierdzenia i lematy tego paragrafu tak, by dotyczyły również odejmowania zbiorów.

4. Wyrażenie

$$p = ' q$$

definiujemy:

$$p = ' q \stackrel{\text{def}}{=} \sim(p = q)$$

Uzupełnić wyniki tego paragrafu tak, by dotyczyły nie tylko stałych logicznych $\vee, \wedge, \sim$, lecz również stałej $='$, przyporządkowując tej stałej znak różnicy symetrycznej $\div$ (por. ćwiczenie 10a poprzedniego paragrafu).

5. Wykazać, że jeśli wyrażenie $\sim a$ jest tezą rachunku zdań, to

$$Z_a = 0$$

6. Udowodnić wzór

$$X \cdot X' = 0$$

§ 3. ALGEBRA BOOLE'A *

We wszystkich prawie twierdzeniach poprzednich dwóch paragrafów nie występowały zmienne reprezentujące indywidua, lecz tylko zmienne reprezentujące zbiory. W twierdzeniach tych nie występował więc też symbol „ $\in$ ”, występowały natomiast znaki działań na zbiorach i znaki relacji pomiędzy zbiorami.

Do zdefiniowania jednak tych działań i relacji, jak też do dowodu twierdzeń mówiących o ich własnościach, potrzebne było pojęcie należenia przedmiotu do zbioru. Nasuwa się pytanie, czy nie można zbudować teorii zawierającej wszystkie twierdzenia algebry zbiorów, w których występują tylko zmienne reprezentujące zbiory i której ugruntowanie nie wymagałoby tego pojęcia. Otóż teorię taką stworzył Jerzy Boole (por. przypis ze str. 138). Została ona nazwana od nazwiska swego twórcy algebrą Boole'a **. Znaczenie tej teorii polega przede wszystkim na jej zastosowaniach. Podamy krótki opis tej teorii.

Terminami pierwotnymi algebry Boole'a są symbole: $+$, $\cdot$, $'$ i B . Pierwsze trzy są znakami dodawania, mnożenia i uzupełnienia zbiorów. Symbol B oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru niepustego, który traktu-

* W dalszych częściach podręcznika nie będziemy korzystać z definicji i twierdzeń podanych w tym paragrafie.

** Termin „algebra Boole'a” używany też bywa w innym znaczeniu, znaczenia te są jednak bliskie.

jemy jako zbiór pełny. Suma, iloczyn i dopełnienie zbiorów należących do rodziny B należą więc do B . O zmiennych $u, v, w, \dots$ zakładamy, że reprezentują zbiory rodziny B . Notując twierdzenia algebry zbiorów posługujemy się symbolami logicznymi, w szczególności znakiem równości.

Podajemy aksjomaty algebry Boole'a pomijając warunki dotyczące zbioru B , które powyżej zostały sformułowane słownie. Sposób, w jaki numerujemy tezy tej algebry, zostanie wyjaśniony później.

- I. $u + v = v + u$
 II. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
 II*. $u + v \cdot w = (u + v) \cdot (u + w)$
 III. $u + v \cdot v' = u$
 IV. $u + u' = v + v'$
 IV*. $u \cdot u' = v \cdot v'$

Wzory I, II i II* zostały udowodnione w § 2 jako twierdzenia T2.2a, e, f. W podobny sposób można udowodnić wzory III, IV i IV*.

Zauważmy przede wszystkim, że z podanych aksjomatów wynikają następujące wzory, których stosunkowo trudne dowody pomijamy:

- I*. $u \cdot v = v \cdot u$
 III*. $u \cdot (v + v') = u$

Łatwo spostrzec związek pomiędzy wzorami oznaczonymi tą samą cyfrą rzymską (raz bez gwiazdki, drugi raz z gwiazdką). Każdy z takich wzorów powstaje z pozostałego przez zastąpienie znaku $+$ znakiem $\cdot$ oraz znaku $\cdot$ znakiem $+$. O wzorach spełniających ten warunek mówimy, że są dwoiste. Dla każdego więc aksjomatu algebry Boole'a istnieje dwoisty z nim aksjomat lub twierdzenie. Wynika stąd, że również każde twierdzenie algebry Boole'a ma tę własność. Ostatnią uwagę zilustrujemy przykładem:

- V. $u = u + u$
 Dow. (1) $u = u + u \cdot u'$ {III}
 (2) $u + u \cdot u' = (u + u) \cdot (u + u')$ {II*}
 (3) $(u + u) \cdot (u + u') = u + u$ {III*}
 $u = u + u$ {1-3}
- V*. $u = u \cdot u$
 Dow. (1*) $u = u \cdot (u + u')$ {III*}
 (2*) $u \cdot (u + u') = u \cdot u + u \cdot u'$ {II}
 (3*) $u \cdot u + u \cdot u' = u \cdot u$ {III}
 $u = u \cdot u$ {1*-3*}

Zauważmy, że odpowiednie wiersze tych dowodów są wzorami dwoistymi.

Terminami algebry zbiorów, wprowadzonymi w § 1, i nie będącymi terminami pierwotnymi algebry Boole'a są: 1, 0, $-$, $\subset$ (termin $\equiv$ pomijamy, gdyż zastępuje go symbol $=$). Terminy te mogą być zdefiniowane na gruncie algebry Boole'a w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \text{VI.} \quad & 1 = u + u' \\ \text{VI*} \quad & 0 = u \cdot u' \\ \text{VII.} \quad & u - v = u \cdot v' \\ \text{VIII.} \quad & u \subset v \equiv u + v = v \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenia występujące w wzorach VI i VI* po prawej stronie znaku równości są dwoiste. Wynika stąd, że w celu otrzymania wyrażenia dwoistego względem wyrażenia α , w którym obok terminów pierwotnych algebry Boole'a występują terminy 0 i 1, należy zastąpić w α symbol 1 symbolem 0 oraz symbol 0 symbolem 1.

Możemy teraz wzory III i III* zastąpić wzorami prostszymi:

$$\begin{aligned} \text{IX.} \quad & u + 0 = u \\ \text{IX*} \quad & u \cdot 1 = u \end{aligned}$$

Podamy przykładowo dowody dwóch jeszcze twierdzeń algebry Boole'a.

$$\text{X.} \quad u = u \cdot v + u \cdot v'$$

$$\begin{aligned} \text{Dow. (1)} \quad & u = u \cdot 1 && \{\text{III*}, \text{IV*}, \text{VI}\} \\ (2) \quad & u \cdot 1 = u \cdot (v + v') && \{\text{VI}\} \\ (3) \quad & u \cdot (v + v') = u \cdot v + u \cdot v' && \{\text{II}\} \\ & u = u \cdot v + u \cdot v' && \{1-3\} \end{aligned}$$

W wierszu 2 dowodu skorzystaliśmy z reguły ekstensjonalności dla identyczności.

Wzorem dwoistym względem X jest wzór

$$\text{X*} \quad u = (u + v) \cdot (u + v')$$

W następującym twierdzeniu występują terminy rachunku zdań:

$$\text{XI.} \quad u + v = 1 \wedge u' + v' = 1 \rightarrow u = v'$$

$$\begin{aligned} \text{Dow. (1)} \quad & u + v = 1 && \{\text{zał.}\} \\ (2) \quad & u' + v' = 1 && \{\text{zał.}\} \\ (3) \quad & u = (u + v) \cdot (u + v') && \{\text{X*}\} \\ (4) \quad & (u + v) \cdot (u + v') = u + v' && \{\text{IX*}, 1, \text{I*}\} \\ (5) \quad & u + v' = (v' + u) \cdot (v' + u') && \{\text{IX*}, 2, \text{I}\} \\ (6) \quad & (v' + u) \cdot (v' + u') = v' && \{\text{X*}\} \\ & u = v' && \{3-6\} \end{aligned}$$

Twierdzeniem dwoistym względem twierdzenia XI jest

$$\text{XI*} \quad u \cdot v = 0 \wedge u' \cdot v' = 0 \rightarrow u = v'$$

Algebra Boole'a ma interpretację w wielu różnych teoriach. Stanowi to jej największą teoretyczną wartość. Wyjaśnijmy, co rozumiemy przez zwrot, że jakaś teoria ma interpretację w innej teorii.

Niech $\pi_1, \dots, \pi_k$ będą wszystkimi terminami pierwotnymi pewnej teorii T; $\pi_1^*, \dots, \pi_k^*$ — terminami pierwotnymi lub zdefiniowanymi jakiejś innej teorii T*. Jeśli aksjomaty teorii T, gdy zastąpimy w nich symbol π_i symbolem π_i^* , symbol π_j symbolem π_j^* itd., staną się aksjomatami lub twierdzeniami teorii T*, to mówimy, że teoria T ma interpretację w teorii T*. Mniej dokładną, lecz może bardziej uchwytą definicją tego pojęcia jest zdanie następujące:

Jeśli aksjomaty pewnej teorii T pozostają zdaniami prawdziwymi, gdy nadamy terminom pierwotnym w nich występującym sens zaczerpnięty z jakiejś innej teorii T*, to teoria T ma interpretację w teorii T*.

O ile więc interpretujemy algebrę Boole'a w pewnej teorii T*, to musimy przede wszystkim wśród jej pojęć (pierwotnych lub zdefiniowanych) wybrać jakiś zbiór B^* , mający co najmniej dwa elementy, oraz działania $+$, $\cdot$, $'$, z których dwa pierwsze są działaniami dwuargumentowymi, trzecie — działaniem jednoargumentowym. Działania te muszą mieć tę własność, że wykonując je na elementach zbioru B^* otrzymujemy zawsze elementy tego zbioru. Następnie należy sprawdzić, czy aksjomaty algebry Boole'a, gdy zastąpimy w nich symbole $+$, $\cdot$, $'$ odpowiednio symbolami $+$, $\cdot$, $'$, stają się aksjomatami lub twierdzeniami teorii T*.

Widoczne jest, że jeśli teoria T ma interpretację w teorii T*, to każde twierdzenie teorii T ma swój odpowiednik wśród twierdzeń teorii T*. Wyniki uzyskane w teorii T mogą więc być przenoszone automatycznie do każdej teorii, w której T ma interpretację. W szczególności w każdej teorii, w której może być interpretowana algebra Boole'a, istnieje fragment pod względem formalnym nie różniący się od tej algebry.

Najprostszą interpretację algebry Boole'a otrzymujemy, gdy symbolem $+$, $\cdot$, $'$ pozostawiamy ich niezmienny sens, symbol zaś B rozumiemy jako dowolne ciało zbiorów, tzn. jako rodzinę zbiorów, licząc co najmniej dwa elementy, i mającą tę własność, że suma, iloczyn i dopełnienie zbiorów, należących do tej rodziny, również do niej należą. Oczywiście jest, że rodzina wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru niepustego jest ciałem zbiorów, lecz nie odwrotnie. Przykładem ciała zbiorów, nie będącego rodziną wszystkich podzbiorów żadnego zbioru, jest rodzina zbiorów, której jedynymi elementami są: zbiór pusty i zbiór wszystkich liczb naturalnych traktowany jako zbiór pełny.

Niezmiernie ważną interpretacją algebry Boole'a jest następująca interpretacja w rachunku prawdopodobieństwa: niech B będzie zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń; przez

$$a + b, \quad a \cdot b, \quad a'$$

rozumiemy odpowiednio zdarzenia, które zachodzą, gdy zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń a lub b , gdy zachodzą oba te zdarzenia, gdy nie zachodzi zdarzenie a .

Istnieje też interpretacja algebry Boole'a w teorii sieci elektrycznych. Interpretacja ta ma duże znaczenie praktyczne. W dalszych paragrafach powiemy o jeszcze jednej interpretacji algebry Boole'a.

Ćwiczenia

1. Podać wyrażenia dwoiste względem wyrażenia

- $(u+v)' = u' \cdot v'$
- $u+u' = 1$
- $0' = 1$

2. Wykazać, że jeśli wyrażenia α_1 i β_1 są odpowiednio dwoiste względem wyrażeń α i β , to wyrażenia $\alpha_1 \subset \beta_1$ i $\beta \subset \alpha$ są równoważne.

§ 4. DZIAŁANIA NIESKOŃCZONE

Niech

$$(1) \quad X_1, X_2, X_3, \dots$$

będzie dowolnym ciągiem zbiorów i niech

$$Y = \varphi(X)$$

będzie funkcją określoną dla każdego wyrazu ciągu (1), której wartościami są zbiory.

$$D4.1. \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i) \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} x \in \varphi(X_i) *$$

$$D4.2. \quad x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i) \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} x \in \varphi(X_i)$$

Zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i)$ nazywamy sumą wyrazów ciągu

$$(2) \quad \varphi(X_1), \varphi(X_2), \varphi(X_3), \dots$$

zbiór $\bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i)$ iloczynem wyrazów tego ciągu. Do zbioru $\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i)$ należą więc te i tylko te elementy, które należą do jednego przynajmniej ze zbiorów (2), do zbioru $\bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(X_i)$ te i tylko te elementy, które należą do każdego ze zbiorów (2).

* Przypominamy, że symbol $\mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych

W szczególności symbole $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ i $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ (w przypadku tym $\varphi(X) = X$) oznaczają sumę i iloczyn zbiorów (1), symbole zaś $\bigcup_{i=1}^{\infty} X'_i$ oraz $\bigcap_{i=1}^{\infty} X'_i$ (w przypadku tym $\varphi(X) = X'$) oznaczają sumę i iloczyn wyrazów ciągu

$$X'_1, X'_2, X'_3, \dots$$

Następujące dwa wzory są uogólnieniami praw De Morgana:

$$T4.1a. \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} X'_i$$

$$b. \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} X'_i$$

$$\text{Dow. a. (1)} \quad x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)' \equiv \sim(x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \equiv \sim\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x \in X_i\right) \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} \sim(x \in X_i) \equiv$$

$$\equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} x \in X'_i \equiv x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X'_i \quad \{D1.7, D4.1, D1.7, D4.2\}$$

$$(2) \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} [x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)'] \equiv x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X'_i \quad \{1\}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} X'_i \quad \{D1.1, 2\}$$

Dowód wzoru b jest analogiczny.

$$T4.2a. \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \subset X \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subset X$$

$$b. \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} X \subset X_i \rightarrow X \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

Dowody tych twierdzeń, będących odpowiednikami dwóch pierwszych tez podanych w ćwiczeniu 5 na str. 149, pozostawiamy czytelnikowi.

Niech X będzie dowolną rodziną zbiorów. Zakładamy, że funkcja $Y = \varphi(X)$ jest określona dla każdego elementu rodziny zbiorów X i że wartościami tej funkcji są zbiory. Następujące dwie definicje są uogólnieniami D4.1 i D4.2:

$$D4.3. \quad x \in \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X) = \sum_{X \in \mathcal{X}} x \in \varphi(X)$$

$$D4.4. \quad x \in \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X) = \prod_{X \in \mathcal{X}} x \in \varphi(X)$$

W szczególności symbole $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ i $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$ (w przypadku tym $\varphi(X) = X$) oznaczają sumę i iloczyn wszystkich zbiorów należących do rodziny X .

Ćwiczenia

1. Udowodnić następujące wzory:

a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \cdot Y_i) = X \cdot \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} (X \cdot Y_i) = X \cdot \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$

c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i + Y_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i + \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$

d) $\bigcap_{i=1}^{\infty} (X_i \cdot Y_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \cdot \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$

2. Udowodnić wzory *:

a) $(\bigcup_{X \in X} X)' = \bigcap_{X \in X} X'$

b) $(\bigcap_{X \in X} X)' = \bigcup_{X \in X} X'$

3. Udowodnić następujące twierdzenia:

a) $\prod_{i \in I} (A_i \subset B_i) \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i$

b) $\prod_{X \in X} \sum_{Y \in Y} (X \subset Y) \rightarrow \bigcup_{X \in X} X \subset \bigcup_{Y \in Y} Y$

4. Wykazać, że w przypadku gdy X jest zbiorem pustym, zbiór $\bigcup_{X \in X} \varphi(X)$ jest też pusty, zbiór zaś $\bigcap_{X \in X} \varphi(X)$ jest pełny, niezależnie od tego jak określimy funkcję φ .5. Udowodnić, że w przypadku, gdy $X = \{Z, U\}$,

$$\bigcup_{X \in X} \varphi(X) = \varphi(Z) + \varphi(U)$$

oraz

$$\bigcap_{X \in X} \varphi(X) = \varphi(Z) \cdot \varphi(U)$$

6. Podać definicje $\bigcup_{X \in X} X$ i $\bigcap_{X \in X} X$ analogiczne do definicji sumy i iloczynu zbiorów podanych w ćwiczeniu 4, § 1. Na podstawie otrzymanych definicji udowodnić wzory podane w poprzednich ćwiczeniach oraz wykazać równoważność tych definicji z D4.3 i D4.4.

§ 5. ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Wprowadzamy nowe pojęcie pierwotne. Jest nim pojęcie pary uporządkowanej **. Parę uporządkowaną o pierwszym elemencie x i drugim y oznaczamy przez $\langle x, y \rangle$. Liczby zespolone są parami uporządkowanymi, których

* Wzory te noszą również nazwę praw De Morgana dla zbiorów.

** Pojęcie pary uporządkowanej nie musi być zaliczone do pojęć pierwotnych teorii mnogości, lecz może być zdefiniowane. Definicję pary uporządkowanej podajemy w § 4 „Dodatku”.

elementami są liczby rzeczywiste. Podstawową własność par uporządkowanych ujmuje następujący aksjomat:

$$\Delta 5.1 \quad \langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \equiv x = z \wedge y = t$$

Dwie pary uporządkowane są więc identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy identyczne są ich pierwsze elementy i identyczne są ich drugie elementy. O ile więc $a \neq b$, to pary $\langle a, b \rangle$ i $\langle b, a \rangle$ są różne. Zamiast pisać $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ piszemy $\langle x, y, z \rangle$, podobnie zamiast pisać $\langle \langle x, y, z \rangle, t \rangle$ piszemy $\langle x, y, z, t \rangle$. Ogólnie układ uporządkowany przedmiotów, oznaczonych symbolami $x_1, \dots, x_n$, oznaczamy przez $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Wśród tych przedmiotów niektóre, a nawet wszystkie, mogą być identyczne.

$$D5.1 \quad \langle x, y \rangle \in X \times Y \equiv x \in X \wedge y \in Y$$

Dokładna postać tej definicji jest następująca:

$$a \in X \times Y \equiv \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} a = \langle x, y \rangle$$

Zbiór $X \times Y$ nazywamy iloczynem kartezjańskim lub produktem zbiorów X i Y . Oczywiście jest, że dla każdego dwóch zbiorów istnieje ich produkt.

Jeśli przez $\mathbb{C}$ oznaczymy zbiór wszystkich liczb całkowitych, a przez $\mathbb{N}$, tak jak poprzednio, zbiór wszystkich liczb naturalnych, to iloczyn $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$ będzie zbiorem wszystkich par uporządkowanych, których pierwszym elementem jest liczba całkowita, a drugim — liczba naturalna. Przy pomocy tego zbioru zdefiniowane jest w arytmetyce teoretycznej pojęcie liczby wymiernej.

Z następującego twierdzenia skorzystamy w dalszych paragrafach:

$$\begin{aligned} T5.1a. \quad & (X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z \\ b. \quad & X \cdot Y = 0 \rightarrow (X \times Z) \cdot (Y \times Z) = 0 \\ c. \quad & \{1, 2, \dots, n\} \times X = \{1\} \times X + \{2\} \times X + \dots + \{n\} \times X \\ d. \quad & X \subset Y \rightarrow X \times Z \subset Y \times Z \\ e. \quad & X \neq 0 \rightarrow \{X\} \times X \neq 0 \\ f. \quad & \{X\} \times X \neq \{Y\} \times Y \rightarrow (\{X\} \times X) \cdot (\{Y\} \times Y) = 0 \end{aligned}$$

Podamy tylko dowód wzoru c, pozostawiając czytelnikowi łatwe dowody pozostałych wzorów.

Dow. c. W celu udowodnienia wzoru c wystarczy zauważyć, że para uporządkowana $\langle i, x \rangle$ jest elementem zbioru $\{1, 2, \dots, n\} \times X$ jak też elementem zbioru $\{1\} \times X + \{2\} \times X + \dots + \{n\} \times X$ wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą naturalną $\leq n$, element zaś x należy do zbioru X .

Niech $\Phi(x)$ będzie dowolnym warunkiem, zanotowanym przy pomocy zmiennej wolnej x ; w wyrażeniu tym występować też mogą inne zmienne wolne. Przez $\Phi(a)$ oznaczamy wyrażenie, które powstaje z $\Phi(x)$ przez podstawienie za zmienną x zmiennej a . Analogiczny sens mają symbole $\Phi(z, t)$ i $\Phi(a, b)$.

Wprowadzimy dwie definicje pozwalające w prosty sposób oznaczać zbiory spełniające dane warunki:

$$\text{D5.2.} \quad x \in E_a \Phi(a) \equiv \Phi(x)^*$$

Zbiór $E_a \Phi(a)$ jest więc zbiorem wszystkich przedmiotów spełniających warunek $\Phi(x)$.

Przy pomocy D5.2 można udowodnić równoważność T1.5 i TVI (cz. I, rozdz. II, § 6). Mianowicie z prawej strony równoważności T1.5 uzyskujemy prawą stronę równoważności TVI podstawiając za „X” wyrażenie „ $E_a A(a)$ ” i korzystając z D5.2. Z prawej zaś strony równoważności TVI uzyskujemy prawą stronę równoważności T1.5 przy pomocy podstawienia **: $A(t)/t \in X$.

$$\text{D5.3.} \quad a \in E_{a,b} \Phi(a, b) \equiv \sum_a \sum_t [a = \langle z, t \rangle \wedge \Phi(z, t)]$$

Sens tego pojęcia wyjaśnia

$$\text{T5.2.} \quad \langle x, y \rangle \in E_{a,b} \Phi(a, b) \equiv \Phi(x, y)$$

Zbiór $E_{a,b} \Phi(a, b)$ jest więc zbiorem wszystkich par uporządkowanych, których elementy spełniają warunek $\Phi(x, y)$.

Dow. (1.1)	$\langle x, y \rangle \in E_{a,b} \Phi(a, b)$	{z. dow.}
(1.2)	$\sum_a \sum_t [\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \wedge \Phi(z, t)]$	{D5.3, 1.1}
(1.3)	$\langle x, y \rangle = \langle z_1, t_1 \rangle$	{1.2}
(1.4)	$\Phi(z_1, t_1)$	
(1.5)	$x = z_1 \wedge y = t_1$	{A5.1, 1.3}
(1.6)	$\Phi(x, y)$	{1.4, 1.5}
(2.1)	$\Phi(x, y)$	{z. dow.}
(2.2)	$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle \wedge \Phi(x, y)$	{2.1}
(2.3)	$\sum_a \sum_t (\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \wedge \Phi(z, t))$	{2.2}
(2.4)	$\langle x, y \rangle \in E_{a,b} \Phi(a, b)$	{D5.3, 2.3}
teza		{1.1 → 1.6, 2.1 → 2.4}

W myśl D5.2 zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych oznaczyć możemy przez $E_a (a > 0 \wedge a \in \mathbb{R})$, zbiór wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$

* Litera E jest pierwszą literą francuskiego wyrazu „ensemble”, równoznacznego z wyrazem „zbiór”.

** Stosujemy tu regułę podstawiania za wyrażenia funkcyjne omówioną w cz. I, rozdz. II, § 5.

przez $E_a (W(a) = 0)$. W myśl zaś T5.2 zbiór wszystkich par uporządkowanych, w których pierwszy element jest równy elementowi drugiemu, oznaczyć możemy przez $E_{a,b} (a = b)$, zbiór wszystkich rozwiązań równania $x^2 + y^2 = 10$ — przez $E_{a,b} (a^2 + b^2 = 10)$.

Ćwiczenia

1. Wykazać, że

$$\langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle = x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$$

2. Udowodnić równoważność

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = x = y$$

3. Udowodnić wzory

$$\text{a) } (X \cdot Y) \times Z = (X \times Z) \cdot (Y \times Z)$$

$$\text{b) } (X - Y) \times Z = X \times Z - Y \times Z$$

4. Wykazać na przykładzie fałszywość wzoru

$$X \times Y = Y \times X$$

5. Udowodnić wzory:

$$\text{a) } E_a [\Phi(a) \vee \Psi(a)] = E_a \Phi(a) + E_a \Psi(a)$$

$$\text{b) } E_a [\Phi(a) \wedge \Psi(a)] = E_a \Phi(a) \cdot E_a \Psi(a)$$

$$\text{c) } \prod_x [\Phi(x) = \Psi(x)] = E_a \Phi(a) = E_a \Psi(a)$$

$$\text{d) } \prod_x [\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)] = E_a \Phi(a) \subset E_a \Psi(a)$$

§ 6. ELEMENTY TEORII RELACJI

Teoria relacji stanowi jeden z ważniejszych działów logiki matematycznej. Ograniczymy się tu jednak do omówienia tych tylko pojęć tej teorii, które są potrzebne do ugruntowania teorii mnogości.

Podajemy przede wszystkim definicję podstawowego dla matematyki pojęcia funkcji:

$$\text{D6.1} \quad R \in \text{funkc} = \prod_x \prod_y \prod_z (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$$

Relacja jest więc funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny przedmiot może pozostawać w tej relacji do najwyżej jednego przedmiotu. Funkcjami są więc np. relacje następujące

$$xR_1 y = y = |x|$$

$$xR_2 y = y = x^2$$

Z T5.2 i D6.1 wynika

Wniosek 6.1. Relacja R jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy do zbioru $\bigcup_{a,b} (aRb)$ nie należą żadne dwie pary uporządkowane o tym samym elemencie pierwszym i różnych elementach drugich.

$$\text{D6.2a.} \quad x \in D_l(R) \equiv \sum_y xRy$$

$$\text{b.} \quad y \in D_p(R) \equiv \sum_x xRy$$

Zbiory $D_l(R)$ i $D_p(R)$ nazywamy lewą i prawą dziedziną relacji R . Jeśli zbiorem pełnym jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, to lewą dziedziną relacji większości jest zbiór wszystkich liczb naturalnych > 1 , prawą dziedziną — zbiór wszystkich liczb naturalnych. Lewa dziedzina relacji: x jest ojcem y , jest podzbiorem zbioru wszystkich mężczyzn, prawa — zbiorem wszystkich ludzi.

Z T5.2 i D6.2a, b wynika

Wniosek 6.2. Zbiór $D_l(R)$ jest zbiorem wszystkich elementów pierwszych, zbiór zaś $D_p(R)$ zbiorem wszystkich elementów drugich par uporządkowanych należących do zbioru $\bigcup_{a,b} (aRb)$.

$$\text{D6.3.} \quad R \in \text{funke} \wedge x \in D_l(R) \rightarrow [y = R(x) \equiv xRy]$$

Element $R(x)$ nazywamy wartością funkcji R dla argumentu x . Zauważmy, że w przypadku, gdy R nie jest funkcją lub gdy $x \notin D_l(R)$, symbol $R(x)$ nie ma określonego sensu.

Z D6.2a, b i D6.3 wynika

$$\text{Wniosek 6.3a.} \quad x \in D_l(R) \equiv \sum_{y \in D_p(R)} xRy$$

$$\text{b.} \quad y \in D_p(R) \equiv \sum_{x \in D_l(R)} xRy$$

$$\text{c.} \quad R \in \text{funke} \wedge x \in D_l(R) \rightarrow R(x) \in D_p(R)$$

$$\text{D6.4.} \quad y \in R(X) \equiv \sum_{x \in X} (xRy)$$

Zbiór $R(X)$ nazywamy R -owym obrazem zbioru X , w przypadku zaś gdy R jest funkcją — zbiorem wartości tej funkcji dla argumentów należących do zbioru X . Jeśli X jest zbiorem, którego jedynym elementem jest zero, relacja zaś R jest relacją mniejszości, to zbiorem $R(X)$ jest zbiór wszystkich liczb dodatnich. Zauważmy, że symbol $R(x)$ oznacza pewne indywiduum,

* Lewą dziedzinę relacji nazywa się też często dziedziną i oznacza symbolem $D(R)$, prawą zaś dziedzinę — przeciwdziedziną i oznacza się symbolem $G(R)$.

symbol $R(X)$ — pewien zbiór. Pierwszy z tych symboli ma sens wtedy tylko, gdy R jest funkcją i $x \in D_l(R)$, symbol drugi ma sens zawsze.

$$\text{T6.1a.} \quad X \subset Y \rightarrow R(X) \subset R(Y)$$

$$\text{b.} \quad R(X+Y) = R(X)+R(Y)$$

$$\text{c.} \quad R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$$

$$\text{d.} \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} X_{i+1} = R(X_1) \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 + R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)$$

Łatwe dowody wzorów a oraz b pozostawiamy czytelnikowi. Wzór c udowodnimy dowodząc równoważności:

$$y \in R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \equiv y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$$

$$\text{Dow.} \quad y \in R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \equiv \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i} xRy \equiv$$

$$\equiv \sum_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} x \in X_i \wedge xRy \right] \equiv$$

$$\equiv \sum_x \sum_{i \in \mathbb{N}} [x \in X_i \wedge xRy] \equiv$$

$$\equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_x [x \in X_i \wedge xRy] \equiv$$

$$\equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} y \in R(X_i) \equiv y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$$

{D6.4, D4.1, wzór 2n na str. 108, wzór 1e na str. 107}

Dla udowodnienia wzoru d wystarczy wykazać, że przy założeniu

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} X_{i+1} = R(X_1): \text{ (a) jeśli } y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ to } y \in X_1 + R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \text{ i (b) jeśli } y \in X_1 + R\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right), \text{ to } y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i.$$

$$\text{Dow. (a) (1) } \left. \begin{array}{l} \prod_{i \in \mathbb{N}} X_{i+1} = R(X_1) \\ (2) \quad y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \end{array} \right\} \quad \{\text{zał.}\}$$

$$\begin{array}{l} (3) \quad i_1 \in \mathbb{N} \\ (4) \quad y \in X_{i_1} \end{array} \quad \{\text{D4.1, 2}\}$$

$$(5) \quad i_1 = 1 \vee i_1 > 1 \quad \{3\}$$

$$(1.1) \quad i_1 = 1 \quad \{\text{z. dow.}\}$$

$$(1.2) \quad y \in X_1 \quad \{4, 1.1\}$$

$$(2.1) \quad i_1 > 1 \quad \{\text{z. dow.}\}$$

$$(2.2) \quad i_1 - 1 \in \mathbb{N} \quad \{3, 2.1\}$$

$$(2.3) \quad X_{i_1} = R(X_{i_1-1}) \quad \{1, 2.2\}$$

- (2.4) $y \in R(X_{i-1})$ {4, 2.3}
- (2.5) $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$ {D4.1, 2.2, 2.4}
- (2.6) $y \in R(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$ {T6.1c, 2.5}
- (6) $y \in X_1 + R(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$ {5, 1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.6}
- (b) (1) $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_{i+1} = R(X_i)$ {zał.}
- (2) $y \in X_1 + R(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$ {z. dow.}
- (1.1) $y \in X_1$ {D4.1, 1.1}
- (1.2) $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ {z. dow.}
- (2.1) $y \in R(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$ {T6.1c, 2.1}
- (2.2) $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$ {D4.1, 2.2}
- (2.3) $i_1 \in \mathbb{N}$
- (2.4) $y \in R(X_{i_1})$ {1, 2.3}
- (2.5) $X_{i_1+1} = R(X_{i_1})$ {2.4, 2.5}
- (2.6) $y \in X_{i_1+1}$ {2.3}
- (2.7) $i_1 + 1 \in \mathbb{N}$
- (2.8) $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ {D4.1, 2.6, 2.7}
- $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ {2, 1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.8}

Szczególnym przypadkiem pojęcia funkcji jest pojęcie ciągu. Mianowicie: Ciąg nieskończony jest to funkcja, której lewą dziedziną jest zbiór wszystkich liczb naturalnych; n -ty wyraz ciągu jest wartością tej funkcji dla argumentu n . Ciąg nieskończony o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \dots$ oznaczamy przez $\{a_n\}$. Ciąg skończony n -wyrazowy jest to funkcja, której lewą dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\leq n$.

D6.5. $xR^{-1}y \equiv yRx$

Relację R^{-1} nazywamy konwersem relacji R . Konwersem relacji $<$ jest relacja $>$ i na odwrót. Konwersem relacji: jest mężem, jest relacja: jest żoną.

Wniosek 6.4. $\langle x, y \rangle \in E(aR^{-1}b) \equiv \langle y, x \rangle \in E(aRb)$ {T5.2, D6.5}

L6.1a. $D_l(R) = D_p(R^{-1})$

b. $D_p(R) = D_l(R^{-1})$

Dow. a. (1) $x \in D_l(R) \equiv \sum_y xRy \equiv \sum_y yR^{-1}x \equiv x \in D_p(R^{-1})$

$$D_l(R) = D_p(R^{-1})$$

{D6.2a, D6.5, D6.2b}
{D1.1, 1}

Dowód wzoru b jest analogiczny.

D6.6. $R \in 1-1 \equiv R, R^{-1} \in \text{funkc}$

Wyrażenie $R \in 1-1$ czytamy: relacja R jest doskonała, lub: relacja R jest jedno-jednoznaczna. Relacja jest więc doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją i jej konwers jest też funkcją.

Przykładami relacji doskonałej są następujące relacje arytmetyczne:

$$xR_1y \equiv y = 2x \wedge x, y \in \mathbb{N}$$

$$xR_2y \equiv y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{N}$$

$$xR_3y \equiv y = x^3 \wedge x, y \in \mathbb{N}$$

Z wniosków 6.1 i 6.4 oraz D6.6 wynika

Wniosek 6.5. Relacja R jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy do zbioru $E_{a,b}(aRb)$ nie należą żadne dwie (różne) pary uporządkowane, których elementy pierwsze lub drugie są identyczne.

L6.2. $R \in 1-1 \rightarrow R^{-1} \in 1-1$

Dow. Stąd, że $R \in 1-1$ i z wniosku 6.5 wynika, że do zbioru $E_{a,b}(aRb)$ nie należą żadne dwie (różne) pary uporządkowane o pierwszych lub drugich elementach identycznych. Stąd i z wniosku 6.4 wynika, że również do zbioru $E_{a,b}(aR^{-1}b)$ nie należą żadne dwie takie pary. Odwołując się jeszcze raz do wniosku 6.5 stwierdzamy prawdziwość lematu *.

L6.3a. $R \in 1-1 \wedge x \in D_l(R^{-1}) \rightarrow x = R(R^{-1}(x))$

b. $R \in 1-1 \wedge x, y \in D_l(R) \wedge x \neq y \rightarrow R(x) \neq R(y)$

c. $R^{-1} \in \text{funkc} \rightarrow R(X-Y) = R(X) - R(Y)$

Dow. a. (1) $R \in 1-1$ {zał.}

(2) $x \in D_l(R^{-1})$ {D6.6, 1}

(3) $R, R^{-1} \in \text{funkc}$ {D6.3, 3, 2}

(4) $R^{-1}(x) = R^{-1}(x) \equiv xR^{-1}R^{-1}(x)$ {4}

(5) $xR^{-1}R^{-1}(x)$ {D6.5, 5}

(6) $R^{-1}(x)Rx$ {D6.2a, 6}

(7) $R^{-1}(x) \in D_l(R)$ {D6.3, 3, 7, 6}

$x = R(R^{-1}(x))$

* Dowód L6.2. jest wyraźnie mniej szczegółowy od poprzednio podanych dowodów. Nietrudny jest też dowód L6.2. zanotowany wyłącznie przy pomocy wzorów. Taki jednak dowód nie wyjaśniałby całkowicie intuicyjnej strony rozumowania. W dalszych częściach podręcznika będziemy często słownie formułować dowody.

Dow. b. (1)	$R \in 1-1$	{zał.}
(2)	$x, y \in D_I(R)$	
(3)	$x \neq y$	{z. d. n.}
(4)	$R(x) = R(y)$	{D6.6, 1}
(5)	$R, R^{-1} \in \text{funkc}$	{D6.3, 5, 2}
(6)	$xRR(x) \wedge yRR(y)$	{D6.5, 6}
(7)	$R(x)R^{-1}x \wedge R(y)R^{-1}y$	{D6.1, 5, 4, 7}
(8)	$x=y$	{3, 8}
	sprz.	

Dowód wzoru c pozostawiamy czytelnikowi.

$$T6.2. \quad R \in 1-1 \wedge X \subset D_I(R) \rightarrow R^{-1}(R(X)) = X$$

Łatwy, lecz dość długi dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

$$D6.7. \quad xR_X y \equiv xRy \wedge x \in X$$

Relację R_X nazywamy relacją ograniczoną do zbioru X .

Z D5.3 i D6.7 wynika

Wniosek 6.6. Do zbioru $\bigcup_{a,b} (aR_X b)$ należą te i tylko te pary uporządkowane, które należą do zbioru $\bigcup_{a,b} (aRb)$ i których elementy pierwsze należą do X .

$$L6.4. \quad R \in 1-1 \rightarrow R_X \in 1-1$$

Dow. Stąd, że $R \in 1-1$ i z wniosku 6.5 wynika, że do zbioru $\bigcup_{a,b} (aRb)$ nie należą żadne dwie (różne) pary uporządkowane o pierwszych lub drugich elementach identycznych. Stąd i z wniosku 6.6 wynika, że również do zbioru $\bigcup_{a,b} (aR_X b)$ nie należą żadne dwie takie pary. Stąd i z wniosku 6.5 wynika lemat.

$$L6.5a. \quad X \subset D_I(R) \rightarrow D_I(R_X) = X$$

$$b. \quad X \subset D_I(R) \rightarrow D_P(R_X) = R(X)$$

Dow. a. (1)	$X \subset D_I(R)$	{zał.}
(1.1)	$x \in D_I(R_X)$	{z. dow.}
(1.2)	$xR_X y_1$	{D6.2a, 1.1}
(1.3)	$x \in X$	{D6.7, 1.2}
(2.1)	$x \in X$	{z. dow.}
(2.2)	$x \in D_I(R)$	{1, 2.1}
(2.3)	xRy_2	{D6.2a, 2.2}
(2.4)	$xR_X y_2$	{D6.7, 2.3, 2.1}
(2.5)	$x \in D_I(R_X)$	{D6.2a, 2.4}
	$D_I(R_X) = X$	{D1, 1.1 $\rightarrow$ 1.3, 2.1 $\rightarrow$ 2.5}

Dowód wzoru b pozostawiamy czytelnikowi.

$$D6.8. \quad xR; Sy = \sum_i (xRz \wedge zSy)$$

Relację $R; S$ nazywamy iloczynem względnym relacji R i S . Relacja prostopadłości prostych w przestrzeni jest iloczynem względnym relacji równoległości prostych i prostopadłości prostych na płaszczyźnie, gdyż prosta l jest prostopadła w przestrzeni do prostej m wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta równoległa do l i przecinająca jednocześnie m pod kątem prostym. Relacja: x jest teściem y , jest iloczynem względnym relacji: x jest ojcem z , i relacji: z jest żoną y .

Z T5.2 i D6.8 wynika

Wniosek 6.7. Para uporządkowana $\langle x, y \rangle$ należy do zbioru $\bigcup_{a,b} (aR; Sb)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego z para $\langle x, z \rangle \in \bigcup_{a,b} (aRb)$ i jednocześnie para $\langle z, y \rangle \in \bigcup_{a,b} (aSb)$.

$$L6.6. \quad R, S \in 1-1 \rightarrow R; S \in 1-1$$

Dow. Załóżmy, że relacja $R; S$ nie jest doskonała. W myśl więc wniosku 6.5 istnieją takie x, y, z , że $y \neq z$ oraz

$$a. \quad \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in \bigcup_{a,b} (aR; Sb)$$

lub

$$b. \quad \langle y, x \rangle, \langle z, x \rangle \in \bigcup_{a,b} (aR; Sb)$$

Rozpatrujemy przypadek a. Z wniosku 6.7 wynika istnienie takich t_1 i t_2 , że

$$(1) \quad \langle x, t_1 \rangle, \langle x, t_2 \rangle \in \bigcup_{a,b} (aRb)$$

oraz

$$(2) \quad \langle t_1, y \rangle, \langle t_2, z \rangle \in \bigcup_{a,b} (aSb)$$

Jeśli $t_1 = t_2$, to wzór (2) jest sprzeczny z założeniem, że $S \in 1-1$. Jeśli zaś $t_1 \neq t_2$, to wzór (1) jest sprzeczny z założeniem, że $R \in 1-1$. Przypadek a nie może więc zachodzić. W podobny sposób wykazujemy niemożliwość przypadku b. Założenie więc, że $R; S \in 1-1$, prowadzi do sprzeczności.

$$L6.7a. \quad D_P(R) = D_I(S) \rightarrow D_I(R; S) = D_I(R)$$

$$b. \quad D_P(R) = D_I(S) \rightarrow D_P(R; S) = D_P(S)$$

Dow. a. (1)	$D_P(R) = D_I(S)$	{zał.}
(1.1)	$x \in D_I(R; S)$	{z. dow.}
(1.2)	$xR; Sy_1$	{D6.2a, 1.1}
(1.3)	xRz_1	{D6.8, 1.2}
(1.4)	$x \in D_I(R)$	{D6.2a, 1.3}
(2.1)	$x \in D_I(R)$	{z. dow.}
(2.2)	xRz_2	{D6.2a, 2.1}

(2.3)	$z_2 \in D_p(R)$	{D6.2b, 2.2}
(2.4)	$z_2 \in D_l(S)$	{1, 2.3}
(2.5)	$z_2 S y_2$	{D6.2a, 2.4}
(2.6)	$xR; S y_2$	{D6.8, 2.2, 2.5}
(2.7)	$x \in D_l(R; S)$	{D6.2a, 2.6}
	$D_l(R; S) = D_l(R)$	{D1.1, 1.1 $\rightarrow$ 1.4, 2.1 $\rightarrow$ 2.7}

Dowód wzoru b jest analogiczny.

Z udowodnionych lematów skorzystamy w następnym paragrafie.

D6.9. O relacji mówimy, że jest relacją typu równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia *.

Przykładami relacji typu równoważności są: relacja równości, podobieństwa wielokątów, równoważności figur płaskich, równoznaczności wyrażeń, posiadania krwi tej samej grupy.

Następująca definicja jest odpowiednikiem D1.1:

$$D6.10. \quad R \doteq S \equiv \prod_x \prod_y (xRy \equiv xSy)$$

Wyrażenie $R \doteq S$ czytamy: relacja R jest zakresowo równa relacji S .

Odpowiednikiem T1.2 jest twierdzenie następujące, którego łatwy dowód pomijamy:

T6.2a.	$R \doteq R$
b.	$R \doteq S \rightarrow S \doteq R$
c.	$R \doteq S \wedge S \doteq T \rightarrow R \doteq T$

Odpowiednikiem T1.6 jest

$$T6.3. \quad R = S \rightarrow R \doteq S \quad \{EI, T6.2a\}$$

Odpowiednikiem aksjomatu ekstensjonalności dla zbiorów (A1.2) jest aksjomat ekstensjonalności dla relacji:

$$A6.1. \quad R \doteq S \rightarrow R = S$$

Z T6.3 i A6.1 wynika

$$T6.4. \quad R \doteq S \equiv R = S$$

Wyrażenia typu $R \doteq S$ możemy więc zawsze zastąpić przez wyrażenia typu $R = S$. Z tego względu posługiwac się będziemy dalej tylko symbolem $=$.

Podajemy jeszcze jeden lemat, z którego skorzystamy w dalszych paragrafach:

$$L6.8. \quad X = D_l(R) \rightarrow R_X = R$$

* Por. odsyłacz na str. 109.

Dow. (1)	$X = D_l(R)$	
(1.1)	$xR_X y$	{zał.}
(1.2)	xRy	{z. dow.}
(2.1)	xRy	{D6.7, 1.1}
(2.2)	$x \in D_l(R)$	{z. dow.}
(2.3)	$x \in X$	{D6.2a, 2.1}
(2.4)	$xR_X y$	{2.2, 1}
	$R_X = R$	{D6.7, 2.1, 2.3}
		{D6.10, 1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.4}

$$D6.11. \quad xR + Sy \equiv xRy \vee xSy$$

Relację $R + S$ nazywamy sumą relacji R i S .

L6.9a.	$D_l(R + S) \equiv D_l(R) + D_l(S)$
b.	$D_p(R + S) = D_p(R) + D_p(S)$
c.	$(R + S)^{-1} = R^{-1} + S^{-1}$
d.	$R, S \in \text{funke} \wedge (D_l(R)) \cdot (D_l(S)) = 0 \rightarrow R + S \in \text{funke}$

Łatwe dowody wzorów a—c pozostawiamy czytelnikowi.

Wzór d udowodnimy wykazując, że przy założeniach L6.9d:

jeśli $xR + Sy \wedge xR + Sz$, to $y = z$

Dowód L6.9d:

(1)	$R \in \text{funke}$	
(2)	$S \in \text{funke}$	
(3)	$(D_l(R)) \cdot (D_l(S)) = 0$	{zał.}
(4)	$xR + Sy \wedge xR + Sz$	
(5)	$(xRy \vee xSy) \wedge (xRz \vee xSz)$	{D6.11, 4}
(6)	$(xRy \wedge xRz) \vee (xSy \wedge xSz) \vee (xRy \wedge xSz) \vee (xSy \wedge xRz)$	{T39. § 3 R. I, cz. I; 1.2}
(7)	$\sim(xSy \wedge xRz)$	{3}
(8)	$\sim(xRy \wedge xSz)$	{3}
(9)	$(xRy \wedge xRz) \vee (xSy \wedge xSz)$	{6, 7, 9}
(1.1)	$xRy \wedge xRz$	{z. dow.}
(1.2)	$y = z$	{D6.1, 1, 1.1}
(2.1)	$xSy \wedge xSz$	{z. dow.}
(2.2)	$y = z$	{D6.1, 2, 2.1}
	$y = z$	{9, 1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.2}

$$T6.5. \quad R, S \in 1-1 \wedge (D_l(R)) \cdot (D_l(S)) = 0 \wedge (D_p(R)) \cdot (D_p(S)) = 0 \rightarrow R + S \in 1-1$$

Dow. (1)	$R \in 1-1$	
(2)	$S \in 1-1$	
(3)	$(D_l(R)) \cdot (D_l(S)) = 0$	{zał.}
(4)	$(D_p(R)) \cdot (D_p(S)) = 0$	

- | | |
|--|-------------------|
| (5) $R \in \text{funke}$ | {D6.6, 1} |
| (6) $S \in \text{funke}$ | {D6.6, 2} |
| (7) $R + S \in \text{funke}$ | {L6.9d, 5, 6, 3} |
| (8) $R^{-1} \in \text{funke}$ | {D6.6, 1} |
| (9) $S^{-1} \in \text{funke}$ | {D6.6, 2} |
| (10) $(D_R(R^{-1})) \cdot (D_S(S^{-1})) = 0$ | {L6.1b, 4} |
| (11) $R^{-1} + S^{-1} \in \text{funke}$ | {L6.9d, 8, 9, 10} |
| (12) $(R + S)^{-1} \in \text{funke}$ | {L6.9c, 11} |
| $R + S \in 1-1$ | {D6.6, 7, 12} |

Oprócz sumy relacji określa się w rachunku relacji również iloczyn i dopełnienie relacji, przy pomocy wzorów:

$$xR \cdot Sy \equiv xRy \wedge xSy$$

$$xR'y \equiv \sim xRy$$

Można wykazać, że te trzy działania na relacjach spełniają aksjomaty algebry Boole'a, podane w § 3. W ten sposób otrzymujemy jeszcze jedną interpretację tej algebry.

Dotąd mówiliśmy tylko o relacjach dwuargumentowych. W rachunku relacji bada się również relacje o większej ilości argumentów. Tak np. można uogólnić pojęcie funkcji na pojęcie funkcji wielu zmiennych. Podamy tylko definicję funkcji dwu zmiennych:

$$R \text{ jest funkcją dwu zmiennych} \equiv \prod_x \prod_y \prod_z \prod_u [R(x, y, z) \wedge R(x, y, u) \rightarrow z = u]$$

Funkcje dwu zmiennych są więc pewnymi relacjami trójargumentowymi. Wprowadzimy jeszcze pojęcie relacji określonej i wykonalnej w danym zbiorze, ograniczając się znowu do przypadku relacji trójargumentowych:

$$R \text{ jest relacją określoną i wykonalną w zbiorze } X \equiv \prod_{x \in X} \prod_{y \in X} \sum_{z \in X} R(x, y, z)$$

Relacje trójczłonowe określone i wykonalne w zbiorze X , będące funkcjami, nazywamy działaniami dwuargumentowymi w zbiorze X . Tak np. dodawanie i mnożenie są działaniami dwuargumentowymi w zbiorze liczb naturalnych, odejmowanie jest działaniem w zbiorze liczb całkowitych, dzielenie jest działaniem w zbiorze liczb wymiernych różnych od 0.

Prócz działań dwuargumentowych rozważane są też działania jednoargumentowe, trójargumentowe itd.

Ćwiczenia

1. Które z następujących relacji są funkcjami:

$$xRy = y^2 = x \wedge x, y \in \mathbb{R}$$

$$xRy = x < y < x+1 \wedge x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \text{ jest synem } y$$

$$xRy = y^2 = x \wedge x, y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0$$

$$xRy = x < y < x+1 \wedge x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \text{ jest ojcem } y$$

2. Udowodnić wzory:

$$a) R \in 1-1 \wedge x \in D_R(E) \rightarrow x = E^{-1}(E(x))$$

$$b) R \in 1-1 \wedge x \in D_R(E) \rightarrow x = E(E^{-1}(x))$$

$$c) R \in \text{funke} \wedge x \in D_R(E) \rightarrow [x \in X \equiv E(x) \in E(X)]$$

$$d) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$e) E(X \cdot Y) \subset E(X) \cdot E(Y)$$

$$f) R \in \text{funke} \equiv \prod_{x \in D_R(E)} \sum_y xRy$$

$$g) R \in 1-1 \equiv \prod_{x \in D_R(E)} \sum_y xRy \wedge \prod_{y \in D_R(E)} \sum_x xRy$$

Wykazać na przykładzie, że wzór

$$E(X) \cdot E(Y) \subset E(X \cdot Y)$$

nie jest prawdziwy.

3. Podać lewe i prawe dziedziny relacji wymienionych w ćwiczeniu 1. Które z tych relacji są doskonałe?

4. Czy prawdziwy jest wzór: $E_X \in 1-1 \rightarrow R \in 1-1$?

5. Iloczynem względnym jakich dwu relacji są następujące relacje:

$$x \text{ jest zięciem } y, \quad x \text{ jest szwagrem } y$$

6. Wykazać przy pomocy przykładu fałszywość wzoru:

$$xR;Sy \rightarrow xS;Ry.$$

7. Podać przykłady relacji

a) będącej zwrotną i symetryczną, lecz nie będącej przechodnią,

b) będącej zwrotną i przechodnią, lecz nie będącej symetryczną,

c) będącej symetryczną i przechodnią, lecz nie będącej zwrotną.

8. Udowodnić wzory:

$$a) R = (R^{-1})^{-1}$$

$$b) (R;S);T = R;(S;T)$$

$$c) (R;S)^{-1} = S^{-1};R^{-1}$$

$$d) R \in \text{sym} \equiv R = R^{-1}$$

9. Udowodnić wzór:

$$D_R(R) \subset X \rightarrow R(X) = D_R(E)$$

10. Wykazać na przykładzie, że następujące wyrażenie nie jest prawdziwe:

$$R_X = R \rightarrow X = D_R(E)$$

§ 7. RÓWNOLICZNOŚĆ ZBIORÓW. LICZBY KARDYNALNE

Pojęcia, które zdefiniujemy w tym paragrafie, należą do najważniejszych i najbardziej podstawowych pojęć teorii mnogości.

$$D7.1. \quad X \sim_R Y \equiv R \in 1-1 \wedge X = D_R(R) \wedge Y = D_R(R)$$

Wyrażenie $X \sim_R Y$ czytamy: relacja R ustala równoliczność zbiorów X i Y .

Relacja

$$xRy \equiv y = 3x \wedge x \in \mathbb{R}$$

ustala więc równoliczność zbioru wszystkich liczb naturalnych i zbioru wszystkich liczb parzystych dodatnich; relacja

$$xR_2y \equiv y = x^2 \wedge x \in \mathbb{N}$$

ustala równoliczność zbioru wszystkich liczb naturalnych i zbioru wszystkich kwadratów liczb naturalnych.

Jeszcze jeden przykład: niech K_1 i K_2 będą dwoma okręgami współśrodkowymi. Punktowi okręgu K_1 przyporządkowujemy punkt okręgu K_2 , gdy punkty te leżą na tej samej półprostej, początkiem której jest wspólny środek okręgów K_1 i K_2 . Przyporządkowanie to ustala równoliczność zbiorów punktów leżących na tych okręgach. Z przykładów tych widać, że zbiory mogą być równoliczne, pomimo że jeden z nich jest częścią właściwą drugiego. Własność tę posiadać mogą — oczywiście — tylko zbiory nieskończone.

Z T5.2, D7.1 oraz wniosków 6.5 i 6.3 wynika

Wniosek 7.1. Relacja R ustala równoliczność zbiorów X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy do zbioru $\sum_{a,b} (aRb)$ nie należą żadne dwie (różne) pary uporządkowane, których elementy pierwsze lub elementy drugie są identyczne, przy czym elementy pierwsze par uporządkowanych należących do zbioru $\sum_{a,b} (aRb)$ tworzą zbiór X , elementy zaś drugie — zbiór Y .

$$D7.2. \quad X \sim Y \equiv \sum_R X \sim_R Y$$

Wyrażenie $X \sim Y$ czytamy: zbiory X i Y są równoliczne. Dwa zbiory są więc równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja ustalająca ich równoliczność.

Widoczne jest, że dwa zbiory skończone są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy liczby ich elementów są równe.

W rozważaniach tego paragrafu dogodne będzie oznaczanie relacji identyczności symbolem I . Zamiast więc pisać $x = y$, będziemy pisać xIy . Symbolika taka bywa dość często stosowana w logice. Zauważmy jeszcze, że wyrażenie xIx jest tezą logiczną.

$$L7.1. \quad X = I(X)$$

Dow. (1.1)	$y \in X$	{z. dow.}
(1.2)	$y \in X \wedge yIy$	{1.1}
(1.3)	$\sum_{x \in X} xIy$	{1.2}
(1.4)	$y \in I(X)$	{D6.4, 1.3}
(2.1)	$y \in I(X)$	{z. dow.}
(2.2)	$\sum_{x \in X} xIy$	{D6.4, 2.1}
(2.3)	$x_1 \in X$	{2.2}
(2.4)	x_1Iy	
(2.5)	$y \in X$	
	$X = I(X)$	{EI: 2.4, 2.3}
		{D1.1, 1.1 $\rightarrow$ 1.4, 2.1 $\rightarrow$ 2.5}

T7.1a.

$$X \sim X$$

b.

$$X \sim Y \rightarrow Y \sim X$$

c.

$$X \sim Y \wedge Y \sim Z \rightarrow X \sim Z$$

Twierdzeniu temu możemy też nadać następujące słowne brzmienie: *Relacja równoliczności zbiorów jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a więc jest relacją typu równoważności.*

Dow. a. (1)	$I \in \text{funke}$	{D6.1}
(2)	$I^{-1} \in \text{funke}$	{D6.5, D6.1}
(3)	$I \in 1-1$	{D6.6, 1,2}
(4)	$I_X \in 1-1$	{L6.4, 3}
(5)	$x \in D_I(I)$	{D6.2a}
(6)	$D_I(I) = 1$	{D1.1, 5, A1.1}
(7)	$X \subset D_I(I)$	{T1.1, 6}
(8)	$D_I(I_X) = D_p(I_X) = X$	{L6.5a, b, 7, L7.1}
(9)	$X \sim_{I_X} X$	{D7.1, 4, 8}
	$X \sim X$	{D7.2, 9}

Dow. b. (1)	$X \sim Y$	{zał.}
(2)	$X \sim_{R_1} Y$	{D7.2, 1}
(3)	$R_1 \in 1-1$	{D7.1, 2}
(4)	$X = D_I(R_1) \wedge Y = D_p(R_1)$	
(5)	$R_1^{-1} \in 1-1$	{L6.2, 3}
(6)	$D_I(R_1^{-1}) = Y \wedge D_p(R_1^{-1}) = X$	{L6.1a, b, 4}
(7)	$Y \sim_{R_1^{-1}} X$	{D7.1, 5, 6}
	$Y \sim X$	{D7.2, 7}

Dow. c. (1)	$X \sim Y \wedge Y \sim Z$	{zał.}
(2)	$X \sim_{R_1} Y \wedge Y \sim_{S_1} Z$	{D7.2, 1}
(3)	$R_1, S_1 \in 1-1$	{D7.1, 2}
(4)	$X = D_I(R_1) \wedge Y = D_p(R_1) =$	
(4)	$= D_I(S_1) \wedge Z = D_p(S_1)$	
(5)	$R_1; S_1 \in 1-1$	{L6.6, 3}
(6)	$X = D_I(R_1; S_1) \wedge Z = D_p(R_1; S_1)$	{L6.7a, b, 4}
(7)	$X \sim_{R_1; S_1} Z$	{D7.1, 5, 6}
	$X \sim Z$	{D7.2, 7}

Z następujących dwóch lematów skorzystamy w jednym z dalszych paragrafów.

$$L7.2. \quad X \sim_R Y \rightarrow Y = R(X)$$

Dow. (1)	$X \sim_R Y$	{zał.}
(2)	$X = D_I(R)$	{D7.1, 1}
(3)	$Y = D_p(R)$	

- (4) $D_p(R_X) = R(X)$ {L6.5b, 2}
 (5) $R_X = R$ {L6.8, 2}
 (6) $D_p(R_X) = D_p(R)$ {5}
 $Y = R(X)$ {3, 6, 4}

L7.3. $R \in 1-1 \wedge X \subset D(R) \rightarrow X \sim_{R_X} R(X)$ {zał.}

- Dow. (1) $R \in 1-1$
 (2) $X \subset D_i(R)$ {L6.4, 1}
 (3) $R_X \in 1-1$ {L6.5a, 2}
 (4) $D_i(R_X) = X$ {L6.5b, 2}
 (5) $D_p(R_X) = R(X)$ {D7.1, 3, 4, 5}
 $X \sim_{R_X} R(X)$

Wprowadzamy nowe pojęcie pierwotne. Jest nim pojęcie mocy zbioru*. Należy ono do najbardziej podstawowych pojęć teorii mnogości.

Moc zbioru X oznaczamy przez $\bar{X}$. Twórca teorii mnogości Jerzy Cantor sądził, że do pojęcia mocy zbioru dochodzimy abstrahując od tego, jakie przedmioty tworzą dany zbiór i jak przedmioty te są w nim uporządkowane. Dwie kreski w oznaczeniu mocy zbioru mają właśnie symbolizować tę podwójną abstrakcję.

Dołączamy do systemu teorii mnogości nowy aksjomat, w którym wystąpi wprowadzony termin pierwotny:

A7.1. $\bar{\bar{X}} = \bar{Y} \equiv X \sim Y$

Uwaga 7.1. Przyjmujemy, że mocą zbioru pustego jest liczba zero, mocą zbioru skończonego — liczba naturalna, wskazująca, ile elementów liczy dany zbiór.

Moce dwóch zbiorów są więc identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te są równoliczne. Zauważmy, że z A7.1 i z uwagi, że relacja identyczności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, wynika natychmiast T7.1**.

D7.3. $m \in \text{Lk} \equiv \sum_X m = \bar{X}$

Wyrażenie $m \in \text{Lk}$ czytamy: m jest liczbą kardynalną. Przedmiot matematyczny jest więc liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest mocą pewnego zbioru. Z uwagi 7.1 i D7.3 wynika, że liczby naturalne i liczba zero są liczbami kardynalnymi. W dalszych paragrafach wykażemy, że istnieją nierównoliczne zbiory nieskończone. Istnieją więc różne liczby kardynalne nie będące zerem ani też liczbą naturalną. Dowolne liczby kardynalne oznaczać będziemy małymi literami gotyckimi: m, n, ℓ .

* W terminologii matematycznej utarła się nazwa „moc zbioru”, chociaż lepszy może byłby termin „liczebność zbioru”.

** Por. uwaga po T1.7 (na str. 142).

Z D7.3 wynika

T7.2a. $\bar{\bar{X}} \in \text{Lk}$
 b. $\prod_X \sum_{m \in \text{Lk}} m = \bar{X}$
 c. $\prod_{m \in \text{Lk}} \sum_X m = \bar{X}$

Twierdzenie to ma następujące słowne sformułowanie:

- a. moc dowolnego zbioru jest liczbą kardynalną;
 b. dla każdego zbioru istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna, będąca mocą tego zbioru;
 c. dla każdej liczby kardynalnej istnieje zbiór, którego mocą jest dana liczba kardynalna.

L7.4. Dla każdych dwóch zbiorów A i B istnieją takie zbiory A_1 i B_1 , że $A_1 \sim A$, $B_1 \sim B$ oraz $A_1 \cdot B_1 = 0$.

Dow. Zbiory A_1 i B_1 określamy w następujący sposób:

$$\langle 1, a \rangle \in A_1 \equiv a \in A$$

$$\langle 2, b \rangle \in B_1 \equiv b \in B$$

Łatwo spostrzec, że zbiory A_1 i B_1 spełniają warunki lematu.

W rozważaniach dotyczących liczb kardynalnych obojętne jest, które spośród równolicznych zbiorów bierzemy pod uwagę. W myśl L7.4 możemy zawsze dane dwa zbiory zastąpić zbiorami rozłącznymi.

L7.5a. $A \sim B \wedge A_1 \sim B_1 \wedge A \cdot A_1 = B \cdot B_1 = 0 \rightarrow A + A_1 \sim B + B_1$

b. $A \sim B \wedge A_1 \sim B_1 \rightarrow A \times A_1 \sim B \times B_1$

Dow. a. Zakładamy, że relacja R ustala równoliczność zbiorów A i B , relacja zaś R_1 — równoliczność zbiorów A_1 i B_1 . Wówczas na podstawie T6.5 relacja $R+R_1$ ustala równoliczność zbiorów $A+A_1$ i $B+B_1$.

Zauważmy, że warunek, by zbiory A i A_1 oraz B i B_1 były rozłączne, jest istotny, o czym świadczy następujący przykład:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad B_1 = \{1, 4, 5, 6\}$$

Dowód części b lematu pozostawiamy czytelnikowi.

Z L7.4 i L7.5 skorzystamy w następnym paragrafie.

Zauważmy jeszcze, że moc zbioru wszystkich liczb naturalnych oznaczamy przez $\aleph_0$ *, moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przez c . Spełnione są więc wzory:

$$\bar{\aleph_0} = \aleph_0$$

$$\bar{c} = c$$

* Znak $\aleph$ jest pierwszą literą alfabetu hebrajskiego. Nazywamy ją alefem. Oznaczenie to wprowadził Cantor. Symbol $\aleph_0$ czytamy: alef-zero.

Zbiory, których mocą jest liczba $\aleph_0$, nazywamy przeliczalnymi, zbiory, których mocą jest liczba c — zbiorami mocy continuum.

D7.4. Zbiór A jest zapasem ciągu $\{a_n\} = \prod_a [a \in A \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} a = a_i]$

T7.3. $\overline{A} = \aleph_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} [\prod_{j \in \mathbb{N}} (i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j) \wedge \wedge \text{zbiór } A \text{ jest zapasem ciągu } \{a_n\}]$

Warunkiem więc koniecznym i wystarczającym, aby zbiór A był przeliczalny, jest istnienie nieskończonego ciągu o niepowtarzających się wyrazach, którego zapasem jest zbiór A .

Dow. Niech

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

będzie ciągiem nieskończonym o niepowtarzających się wyrazach, którego zapasem jest zbiór A . Przyporządkujemy każdemu wyrazowi tego ciągu jego wskaźnik, a więc wyrazowi a_i liczbę 1, wyrazowi a_j liczbę 2 itp. Łatwo zobaczyć, że przyporządkowanie to ustala równoliczność zbiorów A i $\mathbb{N}$. Implikacja odwrotna wynika z A7.1, D7.2, D7.1, definicji ciągu i definicji liczby $\aleph_0$.

Należy zauważyć, że dla wszystkich prawie twierdzeń o mocach zbiorów istnieją równoważne im twierdzenia, w których nie występuje to pojęcie, lecz tylko pojęcie równoliczności zbiorów. Skreślenie więc z listy pojęć pierwotnych teorii mnogości pojęcia mocy zbioru (oczywiste jest, że jednocześnie należałoby skreślić A7.1) nie zubożyłoby istotnie tej teorii, a spowodowałoby tylko znaczne komplikacje w sformułowaniu wielu jej twierdzeń.

Ćwiczenia

1.1. Wykazać równoliczność następujących zbiorów:

- zbioru wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich i zbioru wszystkich liczb rzeczywistych ujemnych;
- zbioru wszystkich liczb naturalnych i zbioru wszystkich liczb naturalnych większych od danej liczby n ;
- zbioru liczb rzeczywistych przedziału $(0, 1)$ i zbioru liczb rzeczywistych przedziału $(k, k+1)$;
- zbioru wszystkich punktów leżących na cięciwie okręgu i zbioru wszystkich punktów leżących na łuku opartym na tej cięciwie.

2. Wykazać, że następująca definicja jest równoważna D7.2:

$$X \sim Y = \sum_{R \in \mathcal{P}} [X \subset D_R(R) \wedge R(X) = Y]$$

3. Wykazać na przykładzie fałszywość twierdzenia:

$$X \sim Y \wedge X_1 \sim Y_1 \rightarrow X \cdot X_1 \sim Y \cdot Y_1$$

4. Wykazać analogicznie, że zbiory $\{a\}$ i $\{y\}$ są równoliczne.

§ 8. ARYTMETYKA LICZB KARDYNALNYCH

Zdefiniujemy dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb kardynalnych. Dla oznaczenia każdego z tych działań posługujemy się symbolami, którymi są one oznaczone w arytmetykach liczb „zwykłych”, np. w arytmetyce liczb naturalnych lub rzeczywistych. Zachowujemy też terminologię tych arytmetyk, nazywając np. wynik dodawania liczb kardynalnych sumą, liczby kardynalne, które dodajemy — składnikami.

D8.1. $X \cdot Y = 0 \rightarrow \overline{X} + \overline{Y} = \overline{X + Y}$

Jest to skrótowa postać definicji dodawania liczb kardynalnych. Postać dokładna tej definicji jest następująca:

$$m + n = t \equiv \sum_X \sum_Y (\overline{X} = m \wedge \overline{Y} = n \wedge X \cdot Y = 0 \wedge t = \overline{X + Y})$$

Definicje dalszych działań podamy tylko w postaci skrótowej.

D8.2. $\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X \times Y}$

Podajemy definicję pomocniczą:

D8.3. $R \in Y^X \equiv R \in \text{funke} \wedge D_R(R) = X \wedge R(X) \subset Y$

Wyrażenie $R \in Y^X$ czytamy: funkcja R jest odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y . Z D8.3 wynika:

$$A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \rightarrow B^A \sim B_1^{A_1}$$

Dowód tego wzoru, analogicznego do L7.5a, porostawiamy czytelnikowi. Z D8.3 wynika też

Wniosek 8.1 $Z \subset Y \rightarrow Z^X \subset Y^X$

D8.4. $\overline{X^Y} = (\overline{X})^{\overline{Y}}$

Moc zbioru X podniesiona do potęgi równej mocy zbioru Y jest więc równa mocy zbioru wszystkich odwzorowań zbioru Y w zbiór X .

Wykażemy, że D8.1 jest poprawna. W tym celu należy udowodnić, że dla każdego dwóch liczb kardynalnych m i n istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna, będąca ich sumą.

W myśl T7.2o istnieją takie zbiory A i A_1 , że $\overline{A} = m$ oraz $\overline{A_1} = n$. W myśl L7.4 założymy możemy, że zbiory te są rozłączne. Powołując się na T7.2b stwier-

dzamy istnienie liczby kardynalnej $\bar{f} = \overline{A + A_1}$. Dla każdych dwu liczb kardynalnych istnieje więc suma.

Niech teraz B i B_1 będą dowolnymi zbiorami spełniającymi warunki:

$$\bar{B} = m, \quad \bar{B}_1 = n, \quad B \cdot B_1 = 0$$

i niech $\bar{f}_1 = \overline{B + B_1}$. Z L7.5a wynika, że $A + A_1 \sim B + B_1$. Stąd i z A7.1 wynika, że $\bar{f} = \bar{f}_1$. Istnieje więc jedna tylko suma danych liczb kardynalnych. W podobny sposób można wykazać poprawność definicji pozostałych działań.

Wykażemy teraz, że działania na liczbach naturalnych są szczególnymi przypadkami działań na liczbach kardynalnych.

Niech

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^*$$

a więc

$$\bar{X} = m \quad i \quad \bar{Y} = n$$

Zakładamy jeszcze, że każdy element zbioru X jest różny od każdego elementu zbioru Y . Oczywiście jest, że $\overline{X + Y} = m + n$. Dodawanie liczb naturalnych jest więc szczególnym przypadkiem dodawania liczb kardynalnych.

Wykażemy z kolei, że $\overline{X \times Y} = m \cdot n$. Do iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ należy każda para uporządkowana $\langle x_i, y_j \rangle$, gdzie $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Widoczne jest, że par takich jest $m \cdot n$. Mnożenie więc liczb naturalnych jest szczególnym przypadkiem mnożenia liczb kardynalnych. Zauważmy dalej, że każde odwzorowanie zbioru Y w zbiór X wyznacza jednoznacznie ciąg n -wyrazowy

(1)

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

którego wyrazami są elementy zbioru X . Łatwo spostrzec, że ciągów takich jest m^n . A więc również potęgowanie liczb naturalnych jest szczególnym przypadkiem potęgowania liczb kardynalnych.

Podamy przykładowo kilka twierdzeń arytmetyki liczb kardynalnych.

T8.1a.

$$\bar{X} + \bar{Y} = \overline{Y + X}$$

b.

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = \overline{Y \cdot X}$$

Twierdzenie to można zanotować również w postaci następującej:

a.

$$m + n = n + m$$

b.

$$m \cdot n = n \cdot m$$

* Zakładamy, że wśród elementów $x_1, x_2, \dots, x_m$ nie ma identycznych oraz że wśród elementów $y_1, y_2, \dots, y_n$ nie ma identycznych.

** Oczywiście jest, że wyrazy ciągu (1) o różnych wskaźnikach mogą być identyczne.

Dow. a. W myśl L7.4 możemy założyć, że zbiory X i Y są rozłączne. Prawdziwy jest więc wzór:

$$(1) \quad X \cdot Y = Y \cdot X = 0$$

$$(2) \quad \bar{X} + \bar{Y} = \overline{X + Y}$$

$$(3) \quad \bar{Y} + \bar{X} = \overline{Y + X}$$

$$(4) \quad \bar{X} \cdot \bar{Y} = \overline{X \cdot Y}$$

$$(5) \quad \overline{X + Y} = \overline{Y + X}$$

$$\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} + \bar{X}$$

{D8.1, 1}

{T2.2a}

{4}

{5, 2, 3}

Dow. b. W myśl D8.2 spełnione są wzory:

$$(1) \quad \bar{X} \cdot \bar{Y} = \overline{X \times Y}, \quad \bar{Y} \cdot \bar{X} = \overline{Y \times X}$$

Definiujemy relację potrzebną do dalszego dowodu:

$$\langle x, y \rangle R_1 \langle z, t \rangle \equiv x = t \wedge y = z \wedge x \in X \wedge y \in Y$$

Widoczne jest, że relacja ta ustala równoliczność zbiorów $X \times Y$ i $Y \times X$. Stąd, z D8.2 i A7.1 wynika równość

$$(2) \quad \overline{X \times Y} = \overline{Y \times X}$$

Z (1) i (2) wynika

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = \bar{Y} \cdot \bar{X}$$

T8.2.

$$(\bar{X} + \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = \overline{X \cdot Z} + \overline{Y \cdot Z}$$

Dow. W myśl L7.4 założyć możemy, że

$$(1) \quad X \cdot Y = 0$$

$$(2) \quad \bar{X} + \bar{Y} = \overline{X + Y}$$

$$(3) \quad (\bar{X} + \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = \overline{X + Y} \cdot \bar{Z} = \overline{(X + Y) \times Z}$$

$$(4) \quad (X \times Z) \cdot (Y \times Z) = 0$$

$$(5) \quad \bar{X} \cdot \bar{Z} + \bar{Y} \cdot \bar{Z} = \overline{X \times Z} + \overline{Y \times Z} = \overline{(X \times Z) + (Y \times Z)}$$

$$(6) \quad (X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$$

$$(7) \quad \overline{(X + Y) \times Z} = \overline{X \times Z + Y \times Z}$$

$$(\bar{X} + \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = \overline{X \cdot Z} + \overline{Y \cdot Z}$$

{D8.1, 1}

{2, D8.2}

{T5.1b, 1}

{D8.2, D8.1, 4}

{T5.1a}

{6}

{7, 3, 5}

T8.3.

$$n \cdot \bar{X} = \overline{\bar{X} + \bar{X} + \dots + \bar{X}}$$

Dow. Niech $\mathfrak{N}_1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Stąd $\bar{\mathfrak{N}}_1 = n$. Oznaczmy przez X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) iloczyn kartezjański zbioru jednoelementowego $\{i\}$ oraz zbioru X . Łatwo widzieć, że spełnione są wzory:

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_n = \bar{X}$$

$$i \neq j \rightarrow X_i \cdot X_j = 0$$

Ze wzorów tych, T5.1c oraz D8.1 i D8.2 wynikają następujące równości:

$$n \cdot \bar{X} = \overline{n_1 \times X} = \overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n = \underbrace{\bar{X} + \bar{X} + \dots + \bar{X}}_n$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe.

$$T8.4. \quad (\bar{X})^n = \underbrace{\bar{X} \cdot \bar{X} \cdot \dots \cdot \bar{X}}_n$$

Dow. Niech $n_1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Stąd $\bar{n}_1 = n$. Z D8.3 wynika, że zbiór X^{n_1} jest zbiorem wszystkich ciągów $x_1, x_2, \dots, x_n$, których wyrazy są elementami zbioru X , w myśl zaś D5.1 zbiór $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$ jest zbiorem wszystkich ukła-

dów uporządkowanych $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, przy czym $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Widoczne jest, że relacja przyporządkowująca ciągowi $x_1, x_2, \dots, x_n$ układ uporządkowany $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ustala równoliczność zbiorów X^{n_1} i $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$. Stąd

oraz z D8.2 i D8.4 wynika twierdzenie.

$$T8.5. \quad \overline{\bar{X}^Y + \bar{X}^Z} = \bar{X}^{\bar{Y} \cdot \bar{Z}}$$

Dowód, który podajemy, zawiera liczne skróty.

Dow. W myśl L7.4 możemy założyć, że

$$(1) \quad Y \cdot Z = 0$$

Niech R będzie dowolną funkcją odwzorowującą zbiór $Y + Z$ w zbiór X . Stąd, ze wzoru (1) oraz D6.7 i D8.3 wynikają wzory

$$R_Y \in X^Y$$

$$R_Z \in X^Z$$

Niech relacja S przyporządkowuje funkcji R parę uporządkowaną $\langle R_Y, R_Z \rangle$. Relacja S ustala równoliczność zbiorów X^{Y+Z} i $X^Y \times X^Z$. Stąd wynika już, jak widać, dowodzone twierdzenie.

Następne twierdzenie podajemy bez dowodu.

$$T8.6. \quad (\bar{X}^{\bar{Y}})^{\bar{Z}} = \bar{X}^{\bar{Y} \cdot \bar{Z}}$$

Twierdzenia arytmetyki liczb kardynalnych, które podaliśmy w tym paragrafie, są analogiczne do twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych. W dalszych paragrafach poznamy jednak twierdzenia nie mające tej własności. Zauważmy jeszcze, że nie zostały podane definicje działań odwrotnych: odejmowania i dzielenia. Powody, dla których w teorii mnogości nie definiujemy tych działań, zostaną również podane w dalszych paragrafach.

Ćwiczenia

1. Udowodnić następujące wzory:

- $m + 0 = m$
- $m \cdot 1 = m$
- $m \cdot 0 = 0$
- $m^1 = m$
- $1^m = 1$
- $(\bar{X} \cdot \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = \bar{X} \cdot (\bar{Y} \cdot \bar{Z})$

§ 9. NIERÓWNOŚCI

$$L9.1. \quad X \sim X_1 \wedge Y \sim Y_1 \wedge \sum_{Z \in Y} (X \sim Z) \rightarrow \sum_{U \in Y_1} (X_1 \sim U)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & X \sim X_1 \\ (2) & Y \sim Y_1 \\ (3) & \sum_{Z \in Y} X \sim Z \quad \left. \begin{array}{l} \text{[zał.]} \\ \text{[D7.2, 2]} \end{array} \right\} \\ (4) & R_1 \in 1-1 \\ (5) & Y \sim_{R_1} Y_1 \\ (6) & Y_1 = R_1(Y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[L7.2, 5]} \\ \text{[3]} \end{array} \right\} \\ (7) & Z_1 \subset Y \\ (8) & X \sim Z_1 \\ (9) & R_1(Z_1) \subset R_1(Y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[T6.1a, 7]} \\ \text{[9, 6]} \end{array} \right\} \\ (10) & R_1(Z_1) \subset Y_1 \\ (11) & Y = D_1(R_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[D7.1, 5]} \\ \text{[7, 11]} \end{array} \right\} \\ (12) & Z_1 \subset D_1(R_1) \\ (13) & Z_1 \sim_{R_1 Z_1} R_1(Z_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[L7.3, 4, 12]} \\ \text{[D7.2, 4, 13]} \end{array} \right\} \\ (14) & Z_1 \sim_{R_1} R_1(Z_1) \\ (15) & X_1 \sim_{R_1} R_1(Z_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[T7.1b, c, 1, 8, 14]} \\ \text{[10, 15]} \end{array} \right\} \\ & \sum_{U \in Y_1} X_1 \sim U \end{array}$$

Zdefiniujemy relacje nieostrej i ostrej nierówności. Relacje te oznaczymy symbolami zaczerpniętymi z arytmetyki liczb „zwykłych”.

$$D9.1. \quad \bar{X} \leq \bar{Y} \equiv \sum_{Z \in Y} X \sim Z$$

Na to więc, by moc zbioru X była mniejsza lub równa mocy zbioru Y , potrzeba i wystarcza, by zbiór X był równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru Y . Zauważmy, że z L9.1 wynika: Jeśli $\bar{X} = \bar{X}_1$, $\bar{Y} = \bar{Y}_1$ i $\bar{X} \leq \bar{Y}$, to również $\bar{X}_1 \leq \bar{Y}_1$.

* Przypominamy, że 0 jest mocą zbioru pustego.

Ze wzorów tych, T5.1c oraz D8.1 i D8.2 wynikają następujące równości:

$$n \cdot \bar{X} = \overline{\mathfrak{N}_1 \times X} = \overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n = \underbrace{\bar{X} + \bar{X} + \dots + \bar{X}}_n$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe.

$$\text{T8.4.} \quad (\bar{X})^n = \underbrace{\bar{X} \cdot \bar{X} \cdot \dots \cdot \bar{X}}_n$$

Dow. Niech $\mathfrak{N}_1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Stąd $\bar{\mathfrak{N}}_1 = n$. Z D8.3 wynika, że zbiór $X^{\mathfrak{N}_1}$ jest zbiorem wszystkich ciągów $x_1, x_2, \dots, x_n$, których wyrazy są elementami zbioru X , w myśl zaś D5.1 zbiór $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$ jest zbiorem wszystkich ukła-

dów uporządkowanych $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, przy czym $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Widoczne jest, że relacja przyporządkowująca ciągowi $x_1, x_2, \dots, x_n$ układ uporządkowany $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ustala równoliczność zbiorów $X^{\mathfrak{N}_1}$ i $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$. Stąd

oraz z D8.2 i D8.4 wynika twierdzenie.

$$\text{T8.5.} \quad \overline{\bar{X}^{\bar{Y} + \bar{Z}}} = \bar{X}^{\bar{Y}} \cdot \bar{X}^{\bar{Z}}$$

Dowód, który podajemy, zawiera liczne skróty.

Dow. W myśl L7.4 możemy założyć, że

$$(1) \quad Y \cdot Z = 0$$

Niech R będzie dowolną funkcją odwzorowującą zbiór $Y + Z$ w zbiór X . Stąd, ze wzoru (1) oraz D6.7 i D8.3 wynikają wzory

$$R_Y \in X^Y$$

$$R_Z \in X^Z$$

Niech relacja S przyporządkowuje funkcji R parę uporządkowaną $\langle R_Y, R_Z \rangle$. Relacja S ustala równoliczność zbiorów X^{Y+Z} i $X^Y \times X^Z$. Stąd wynika już, jak widać, dowodzone twierdzenie.

Następne twierdzenie podajemy bez dowodu.

$$\text{T8.6.} \quad (\bar{X}^{\bar{Y}})^{\bar{Z}} = \bar{X}^{\bar{Y} \cdot \bar{Z}}$$

Twierdzenia arytmetyki liczb kardynalnych, które podaliśmy w tym paragrafie, są analogiczne do twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych. W dalszych paragrafach poznamy jednak twierdzenia nie mające tej własności. Zauważmy jeszcze, że nie zostały podane definicje działań odwrotnych: odejmowania i dzielenia. Powody, dla których w teorii mnogości nie definiujemy tych działań, zostaną również podane w dalszych paragrafach.

Ćwiczenia

1. Udowodniś następujące wzory:

- $m + 0 = m$
- $m \cdot 1 = m$
- $m \cdot 0 = 0$
- $m^1 = m$
- $1^m = 1$
- $(\bar{X} \cdot \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = \bar{X} \cdot (\bar{Y} \cdot \bar{Z})$

§ 9. NIERÓWNOŚCI

$$\text{L9.1.} \quad X \sim X_1 \wedge Y \sim Y_1 \wedge \sum_{Z \in F} (X \sim Z) \rightarrow \sum_{U \in F_1} (X_1 \sim U)$$

Dow. (1)	$X \sim X_1$	
(2)	$Y \sim Y_1$	{zal.}
(3)	$\sum_{Z \in F} X \sim Z$	
(4)	$R_1 \in 1-1$	{D7.2, 2}
(5)	$Y \sim_{R_1} Y_1$	
(6)	$Y_1 = R_1(Y)$	{L7.2, 5}
(7)	$Z_1 \subset Y$	{3}
(8)	$X \sim Z_1$	
(9)	$R_1(Z_1) \subset R_1(Y)$	{T6.1a, 7}
(10)	$R_1(Z_1) \subset Y_1$	{9, 6}
(11)	$Y = D_1(R_1)$	{D7.1, 5}
(12)	$Z_1 \subset D_1(R_1)$	{7, 11}
(13)	$Z_1 \sim_{R_1 Z_1} R_1(Z_1)$	{L7.3, 4, 12}
(14)	$Z_1 \sim_{R_1} R_1(Z_1)$	{D7.2, 4, 13}
(15)	$X_1 \sim_{R_1} R_1(Z_1)$	{T7.1b, c, 1, 8, 14}
	$\sum_{U \in F_1} X_1 \sim U$	{10, 15}

Zdefiniujemy relacje nieostrej i ostrej nierówności. Relacje te oznaczymy symbolami zaczerpniętymi z arytmetyki liczb „zwykłych“.

$$\text{D9.1.} \quad \bar{X} \leq \bar{Y} = \sum_{Z \in F} X \sim Z$$

Na to więc, by moc zbioru X była mniejsza lub równa mocy zbioru Y , potrzeba i wystarcza, by zbiór X był równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru Y . Zauważmy, że z L9.1 wynika: Jeśli $\bar{X} = \bar{X}_1$, $\bar{Y} = \bar{Y}_1$ i $\bar{X} \leq \bar{Y}$, to również $\bar{X}_1 \leq \bar{Y}_1$.

* Przypominamy, że 0 jest mocą zbioru pustego.

Dokładna postać D9.1 jest następująca:

$$m \leq n \equiv \sum_{\bar{X}=m} \sum_{\bar{Y}=n} \sum_{Z \subset Y} X \sim Z$$

Z D9.1 i T7.1a wynika

Wniosek 9.1. $X \subset Y \rightarrow \bar{X} \leq \bar{Y}$

Zauważmy jeszcze, że zastąpienie pod kwantyfikatorem wyrażenia $Z \subset Y$ przez wyrażenie $Z \subsetneq Y$ nie pozwoliłoby zastąpić znaku $\leq$ przez znak $<$, gdyż np. zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od jakiejś określonej liczby jest częścią właściwą zbioru wszystkich liczb naturalnych, a jednak moce tych zbiorów są równe *.

D9.2. $\bar{X} < \bar{Y} \equiv \bar{X} \leq \bar{Y} \wedge \bar{X} \neq \bar{Y}$

Łatwo spostrzec, że obie zdefiniowane relacje są uogólnieniami odpowiednich relacji arytmetyki liczb naturalnych.

L9.2. $\bar{X} = \bar{Y} \rightarrow \bar{X} \leq \bar{Y}$

Dow. (1) $\bar{X} = \bar{Y}$ {zał.}
 (2) $X \sim Y$ {A7.1, 1}
 (3) $Y \subset Y$ {T1.4a}
 (4) $\sum_{Z \subset Y} X \sim Z$ {2, 3}
 $\bar{X} \leq \bar{Y}$ {D9.1, 4}

D9.2 i L9.2 można zanotować również w następującej postaci:

$$m < n \equiv m \leq n \wedge m \neq n$$

$$m = n \rightarrow m \leq n$$

Na podstawie tych wzorów i tezy rachunku zdań

$$(r \equiv p \wedge \sim q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q \vee r)]$$

stwierdzamy prawdziwość

T9.1. $m \leq n \equiv m = n \vee m < n$

T9.2a. $X_2 \subset X_1 \subset X \wedge X \sim X_2 \rightarrow X \sim X_1$ **

Dow. (1) $X_2 \subset X_1 \subset X$ {zał.}
 (2) $X \sim X_2$
 (3) $S \in 1-1$
 (4) $D_u(S) = X$ {D7.2, D7.1, L7.2, 2}
 (5) $X_2 = S(X)$
 (6) $S(X) \subset X_1$ {5, 1}

* Por. ćwiczenie 1b, § 7.

** Wyrażenie $X_2 \subset X_1 \subset X$ jest skrótem koniunkcji $X_2 \subset X_1 \wedge X_1 \subset X$.

Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg zbiorów:

(7) $Z_1 = X_1 - S(X)$
 (8) $\prod_{i \in \mathbb{N}} Z_{i+1} = S(Z_i)$
 (9) $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ {oznacz.}
 (10) $X_1 = Z_1 + S(X)$ {wzór 8c na str. 150, 6, 7}
 (1.1) $Z_i \subset X_1$ {z. dow.}
 (1.2) $S(Z_i) \subset S(X_1)$ {T6.1a, 1.1}
 (1.3) $S(X_1) \subset S(X)$ {T6.1a, 1}
 (1.4) $Z_{i+1} \subset X_1$ {8, 1.2, 1.3, 6}
 (11) $\prod_{i \in \mathbb{N}} Z_i \subset X_1$ {7, 1.1 $\rightarrow$ 1.4}
 (12) $Z \subset X_1$ {T4.2a, 11, 9}
 (13) $Z \subset X$ {12, 1}
 (14) $Z = Z_1 + S(Z)$ {T6.1d, 8, 9}
 (15) $R = I_Z + S_{X-Z}$ {Df.}

Wykażemy, że relacja R ustala równoliczność zbiorów X i X_1 .

(16) $D_i(I_Z) = Z$ {wzór 8 na str. 175}
 (17) $D_i(S_{X-Z}) = X - Z$ {L6.5a, 4}
 (18) $D_i(R) = Z + (X - Z) = X$ {L6.9a, 15, 16, 17, 13, wzór 8a na str. 150}
 (19) $D_p(I_Z) = Z$ {wzór 8 na str. 175}
 (20) $D_p(S_{X-Z}) = S(X - Z)$ {L6.5b, 4}
 (21) $S(X - Z) = S(X) - S(Z)$ {L6.3c, D6.6, 3}
 (22) $D_p(R) = Z_1 + S(Z) + [S(X) - S(Z)] = Z_1 + S(X) = X_1$ {L6.9b, 15, 19, 14, 20, 21, 10, 12, wzór 8j na str. 150}
 (23) $I_Z \in 1-1$ {L6.4, $I \in 1-1$ }
 (24) $S_{X-Z} \in 1-1$ {L6.4, 3}
 (25) $(D_i(I_Z)) \cdot (D_i(S_{X-Z})) = Z \cdot (X - Z) = 0$ {16, 17, wzór 1i na str. 149}
 (26) $Z_1 \cdot S(X) = 0$ {wzór 8e na str. 150, 7}
 (27) $(D_p(I_Z)) \cdot (D_p(S_{X-Z})) = (Z_1 + S(Z)) \cdot (S(X) - S(Z)) = 0$ {19, 14, 20, 21, 26, wzór 8i na str. 150}
 (28) $R \in 1-1$ {T6.5, 15, 23, 24, 25, 27}
 (29) $X \sim_R X_1$ {D7.1, 28, 18, 22}
 $X \sim X_1$ {D7.2, 29}

T9.2b.

$$m \leq n \wedge n \leq m \rightarrow m = n$$

Dow. (1)	$m \leq n$	{zał.}
(2)	$n \leq m$	
(3)	$\overline{X} = m \wedge \overline{Y} = n$	(oznacz., T7.2c)
(4)	$X_1 \subset X$	{D9.1, 2, 3}
(5)	$Y \sim X_1$	
(6)	$\overline{Y} = \overline{X_1}$	{A7.1, 5}
(7)	$\overline{X} \leq \overline{X_1}$	{1, 3, 6}
(8)	$X_2 \subset X_1$	{D9.1, 7}
(9)	$X \sim X_2$	
(10)	$X \sim X_1$	{T9.2a, 8, 4, 9}
	$m = n$	{10, 3, 6}

Twierdzenie T9.2b nosi nazwę twierdzenia Cantora-Bernsteina.

T9.3a.	$m < n \rightarrow m \neq n$
b.	$n < m \rightarrow m \neq n$
c.	$m = n \rightarrow \sim(m < n)$
d.	$m = n \rightarrow \sim(n < m)$
e.	$m < n \rightarrow \sim(n < m)$

Dow. Wzory a i b wynikają z D9.2. Ze wzorów tych przez transpozycję otrzymujemy wzory c i d.

Podajemy dowód wzoru e:

(1)	$m < n$	{zał.}
(2)	$n < m$	{z. d. n.}
(3)	$m \neq n$	{D9.2; 1}
(4)	$m \leq n$	
(5)	$m = n$	{D9.2, T9.2b, 2,4}
sprz.		{3,5}

T9.4. $m \leq n \vee n \leq m$

Pominiemy dowód tego twierdzenia, ograniczając się do wskazania jego zasadniczej myśli. Niech $\overline{X} = m$ i $\overline{Y} = n$. Aby udowodnić T9.4, należy wykazać, że zawsze bądź istnieje taki podzbiór U zbioru Y i taka relacja R , że $X \sim_R U$, bądź istnieje taki podzbiór Z zbioru X i taka relacja S , że $Y \sim_S Z$. Do wykazania tego nie wystarczą jednak przyjęte dotąd założenia, lecz konieczny jest nowy aksjomat, tzw. aksjomat wyboru, którego sformułowanie podamy w § 14.

Z T9.4 i T9.1 wynika, że dla każdych dwóch liczb kardynalnych spełniony jest jeden ze związków:

$$m < n, \quad n < m, \quad m = n$$

z T9.3 wynika, że zachodzić może co najwyżej jeden z tych związków. Fakt ten formułujemy krótko: dla liczb kardynalnych spełniona jest zasada trycho-
tomii.

Stąd, że $\kappa_0 = \overline{\mathbb{N}}$ i $c = \overline{\mathbb{R}}$, oraz z wniosku 9.1 i D9.2 wynika

T9.5a.	$\kappa_0 \leq c$
b.	Jeśli n jest liczbą naturalną, to $n < \kappa_0$

Z następującego lematu skorzystamy w dalszych paragrafach:

L9.3a.	$m < n \rightarrow m \cdot \aleph \leq n \cdot \aleph$
b.	$m < n \rightarrow m^{\aleph} \leq n^{\aleph}$

Dow. a. (1)	$m < n$	{zał.}
(2)	$\overline{X_1} = m \wedge \overline{Y_1} = n \wedge \overline{T_1} = \aleph$	{T7.2c}
(3)	$Z_1 \subset Y_1 \wedge Y_1 \sim Z_1$	{D9.2, D9.1, 1,2}
(4)	$\overline{Z_1} = m$	{A7.1, 3, 2}
(5)	$Z_1 \times T_1 \subset Y_1 \times T_1$	{T5.1d, 3}
(6)	$\overline{Z_1 \times T_1} \leq \overline{Y_1 \times T_1}$	{wniosek 9.1, 5}
	$m \cdot \aleph \leq n \cdot \aleph$	{D8.2, 2, 4, 6}

W analogicznym dowodzie wzoru b korzystamy z wniosku 8.1.

Ćwiczenia

1. Udowodnić wzory:

- $\overline{X} < \overline{Y} \rightarrow \overline{X} + \overline{Z} \leq \overline{Y} + \overline{Z}$
- $\sim(n < n)$
- $m < n \wedge n < \aleph \rightarrow m < \aleph$
- $m \leq n \wedge n \leq \aleph \rightarrow m \leq \aleph$

Wykazać na przykładach, że w następniku implikacji a) nie można zastąpić nierówności nieostrej nierównością ostrą.

2. Udowodnić następujące twierdzenie:

$$\kappa_0 < \overline{X} = \sum_{Y \subset X} \overline{Y} = \kappa_0$$

§ 10. ZBIÓR POTĘGOWY

D10.1. $X \in 2^Y \equiv X \subset Y$

Zbiór 2^Y nazywamy zbiorem potęgowym. Elementami zbioru potęgowego 2^Y są więc wszystkie podzbiory zbioru Y .

L10.1. $\overline{M} \leq (2^{\overline{M}})$

Dow. Niech M_1 będzie rodziną wszystkich zbiorów jednostkowych $\{m\}$, których jedyny element m należy do M , i tylko takich zbiorów, a więc

$$\{m\} \in M_1 \equiv m \in M$$

Widoczne jest, że każdy ze zbiorów $\{m\}$ jest podzbiorem zbioru M . Stąd

$$M_1 \subset 2^M \quad (1)$$

Oznaczmy przez R_1 relację przyporządkowującą każdemu elementowi m zbioru M zbiór jednoelementowy $\{m\}$. Łatwo widzieć, że relacja ta ustala równoliczność zbiorów M i M_1 . Stąd, ze wzoru (1) i wniosku 9.1 wynika lemat.

Niech R będzie dowolną funkcją przyporządkowującą indywiduom zbiory indywiduów. Określimy zbiór $Z(R)$ zależny od funkcji R :

$$D10.2. \quad R \in \text{funke} \rightarrow [x \in Z(R) \equiv x \in D_l(R) \wedge x \bar{\in} R(x)]$$

Element x lewej dziedziny relacji R należy więc do zbioru $Z(R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest elementem zbioru, który jest mu przyporządkowany przez funkcję R . Z definicji tej skorzystamy w dowodach dalszych lematów.

$$L10.2. \quad R \in \text{funke} \rightarrow Z(R) \bar{\in} D_p(R)$$

Dow. (1) $R \in \text{funke}$ {zał.}
(2) $Z(R) \in D_p(R)$ {z. d. n.}

Ze wzoru (2) wynika istnienie elementu x_1 lewej dziedziny relacji R , któremu przyporządkowany jest zbiór $Z(R)$. Spełnione są więc wzory:

- (3) $x_1 \in D_l(R)$
(4) $Z(R) = R(x_1)$
(5) $x_1 \in Z(R) \equiv x_1 \bar{\in} R(x_1)$ {D10.2, 1, 3}
(6) $x_1 \in Z(R) \equiv x_1 \bar{\in} Z(R)$ {5, 4}

Widoczne jest, że ze wzoru (6) wynika sprzeczność.

$$L10.3. \quad \bar{M} \neq (\bar{2}^M)$$

Dow. (1) $\bar{M} = (\bar{2}^M)$ {z. d. n.}
(2) $M \sim_{R_1} 2^M$ {A7.1, D7.2, 1}
(3) $R_1 \in \text{funke}$
(4) $D_l(R_1) = M$ {D7.1, 2}
(5) $D_p(R_1) = 2^M$
(6) $Z(R_1) \subset D_l(R_1)$ {D10.2, 3}
(7) $Z(R_1) \subset M$ {6, 4}
(8) $Z(R_1) \in 2^M$ {D10.1, 7}
(9) $Z(R_1) \in D_p(R_1)$ {8, 5}
(10) $Z(R_1) \bar{\in} D_p(R_1)$ {L10.2, 3}
sprz. {9, 10}

T10.1.

$$\bar{M} < (\bar{2}^M)$$

{D9.2, L10.1, L10.3}

Moc dowolnego zbioru jest więc mniejsza od mocy zbioru wszystkich jego podzbiorów.

Podajemy definicję potrzebną do dowodu następnego twierdzenia.

D10.3. Niech M będzie dowolnym zbiorem i niech $A \subset M$. Funkcję $\varphi_A(m)$ nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ta dla każdego $m \in M$ spełnia warunek:

$$\varphi_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \in A \\ 0, & \text{gdy } m \bar{\in} A \end{cases}$$

T10.2.

$$2^{\bar{M}} = (\bar{2}^M)$$

Dow. Z D8.3 i D10.3 wynika, że każda funkcja charakterystyczna zbioru $A \subset M$ jest odwzorowaniem zbioru M w zbiór $\{0, 1\}$, i odwrotnie: każde odwzorowanie zbioru M w zbiór $\{0, 1\}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru zbioru M . Przyporządkujmy każdemu odwzorowaniu zbioru M w zbiór $\{0, 1\}$ ten podzbiór zbioru M , którego funkcją charakterystyczną jest to odwzorowanie. Łatwo spostrzec, że przyporządkowanie to ustala równoliczność zbioru $\{0, 1\}^M$ wszystkich odwzorowań zbioru M w zbiór $\{0, 1\}$ i zbioru 2^M wszystkich podzbiorów zbioru M . Spełniony jest więc wzór:

- (1) $\{0, 1\}^M \sim 2^M$
(2) $\{0, 1\}^{\bar{M}} = (\bar{2}^M)$ {A7.1, 1}
(3) $\{0, 1\}^{\bar{M}} = \{0, 1\}^{\bar{M}} = 2^{\bar{M}}$ {D8.4}
 $2^{\bar{M}} = (\bar{2}^M)$ {2, 3}

T10.3.

$$\bar{M} < 2^{\bar{M}}$$

{T10.1, T10.2}

Twierdzenie to można zanotować też w postaci:

$$m < 2^m$$

T10.4. Istnieje nieskończenie wiele (różnych) liczb kardynalnych, z których żadna nie jest liczbą naturalną.

Dow. Dla wykazania prawdziwości tego twierdzenia wystarczy zauważyć, że w myśl T10.3 każdy element ciągu

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{(2^{\aleph_0})}, \dots$$

jest mniejszy od następnego.

Ćwiczenia

1. Udowodnić drogą indukcji następujące twierdzenie:

$$n \in \mathcal{R} \wedge n = \bar{M} \rightarrow 2^n = (\bar{2}^M)$$

2. Niech ciąg

$$m_1, m_2, \dots$$

będzie dowolnym ciągiem liczb kardynalnych, takim, że dla każdego i : $m_i \leq m_{i+1}$, i niech $M_1, M_2, \dots$ będzie ciągiem zbiorów spełniających dla każdego i warunek: $\overline{M_i} = m_i$. Udo-
wodnić, że moc zbioru $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ jest większa od każdej z liczb $m_1, m_2, \dots$

§ 11. ZBIORY NIESKOŃCZONE W SENSIE DEDEKINDA

Zwykle rozumiemy pojęcie nieskończoności zbioru w ten sposób, że zbiorami nieskończonymi są te i tylko te zbiory niepuste, których moc jest różna od każdej liczby naturalnej. Podamy definicję zbioru nieskończonego, w której nie wystąpi pojęcie liczby naturalnej*. Definicja ta pochodzi od matematyka niemieckiego R. Dedekinda.

D11.1. X jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda $\equiv \sum_{Y \subsetneq X} Y \sim X$

Na to więc, by zbiór był nieskończony w sensie Dedekinda, potrzeba i wystarczy, aby był równoliczny z pewną swą częścią właściwą.

D11.2. Moce zbiorów nieskończonych w sensie Dedekinda nazywamy liczbami kardynalnymi pozaskończonymi.

Widoczne jest, że moc dowolnego zbioru nieskończonego w sensie Dedekinda jest różna od zera i każdej liczby naturalnej. Nasuwa się pytanie, czy i odwrotnie, dowolny zbiór, którego moc jest różna od zera i każdej liczby naturalnej, jest nieskończony w sensie Dedekinda. Twierdzenie to wydaje się najzupełniej oczywiste. Dla dowodu jednak tego twierdzenia konieczny jest nowy pewnik (tzw. pewnik wyboru), o którym będzie mowa w § 14.

W dowodzie następującego lematu skorzystamy z czterech twierdzeń algebry zbiorów (por. ćwiczenia 8c, d, e, f, § 1):

$$\text{I. } Y \subset X \wedge Z = X - Y \rightarrow X = Z + Y$$

$$\text{II. } X \subsetneq Y \wedge Y \cdot Z = 0 \rightarrow Z + X \subsetneq Z + Y$$

$$\text{III. } Z = X - Y \rightarrow Y \cdot Z = 0$$

$$\text{IV. } X \subset Y \wedge Y \cdot Z = 0 \rightarrow X \cdot Z = 0$$

$$\text{L11.1. } P \subset X \wedge \overline{P} = \kappa_0 \rightarrow \sum_{Y \subsetneq X} X \sim Y$$

$$\text{Dow. (1) } \left. \begin{array}{l} P \subset X \\ \overline{P} = \kappa_0 \end{array} \right\} \quad \{\text{zał.}\}$$

Z (2) i T7.3 wynika istnienie ciągu nieskończonego

$$(a) \quad p_1, p_2, p_3, \dots,$$

* Znaczenie faktu, że pojęcie zbioru nieskończonego może być określone bez powoływania się na pojęcie liczby naturalnej, uwidoczniają rozważania § 6 „Dodatku”.

którego zapasem jest zbiór P i w którym żaden wyraz nie powtarza się. Oznaczmy przez P_1 zapas ciągu

$$(b) \quad p_2, p_4, p_6, \dots$$

Widoczne jest, że

$$(3) \quad P_1 \subsetneq P$$

Łatwo też dostrzec, że relacja przyporządkowująca każdemu elementowi ciągu (a) element ciągu (b) o dwa razy większym wskaźniku ustala równoliczność zbiorów P i P_1 . Prawdziwy jest więc wzór:

$$\begin{array}{ll} (4) & P \sim P_1 \\ (5) & Z = X - P \\ (6) & X_1 = Z + P_1 \\ (7) & X = Z + P \\ (8) & P \cdot Z = 0 \\ (9) & P_1 \cdot Z = 0 \\ (10) & Z + P \sim Z + P_1 \\ (11) & X \sim X_1 \\ (12) & X_1 \subsetneq X \\ & \sum_{Y \subsetneq X} X \sim Y \end{array} \quad \begin{array}{l} \{\text{oznacz.}\} \\ \{\text{I, 1, 5}\} \\ \{\text{III, 5}\} \\ \{\text{IV, 3, 8}\} \\ \{\text{L7.5a, T7.1a, 4, 8, 9}\} \\ \{\text{10, 6, 7}\} \\ \{\text{II, 3, 8, 6, 7}\} \\ \{\text{11, 12}\} \end{array}$$

$$\text{L11.2. } \sum_{Y \subsetneq X} (X \sim Y) \rightarrow \sum_{P \subset X} (\overline{P} = \kappa_0)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & \sum_{Y \subsetneq X} X \sim Y \quad \{\text{zał.}\} \\ (2) & Y_1 \subsetneq X \\ (3) & X \sim Y_1 \\ (4) & X \sim_{R_1} Y_1 \\ (5) & R_1 \in 1-1 \wedge X = D_l(R_1) \wedge Y_1 = D_p(R_1) \\ (6) & R_1 \in \text{funkc} \end{array} \quad \begin{array}{l} \{1\} \\ \{\text{D7.2, 3}\} \\ \{\text{D7.1, 4}\} \\ \{\text{D6.6, 5}\} \end{array}$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in X$ symbol $R_1(x)$ ma sens {D6.3, 5, 6}.

Oznaczmy przez p_1 dowolny taki element, że

$$(7) \quad p_1 \in X \wedge p_1 \bar{\in} Y_1$$

Istnienie takiego elementu gwarantuje wzór (2).

$$\begin{array}{ll} (8) & x \in D_l(R_1) \rightarrow R_1(x) \in D_p(R_1) \\ (9) & x \in X \rightarrow R_1(x) \in Y_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \{\text{wniosek 6.3e, 6}\} \\ \{8, 5\} \end{array}$$

Ciąg

$$(a) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

określamy w następujący sposób:

wyraz p_1 został już określony

{por. (7)}

$$(10) \quad k > 1 \rightarrow p_k = R_1(p_{k-1})$$

Ze wzorów (7), (9), (10) i (2) na drodze indukcji wynika:

$$(11) \quad p_i \in X \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

{7, 9, 10, 11}

$$(12) \quad r > s \wedge s = 1 \rightarrow p_r \neq p_s$$

{z. dow.}

$$(2.1) \quad r > s \wedge s > 1 \left\{ \right.$$

$$(2.2) \quad p_{r-1} \neq p_{s-1} \left\{ \right.$$

{L6.3b, 11, 5, 2.2}

$$(2.3) \quad R_1(p_{r-1}) \neq R_1(p_{s-1})$$

{2.1, 2.3, 10}

$$(2.4) \quad p_r \neq p_s$$

Z (12) i stąd, że ze wzorów (2.1) i (2.2) wynika wzór (2.4), otrzymujemy drogą indukcji

$$(13) \quad r > s \rightarrow p_r \neq p_s$$

W ciągu (a) nie powtarzają się więc wyrazy. Oznaczmy przez P zapas tego ciągu. Na podstawie T7.3 otrzymujemy:

$$(14) \quad \overline{P} = \aleph_0$$

$$(15) \quad P \subset X$$

{11}

$$\sum_{P \subset X} \overline{P} = \aleph_0$$

{14, 15}

T11.1. Zbiór X jest nieskończony w sensie Dedekinda $\equiv \sum_{P \subset X} \overline{P} = \aleph_0$ {L11.1, L11.2, D11.1}

Na to więc, aby zbiór był nieskończony w sensie Dedekinda, potrzeba i wystarczy, aby miał część przeliczalną.

Z T11.1, D11.2 i wniosku 9.1 wynika

Wniosek 11.1. Liczba kardynalna m jest pozaskończona $\equiv \aleph_0 \leq m$

Stąd zaś i z T9.5a wynika

Wniosek 11.2. Liczby kardynalne $\aleph_0$ i c są pozaskończone.

L11.3. $\overline{X} = \overline{Y} = \aleph_0 \rightarrow \overline{X+Y} = \aleph_0$

Dow. Dla udowodnienia lematu wystarczy przyjąć, że zbiorem X jest zbiór wszystkich liczb naturalnych nieparzystych, zbiorem zaś Y — zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych.

L11.4. $\overline{X} = \aleph_0 \wedge \overline{Y} = n \rightarrow \overline{X+Y} = \aleph_0$

Dow. Dla udowodnienia lematu wystarczy przyjąć, że elementami zbioru Y są liczby: 1, 2, ..., n , elementami zaś zbioru X liczby: $n+1, n+2, \dots$

T11.2. Jeśli X jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda i $\overline{Y} = n^*$

* n oznacza tu dowolną liczbę naturalną.

lub $\overline{Y} = \aleph_0$, to

$$(1) \quad \overline{X+Y} = \overline{X}$$

Dow. Z T11.1 wynika istnienie przeliczalnej części P zbioru X . Z L11.3 i L11.4 wynika, że

$$(2) \quad P \sim P+Y$$

Spełniony jest też — oczywiście — wzór

$$(3) \quad X-P \sim X-P$$

Możemy założyć, że

$$(4) \quad X \cdot Y = 0$$

Ze wzorów (2), (3) i (4) oraz L7.5a wynika

$$\overline{(X-P)+P} = \overline{(X-P)+(P+Y)}$$

stąd zaś wynika

$$\overline{X} = \overline{X+Y}$$

Wzór (1) jest więc prawdziwy.

T11.3. Jeśli $\overline{Y} = n^*$ lub $\overline{Y} = \aleph_0$ i $X-Y$ jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda, to

$$(1) \quad \overline{X-Y} = \overline{X}$$

Dow. Z T11.2 i założeń wynika, że

$$(2) \quad \overline{(X-Y)+Y} = \overline{X-Y}$$

Widoczne jest, że

$$X \subset (X-Y)+Y$$

Stąd i z wniosku 9.1 otrzymujemy

$$\overline{X} \leq \overline{(X-Y)+Y}$$

Z tego wzoru i wzoru (2) wynika

$$(3) \quad \overline{X} \leq \overline{X-Y}$$

Odwołując się raz jeszcze do wniosku 9.1 otrzymujemy

$$\overline{X-Y} \leq \overline{X}$$

Stąd, ze wzoru (3) i T9.2 otrzymujemy równość (1).

Ostatnim dwóm twierdzeniom możemy nadać następujące słowne brzmienie:

Moc zbioru nieskończonego w sensie Dedekinda nie ulega zmianie, gdy dołączymy do tego zbioru dowolną skończoną lub przeliczalną ilość elementów.

* n oznacza tu dowolną liczbę naturalną.

Moc zbioru nie ulega zmianie, gdy wyjmemy z niego dowolną skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, o ile tylko otrzymany w ten sposób zbiór jest nieskończony w sensie Dedekinda.

Oczywiste jest, że wtedy zbiór, z którego wyjmujemy skończoną lub przeliczalną liczbę elementów, jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda.

§ 12. LICZBY KARDYNALNE $\aleph_0$ I c

Przypominamy, że liczby kardynalne $\aleph_0$ i c określone są przez wzory:

$$\aleph_0 = \overline{\mathbb{N}}$$

$$c = \overline{\mathbb{R}},$$

gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, $\mathbb{R}$ — zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Przypominamy też, że liczby $\aleph_0$ i c są pozaskończone (wniosek 11.2).

Następujące twierdzenie, podane przez Cantora, jest jednym z najwcześniejszych chronologicznie twierdzeń teorii mnogości. W dowodzie tego twierdzenia, nie różniącym się prawie od dowodu Cantora, skorzystamy z twierdzeń arytmetyki teoretycznej.

T12.1. $\aleph_0 \neq c$

Dow. (1) $\aleph_0 = c$

{z. d. n.}

Stąd oraz z T7.3 wynika istnienie ciągu

(a) $x_1, x_2, x_3, \dots,$

w którym wyrazy nie powtarzają się i którego zapasem jest zbiór $\mathbb{R}$.

Z twierdzeń arytmetyki teoretycznej wynika, że każda liczba rzeczywista ma dokładnie jedno rozwinięcie właściwe* na ułamek dziesiętny nieskończony. Oczywiście jest, że wszystkie cyfry rozwinięcia, zaczawszy od pewnego miejsca, mogą być równe cyfrze 0.

Piszemy rozwinięcia właściwe liczb ciągu (a):

$$x_1 = c_1, y_{11}y_{12}y_{13} \dots y_{1n} \dots$$

$$x_2 = c_2, y_{21}y_{22}y_{23} \dots y_{2n} \dots$$

$$x_3 = c_3, y_{31}y_{32}y_{33} \dots y_{3n} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = c_n, y_{n1}y_{n2}y_{n3} \dots y_{nn} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

* Rozwinięciem niewłaściwym nazywamy rozwinięcie, w którym począwszy od pewnego miejsca występuje tylko cyfra 9. Rozwinięciem właściwym nazywamy każde rozwinięcie nie będące rozwinięciem niewłaściwym.

Symbole

$$c_1, c_2, \dots$$

oznaczają tu części całkowite liczb $x_1, x_2, \dots$. Symbol y_{ij} oznacza j -tą po przecinku cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby x_i .

Określamy ciąg

$$z_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } y_{nn} \neq 1 \\ 2, & \text{gdy } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Widoczne jest, że

(2) $0, z_1 z_2 z_3 \dots$

jest rozwinięciem właściwym na ułamek dziesiętny nieskończony pewnej liczby rzeczywistej. Łatwo dostrzec, że dla każdego naturalnego n , n -ta cyfra rozwinięcia (2) jest różna od n -tej cyfry rozwinięcia liczby x_n . Liczba (2) jest więc różna od każdej liczby ciągu (a). Wniosek ten jest sprzeczny z otrzymanym poprzednio wnioskiem, że zapasem ciągu (a) jest zbiór $\mathbb{R}$. Założenie (1) prowadzi więc do sprzeczności.

Z D.9.2, T9.5a i T12.1 wynika nierówność $\aleph_0 < c$.

T12.2 $X \subset \mathbb{R} \wedge \overline{X} = \aleph_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R} - X} = c$

Moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych nie ulega więc zmianie, gdy wyjmemy z niego przeliczalną liczbę elementów.

Dow. (1) $X \subset \mathbb{R}$
(2) $\overline{X} = \aleph_0$

{zał.}

Z T7.3 oraz (1) i (2) wynika istnienie ciągu

(a) $x_1, x_2, x_3, \dots$

różnych liczb rzeczywistych, którego zapasem jest zbiór X . Podobnie jak w dowodzie T12.1 wnioskujemy o istnieniu liczby rzeczywistej z_1 , różnej od każdego wyrazu ciągu (a). Stąd

$$z_1 \in \mathbb{R} - X$$

Liczbę rzeczywistą z_2 wyznaczamy jako liczbę różną od każdej liczby ciągu

$$z_1, x_1, x_2, \dots$$

Postępując dalej w ten sposób otrzymujemy ciąg nieskończony

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

różnych liczb rzeczywistych, z których każda jest elementem zbioru $\mathbb{R} - X$. W myśl więc T7.3 i T11.1 zbiór ten jest nieskończony w sensie Dedekinda. Stąd, ze wzoru (2) i T11.3 wynika

$$\overline{\mathbb{R} - X} = \overline{\mathbb{R}} = c$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe.

$$\text{L12.1.} \quad E_x(-1 < x < 1) \sim \mathcal{R}^*$$

Równoliczność zbiorów $E_x(-1 < x < 1)$ i $\mathcal{R}$ wyznacza relacja

$$x = \frac{y}{1+|y|} \wedge y \in \mathcal{R}$$

$$\text{L12.2.} \quad a < b \rightarrow E_x(a < x < b) \sim E_y(-1 < y < 1)$$

Dow. Równoliczność zbiorów $E_x(a < x < b)$ i $E_y(-1 < y < 1)$ ustala relac

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2} \wedge -1 < y < 1$$

$$\text{T12.3.} \quad a < b \rightarrow \overline{E_x(a < x < b)} = c \quad \{\text{L12.1, L12.2}\}$$

Każdy przedział niepusty liczb rzeczywistych jest więc zbiorem mocy c .

W następujących wzorach litera n oznacza dowolną liczbę naturalną.

$$\text{T12.4a.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b.} \quad \kappa_0 + n = \kappa_0 \\ \text{c.} \quad \kappa_0 + \kappa_0 = \kappa_0 \\ \text{d.} \quad c + n = c \\ \text{e.} \quad c + \kappa_0 = c \\ \quad \quad c + c = c \end{array} \right\} \quad \{\text{wniosek 11.2, T11.2}\}$$

Dow. e. (1) $a < b < c \wedge a, b, c \in \mathcal{R}$ {oznacz.}

$$(2) \quad E_x(a < x < b) + \{b\} + E_x(b < x < c) = E_x(a < x < c) \quad \{1\}$$

$$(3) \quad \overline{E_x(a < x < b) + \{b\} + E_x(b < x < c)} = \overline{E_x(a < x < b) + \{b\}} + \overline{E_x(b < x < c)} \quad \{\text{D8.1, 2}\}$$

$$(4) \quad c = c + 1 + c \quad \{\text{T12.3, 1, 3}\}$$

$$c + c = c \quad \{\text{T12.4c, 4}\}$$

Z T12.3 i T12.4c wynika

$$\text{Wniosek 12.1a.} \quad a < b \rightarrow \overline{E_x(a < x < b)} = c$$

$$\text{b.} \quad a < b \rightarrow \overline{E_x(a < x \leq b)} = c$$

$$\text{c.} \quad a < b \rightarrow \overline{E_x(a \leq x < b)} = c$$

* Symbol $E_x(-1 < x < 1)$ oznacza przedział otwarty o krawcach -1 i 1 , czyli wszystkich liczb rzeczywistych zawartych między tymi liczbami, a więc zbiór, który oznaczony jest zwykle symbolem $(-1, 1)$.

T12.5. Niech

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

będzie dowolnym ciągiem nieskończonym zbiorów parami rozłącznych. Jeśli

$$\overline{Z_i} = \kappa_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

to

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i} = \kappa_0$$

Dow. Niech

$$z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, \dots$$

będzie nieskończonym ciągiem, w którym nie powtarzają się wyrazy i którego zapasem jest zbiór Z_i . Łatwo spostrzec, że wyrazy ciągu

$$z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(1)}, z_1^{(3)}, z_2^{(2)}, z_3^{(1)}, z_1^{(4)}, \dots$$

nie powtarzają się i że zapasem tego ciągu jest zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Stąd i z T7.3 wynika twierdzenie.

L12.3. Jeśli suma przeliczalnej ilości zbiorów skończonych jest nieskończona, to jest przeliczalna.

Dowód tego lematu, analogiczny do dowodu T12.5, pozostawiamy czytelnikowi.

L12.4. Zbiór wszystkich ciągów skończonych, których wyrazami są liczby

$$(1) \quad 0, 1, \dots, n$$

jest przeliczalny.

Dow. Niech Z_i ($i = 1, 2, \dots$) będzie zbiorem wszystkich ciągów i -elementowych, których wyrazami są liczby (1). Widoczne jest, że dla każdego i zbiór Z_i jest skończony, suma zaś wszystkich tych zbiorów jest nieskończona. Stąd i z L12.3 wynika lemat.

$$\text{T12.6.} \quad \kappa_0 \cdot \kappa_0 = \kappa_0$$

Dow. Oznaczmy przez P zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle m, n \rangle$, których elementami są liczby naturalne, przez P_i ($i = 2, 3, \dots$) zbiór wszystkich takich par, spełniających dodatkowo warunek $m + n = i$. Widoczne jest, że

$$P = \bigcup_{i=2}^{\infty} P_i$$

oraz że zbiór P jest nieskończony. Łatwo też spostrzec, że zbiory $P_2, P_3, \dots$ są skończone. Stąd i z L12.3 wynika, że

$$(1) \quad \overline{P} = \kappa_0$$

Z drugiej strony, z określenia zbioru P i z D8.2 wynika, że

$$(2) \quad \overline{P} = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \\ \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad \{1, 2\}$$

T12.7. Jeśli n jest liczbą naturalną ≥ 2 , to $n^{\aleph_0} = c$.

Dowód przeprowadzimy w przypadku $n = 10$. Dowód ogólny nie różni się istotnie od dowodu w tym szczególnym przypadku.

Dow. Oznaczmy przez $\mathfrak{N}_1$ zbiór liczb całkowitych nieujemnych $i \leq 9$, a więc $\overline{\mathfrak{N}_1} = 10$. Stąd i z D8.4 otrzymujemy

$$(1) \quad (\overline{\mathfrak{N}_1})^{\aleph_0} = 10^{\aleph_0}$$

Z D8.3 wynika, że odwzorowanie zbioru $\mathfrak{N}$ w zbiór $\mathfrak{N}_1$ wyznacza jednoznacznie ciąg nieskończony, którego wyrazami są liczby $0, 1, \dots, 9$. Oznaczmy przez C zbiór wszystkich takich ciągów.

Ze wzoru (1) wynika więc

$$(2) \quad \overline{C} = 10^{\aleph_0}$$

Oznaczmy dalej przez C_1 zbiór tych wszystkich ciągów należących do C , w których każdy wyraz, począwszy od pewnego, jest równy 9. Z L12.4 wynika, że

$$(3) \quad \overline{C_1} = \aleph_0$$

Spełniony jest też oczywiście wzór

$$(4) \quad C_1 \subset C$$

Z twierdzeń teorii liczb wynika, że każdemu ciągowi należącemu do $C - C_1$ odpowiada dokładnie jedna liczba przedziału $\mathbb{E}(0 \leq x < 1)^*$. Stąd i z wniosku 12.1a wynika:

$$(5) \quad \overline{C - C_1} = c$$

Ze wzorów (2)-(5) oraz T12.4d wynikają następujące równości:

$$10^{\aleph_0} = \overline{C} = \overline{(C - C_1) + C_1} = \overline{C - C_1} + \overline{C_1} = c + \aleph_0 = c$$

Dowód twierdzenia w przypadku, gdy $n = 10$ został więc zakończony.

* Liczbą tą jest tzw. nieskończony ułamek dziesiętny, którego częścią całkowitą jest liczba 0, kolejnymi zaś cyframi po przecinku są kolejne wyrazy ciągu, któremu przyporządkowany jest dany ułamek. W ułamku tym nie mogą być wszystkie wyrazy, zaczawszy od pewnego, równe 9 (mogą natomiast być równe 0). W dowodzie ogólnym twierdzenia należałoby tu powołać się na analogiczne twierdzenie teorii liczb, dotyczące rozwijania liczb rzeczywistych na ułamki nieskończone przy dowolnej zasadzie ≥ 2 . Omawiany punkt jest jedynym punktem, w którym podany dowód T12.7 różni się od dowodu ogólnego.

Szczególnym przypadkiem T12.7 jest

$$T12.8 \quad 2^{\aleph_0} = c$$

Z twierdzenia tego wynika, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach 0, 1 ma moc continuum.

Zauważmy, że z twierdzenia tego i T10.3 wynika natychmiast T12.1. Dowód tego twierdzenia, który podaliśmy poprzednio, jest jednak interesujący z tego względu, że zastosowana jest w nim tzw. metoda przekątnej. Przy pomocy tej metody zostało udowodnionych wiele ważnych twierdzeń matematycznych.

W następujących wzorach n oznacza dowolną liczbę naturalną:

$$T12.9a. \quad n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$b. \quad \aleph_0^n = \aleph_0$$

$$c. \quad n \cdot c = c$$

$$d. \quad c \cdot c = c$$

$$e. \quad c^n = c$$

$$f. \quad c^{\aleph_0} = c$$

$$g. \quad \aleph_0 \cdot c = c$$

$$h. \quad \aleph_0^{\aleph_0} = c$$

$$\text{Dow. a. } n \cdot \aleph_0 = \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}_n = \aleph_0 \quad \{T8.3, T12.4b\}$$

$$\text{Dow. b. } \aleph_0^n = \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0}_n = \aleph_0 \quad \{T8.4, T12.6\}$$

$$\text{Dow. c. } n \cdot c = \underbrace{c + c + \dots + c}_n = c \quad \{T8.3, T12.4e\}$$

$$\text{Dow. d. } c \cdot c = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c \quad \{T12.8, T8.5, T12.4b\}$$

$$\text{Dow. e. } c^n = \underbrace{c \cdot c \cdot \dots \cdot c}_n = c \quad \{T8.4, T12.9d\}$$

$$\text{Dow. f. } c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c \quad \{T12.8, T8.6, T12.6\}$$

$$\text{Dow. g. } \begin{aligned} (1) \quad n &< \aleph_0 < c && \{T9.5a, b, D9.2, T12.1\} \\ (2) \quad n \cdot c &\leq \aleph_0 \cdot c \leq c \cdot c && \{L9.3a, 1\} \\ (3) \quad c &\leq \aleph_0 \cdot c \leq c && \{T12.9c, d, 2\} \\ &\aleph_0 \cdot c = c && \{T9.2b, 3\} \end{aligned}$$

W analogicznym dowodzie wzoru h korzystamy z L9.3b.

Z twierdzenia T12.9d wynika, że zbiór par uporządkowanych liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych. Jak wiadomo, zbiór punktów prostej jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, zbiór zaś punktów płaszczyzny jest równoliczny ze zbiorem par uporządkowanych liczb rzeczywistych (będących współrzędnymi tych punktów). W konsekwencji otrzymujemy wniosek, że zbiór punktów płaszczyzny jest równoliczny ze zbior

rem punktów prostej. Istnieje więc odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru punktów płaszczyzny na zbiór punktów prostej. Udowodnienie przez Cantora twierdzenia T12.9d, które wydawało się paradoksalne ze względu na tę konsekwencję, skłoniło matematyków do zbadania odwzorowań płaszczyzny na prostą. W kilka też lat po udowodnieniu T12.9d wykazano, że nie istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne i zarazem ciągle zbioru punktów płaszczyzny na zbiór punktów prostej.

Z T12.9h wynika

Wniosek 12.1. *Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazami są liczby naturalne, ma moc continuum.*

Podobnie z T12.9f wynika

Wniosek 12.2. *Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazami są liczby rzeczywiste, ma moc continuum.*

Zauważmy, że z T12.4a, b wynikają następujące równości:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 3 = \dots = \aleph_0 + \aleph_0$$

Z T12.4c, d, e wynikają zaś równości:

$$c + 1 = c + 2 = c + 3 = \dots = c + \aleph_0 = c + c$$

Sumy liczb kardynalnych mogą więc być równe, gdy pierwsze składniki są równe, drugie zaś nierówne. Działanie odwrotne do dodawania liczb kardynalnych nie jest więc jednoznaczne. Z tego względu nie wprowadzamy do arytmetyki liczb kardynalnych odejmowania.

Z T12.9a i T12.6 wynikają równości:

$$1 \cdot \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = 3 \cdot \aleph_0 = \dots = \aleph_0 \cdot \aleph_0$$

Z T12.9c, d, g wynikają równości:

$$1 \cdot c = 2 \cdot c = 3 \cdot c = \dots = \aleph_0 \cdot c = c \cdot c$$

Działanie odwrotne do mnożenia liczb kardynalnych nie jest więc też jednoznaczne.

Zauważmy jeszcze, że z T12.7 oraz T12.9f, h wynika:

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \dots = \aleph_0^{\aleph_0} = c$$

Widzimy więc, że działanie odwrotne do potęgowania liczb kardynalnych (pierwiastkowanie) nie jest jednoznaczne.

Zauważmy wreszcie, że z T12.9b wynikają równości:

$$\aleph_0^1 = \aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \dots$$

Z T12.9e, f wynikają zaś równości:

$$c^1 = c^2 = c^3 = \dots = c^{\aleph_0}$$

Drugie działanie odwrotne do potęgowania (logarytmowanie) nie jest więc również jednoznaczne.

T12.10. *Zbiór wszystkich ciągów skończonych, których wyrazami są liczby całkowite, jest przeliczalny.*

Dow. Oznaczmy przez $Z_{i,j}$ ($i = 1, 2, 3, \dots; j = 0, 1, 2, \dots$) zbiór wszystkich ciągów i -elementowych, w których największy co do bezwzględnej wartości wyraz równa się j . Widoczne jest, że dla dowolnych i oraz j zbiór $Z_{i,j}$ jest skończony. Z L12.3 wynika, że zbiór $Z_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} Z_{i,j}$ jest przeliczalny. Stąd

i z T12.5 wynika twierdzenie.

T12.11. *Zbiór wszystkich liczb całkowitych ujemnych, zbiór wszystkich liczb całkowitych i zbiór wszystkich liczb wymiernych są zbiorami przeliczalnymi. Zbiór wszystkich liczb zespolonych ma moc continuum.*

Dow. Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej równą jej co do bezwzględnej wartości liczbę ujemną. Widoczne jest, że przyporządkowanie to ustala równoliczność zbioru wszystkich liczb całkowitych ujemnych i zbioru wszystkich liczb naturalnych. Zbiór wszystkich liczb całkowitych ujemnych jest więc przeliczalny.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych jest oczywiście sumą zbioru wszystkich liczb naturalnych, zbioru wszystkich liczb całkowitych ujemnych i zbioru którego jedynym elementem jest liczba 0. Stąd i z T12.4a, b wynika, że zbiór wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny.

Zauważmy, że z D8.2, T12.6 oraz stąd, że zbiór wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny, wynika, że zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszymi elementami są liczby całkowite, drugimi zaś liczby naturalne, jest również przeliczalny.

Każdą liczbę wymierną można zanotować w postaci ułamka nieskracalnego, którego licznik jest liczbą całkowitą, a mianownik liczbą naturalną*. Wynika stąd, że każdej liczbie wymiernej odpowiada dokładnie jedna para uporządkowana, której elementem pierwszym jest liczba całkowita, elementem drugim — liczba naturalna, przy czym liczby te są względnie pierwsze. Zbiór wszystkich takich par jest podzbiorem zbioru wszystkich par uporządkowanych o pierwszym elemencie będącym liczbą całkowitą i drugim elemencie będącym liczbą naturalną, a więc zbioru przeliczalnego. Moc zbioru wszystkich liczb wymiernych jest więc $\leq \aleph_0$. Z drugiej strony, liczba $\aleph_0$ jest mniejsza lub równa mocy zbioru wszystkich liczb wymiernych, gdyż podzbiorem tego zbioru jest zbiór $\mathbb{N}$. Stąd i z T9.2 wynika, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

O tym, że zbiór wszystkich liczb zespolonych jest mocy continuum, wnioskujemy natychmiast stąd, że liczby zespolone są parami uporządkowanymi liczb rzeczywistych, oraz z D8.2 i T12.9d.

* Liczbę 0 można zanotować w postaci $\frac{0}{1}$.

Ćwiczenia

Udowodnić wzór

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^1 = \mathcal{P}$$

§ 13. DOWÓD CANTORA ISTNIENIA LICZB PRZESTĘPNYCH

W algebrze wyższej liczbami algebraicznymi nazywamy te i tylko te liczby zespolone, które są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych. Liczby zespolone, nie będące liczbami algebraicznymi, nazywamy liczbami przestępnymi.

Istnienie liczb przestępnych zostało wykazane po raz pierwszy przez matematyka francuskiego Liouville'a w r. 1851. W r. 1873 wykazał Cantor, że zbiór wszystkich rzeczywistych liczb przestępnych jest mocy continuum. Podamy ten dowód jako przykład rozwiązania klasycznego zagadnienia matematycznego metodami teorii mnogości.

L13.1. Zbiór wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Dow. Z T12.10 wynika, że zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny. Stąd, z uwagi, że każdy wielomian ma skończoną ilość pierwiastków rzeczywistych, z L12.3 oraz uwagi, że zbiór wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych jest nieskończony (gdyż każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną), wynika lemat:

T13.1. Zbiór wszystkich rzeczywistych liczb przestępnych ma moc continuum.

Dow. Twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z T12.2 i L13.1.

§ 14. PEWNIK WYBORU

W r. 1904 matematyk niemiecki E. Zermelo sformułował następujący pewnik, zwany pewnikiem wyboru lub od imienia swego twórcy pewnikiem Zermeli:

$$A14.1. Z \neq \emptyset \wedge \prod_{M \in Z} (M \neq \emptyset) / \prod_{P \in Z} \prod_{Q \in Z} (P \neq Q \rightarrow P \cdot Q = \emptyset) \rightarrow \sum_{Y \in Z} \prod_{M \in Z} \sum_{x \in M \cdot Y} 1$$

Podajemy słowne sformułowanie tego pewnika:

O rodzinie zbiorów Z zakładamy, że

- (1) jest niepusta,
- (2) każdy zbiór należący do tej rodziny jest również niepusty,
- (3) dowolne dwa (różne) zbiory należące do tej rodziny są rozłączne.

Zgodnie z pewnikiem Zermeli, z założeń tych wynika istnienie co najmniej jednego zbioru Y , mającego z każdym zbiorem $M \in Z$ dokładnie jeden element wspólny.

Jako przykład dowodu, w którym korzysta się z A14.1, podamy dowód następującego twierdzenia, o którym wspomnieliśmy już w § 11:

$$T14.1. X \neq \emptyset \wedge \prod_{n \in \mathbb{N}} (\bar{X} \neq n) \rightarrow \sum_{Y \subset X} (\bar{Y} = \aleph_0)$$

W myśl tego twierdzenia dowolny zbiór niepusty, którego moc jest różna od każdej liczby naturalnej, zawiera podzbiór przeliczalny, a więc zgodnie z T11.1 jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda.

Dow. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy przez $C^{(m)}$ zbiór wszystkich ciągów m -elementowych, których wyrazami są różne elementy zbioru X . Wykażemy na drodze indukcji, że dla dowolnego naturalnego k zbiór $C^{(k)}$ jest niepusty.

Z założenia zbiór X jest niepusty. Istnieje więc element x_1 należący do tego zbioru. Ciąg, którego jedynym wyrazem jest x_1 , należy do zbioru $C^{(1)}$. Zbiór ten jest więc niepusty.

Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Zakładamy, że dla liczby tej spełniona jest dowodzona własność zbiorów $C^{(m)}$. Istnieje więc ciąg

$$(1) \quad c_1, c_2, \dots, c_k$$

którego wyrazami są różne elementy zbioru X . Gdyby w zbiorze X nie istniał element różny od każdego wyrazu ciągu (1), to moc zbioru X równałaby się liczbie k . Wniosek ten jest sprzeczny z drugim założeniem dowodzonego twierdzenia. Istnieje więc element zbioru X różny od każdego wyrazu ciągu (1). Oznaczmy ten element przez c_{k+1} . Ciąg

$$c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}$$

należy, oczywiście, do zbioru $C^{(k+1)}$. Zbiór ten jest więc niepusty. Widoczne jest też, że dla $i \neq j$: $C^{(i)} \cdot C^{(j)} = \emptyset$.

Zbiory

$$(2) \quad C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \dots$$

spełniają więc założenia A14.1. Istnieje więc zbiór C , który z każdym ze zbiorów (2) ma dokładnie jeden element wspólny. Niech ciąg $\{c_i^{(m)}\}$ będzie jedynym wspólnym elementem zbiorów C i $C^{(m)}$.

W ciągu

$$c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, c_3^{(3)}, c_1^{(4)}, \dots$$

skreślamy każdy wyraz, dla którego istnieje wcześniejszy i równy mu wyraz tego ciągu. Oznaczmy przez $\{y_n\}$ powstały w ten sposób ciąg. Załóżmy na chwilę, że ciąg ten jest skończony i że liczy r elementów. Widoczne jest, że wtedy w ciągu $\{c_i^{(r+1)}\}$ musi wystąpić co najmniej jeden wyraz różny od każdego wyrazu ciągu $\{y_n\}$. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z określeniem ciągu $\{y_n\}$. Ciąg ten jest więc nieskończony. Widoczne jest też, że wyrazami tego ciągu są różne elementy zbioru X .

Twierdzenie T14.1 jest więc prawdziwe.

Zauważmy, że bez A14.1 moglibyśmy z założeń T14.1 wywnioskować tylko to, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje ciąg n -elementowy, którego wyrazami są różne elementy zbioru X . Nie moglibyśmy jednak wykazać istnienia ciągu nieskończonego o tej własności.

Aksjomat wyboru jest chyba najbardziej dyskutowanym aksjomatem w matematyce. Spowodowane jest to faktem, że z jednej strony na podstawie tego aksjomatu dowodzi się twierdzeń, których prawdziwość jest najzupełniej oczywista a których nie można udowodnić bez tego aksjomatu (jak np. T14.1), z drugiej zaś strony tym, że wśród konsekwencji tego aksjomatu występują twierdzenia paradoksalne, niezgodne z intuicją. Stąd też wśród matematyków, i to nawet bardzo wybitnych, można spotkać zarówno zwolenników, jak i przeciwników przyjmowania aksjomatu wyboru.

Już w r. 1902 Beppo Levi zwrócił uwagę na to, że dowód twierdzenia, iż moc sumy rodziny zbiorów rozłącznych i niepustych jest większa lub równa mocy tej rodziny, wymaga możliwości wybrania po jednym elemencie z każdego zbioru tej rodziny. Podobnie wprowadzenie definicji sumy nieskończonego ciągu liczb kardynalnych (będącej uogólnieniem definicji sumy dwóch liczb kardynalnych) zakłada aksjomat wyboru — jak to zauważył W. Sierpiński w swej pracy o tym aksjomacie (z r. 1918).

Ta sama sytuacja występuje przy definicji iloczynu nieskończonego ciągu liczb kardynalnych i innych działań na liczbach kardynalnych oraz na typach i liczbach porządkowych — o których będzie mowa w rozdziale II — o ile uogólniamy definicje tych działań na nieskończoną ilość elementów. Z przykładów tych widać, że już przy wprowadzeniu stosunkowo elementarnych pojęć teorii mnogości trzeba się odwoływać do aksjomatu wyboru.

Również w innych działach matematyki, np. w analizie, algebrze, topologii, aksjomat wyboru (lub jego szczególne przypadki, lub też twierdzenia z nim równoważne) potrzebny jest do dowodu twierdzeń, których prawdziwość nie budzi wątpliwości.

Spośród wielu przykładów tego rodzaju podamy jeden. W analizie znane są dwie definicje ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 . W jednej definicji pojęcie to określa się przy pomocy warunku:

$$(a) \quad \prod_{\varepsilon > 0} \sum_{\delta > 0} [|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

w drugiej — przy pomocy warunku:

$$(b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Otóż w dowodzie równoważności tych dwóch definicji, a mianowicie w dowodzie, że z (b) wynika (a), trzeba powołać się na aksjomat wyboru.

Opozycja przeciwko aksjomatowi wyboru spowodowana jest głównie przez dwa motywy:

1. przy pomocy tego aksjomatu dowodzi się twierdzeń o istnieniu przedmiotów pewnego rodzaju, chociaż nie potrafimy wskazać żadnego przykładu takiego przedmiotu (tzw. nieefektywne dowody istnienia);
2. przy pomocy tego aksjomatu dowodzi się twierdzeń (w szczególności pewnych twierdzeń geometrycznych) nieintuicyjnych, z których najbardziej znane jest twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli*.

Znane są liczne twierdzenia, które są równoważne z aksjomatem wyboru na gruncie pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Jednym z takich twierdzeń jest prawo trychotomii dla liczb kardynalnych:

$$m < n \vee m = n \vee m > n$$

Problem niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości był przez długi czas nie rozstrzygnięty. Dopiero w r. 1964 Paul J. Cohen podał dowód niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości.

Tylko w szczególnym przypadku, gdy rodzina Z , o której mowa w A14.1, jest skończona, potrafimy udowodnić A14.1. Dowodzimy mianowicie najpierw tego twierdzenia, w przypadku gdy $Z = \{X_1\}$, w następujący sposób:

W myśl założeń A14.1 mamy:

- (1) $\sum_x x \in X_1$
- (2) $a_1 \in X_1$ {1}
- (3) $a_1 \in X_1 \cdot \{a_1\}$ {2}
- (4) $\sum_x \sum_y (x \in X_1 \cdot \{a_1\})$ {3}
- $\sum_y \sum_x (x \in X_1 \cdot Y)$ {4}

Następnie zaś przy pomocy indukcji dowodzimy tego twierdzenia dla przypadku gdy $Z = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Jeśli jednak rodzina Z jest przeliczalna, to nie potrafimy dowieść A14.1 już w przypadku, gdy elementy rodziny Z są zbiorami dwuelementowymi.

Podamy jeszcze jeden wniosek z aksjomatu wyboru. Potrzebna tu będzie następująca definicja:

$$D14.1. \quad a \in \mathfrak{M}_Z \equiv \sum_{M \in Z} (a = \{M\} \times M)$$

Z definicji tej wynika natychmiast

$$\text{Wniosek 14.1.} \quad \{M\} \times M \in \mathfrak{M}_Z \quad \because \quad M \in Z$$

Zbiór $\mathfrak{M}_Z$ jest więc zbiorem iloczynów kartezjańskich zbioru, którego jedynym elementem jest dowolny zbiór należący do tej rodziny i tego zbioru.

$$T14.2. \quad Z \neq 0 \wedge \prod_{M \in Z} (M \neq 0) \rightarrow \sum_{R \text{ funkcja}} \prod_{M \in Z} [R(M) \in M] **$$

* Por. K. Kuratowski i A. Mostowski *Teoria mnogości*, „Dodatek”.

** Symbol $R(M)$ oznacza tu element przyporządkowany przez funkcję R zbiorowi M (por. D6.3), a nie zbiór wartości tej funkcji (por. D6.4).

Jeśli więc każdy zbiór należący do niepustej rodziny zbiorów jest niepusty, to istnieje funkcja przyporządkowująca każdemu zbiorowi rozważanej rodziny element tego zbioru.

- Dow. (1) $Z \neq \emptyset$ {zał.}
- (2) $\prod_{M \in Z} (M \neq \emptyset)$ {Wniosek 14.1; 1}
- (3) $\mathfrak{M}_Z \neq \emptyset$ {Wniosek 14.1; 2; T5.1e}
- (4) $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}_Z \rightarrow \mathfrak{X} \neq \emptyset$ {T5.1f; Wniosek 14.1}
- (5) $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{M}_Z \wedge \mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} = \emptyset$ {A14.1; 3; 4; 5}
- (6) $\sum_{\mathfrak{Y} \in \mathfrak{M}_Z} \sum_1 (a \in \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y})$ {6}
- (7) $\prod_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}_Z} \sum_1 (a \in \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_1)$ {6}
- (8) $MR_1 m \equiv M \in Z \wedge \langle M, m \rangle \in (\{M\} \times M) \cdot \mathfrak{Y}_1$ {oznacz.}

Relacja R_1 przyporządkowuje więc każdemu zbiorowi M rodziny Z drugi element pary uporządkowanej $\langle M, m \rangle$ należący do iloczynu zbioru $\{M\} \times M$ i $\mathfrak{Y}_1$. Wykażemy najprzód, że relacja R_1 jest funkcją:

- (1.1) $MR_1 m \wedge MR_1 m_1$ {z. dow.}
- (1.2) $M \in Z$ {8; 1.1}
- (1.3) $\langle M, m \rangle, \langle M, m_1 \rangle \in (\{M\} \times M) \cdot \mathfrak{Y}_1$ {8; 1.1}
- (1.4) $\{M\} \times M \in \mathfrak{M}_Z$ {Wniosek 14.1; 1.2}
- (1.5) $\sum_1 [a \in (\{M\} \times M) \cdot \mathfrak{Y}_1]$ {7; 1.4}
- (1.6) $\langle M, m \rangle = \langle M, m_1 \rangle$ {1.3; 1.5}
- (1.7) $m = m_1$ {A5.1; 1.6}
- (9) $R_1 \in \text{funke}$ {D6.1; 1.1 $\rightarrow$ 1.7}

Wykażemy teraz, że funkcja R_1 przyporządkowuje każdemu zbiorowi rodziny Z element tego zbioru.

- (2.1) $M \in Z$ {z. dow.}
- (2.2) $\{M\} \times M \in \mathfrak{M}_Z$ {Wniosek 14.1; 2.1}
- (2.3) $a_1 \in (\{M\} \times M) \cdot \mathfrak{Y}_1$ {7; 2.2}
- (2.4) $a_1 \in \{M\} \times M$ {2.3}
- (2.5) $a_1 = \langle M_1, m_2 \rangle$
- (2.6) $M_1 \in \{M\}$
- (2.7) $m_2 \in M$
- (2.8) $M_1 = M$ {D5.1; 2.4}
- (2.9) $\langle M, m_2 \rangle \in (\{M\} \times M) \cdot \mathfrak{Y}_1$ {D1.3a; 2.6}
- (2.10) $MR_1 m_2$ {2.3; 2.5; 2.8}
- (2.11) $M \in D_1(R_1)$ {8; 2.1; 2.9; D6.2a; 2.10}

- (2.12) $m_2 = R_1(M)$ {D6.3; 9; 2.11; 2.10}
- (2.13) $R_1(M) \in M$ {2.7; 2.12}
- (10) $\prod_{M \in Z} [R_1(M) \in M]$ {2.1 $\rightarrow$ 2.13}
- $\sum_{R \in \text{funke}} \prod_{M \in Z} [R(M) \in M]$ {9; 10}

Udowodnione twierdzenie nosi nazwę ogólnej zasady wyboru. Jest ono interesujące między innymi z tego względu, że z niego wynika aksjomat wyboru. Aby to wykazać wystarczy sprawdzić, że zbiór Y_1 , określony w następujący sposób:

$$y \in Y_1 \equiv y = R_1(M),$$

spełnia następnik A14.1, o ile tylko R_1 jest funkcją, której istnienie stwierdza T14.2. Aksjomat wyboru i ogólna zasada wyboru są więc równoważne.

Ćwiczenia

1. Udowodnić, posługując się aksjomatem wyboru, następujące twierdzenie: Jeśli Z jest niepustą rodziną niepustych i rozłącznych zbiorów, to

$$\overline{Z} \leq \overline{\bigcup_{Z \in Z} Z}$$

Rozdział II

ZBIORY UPORZĄDKOWANE

§ 1. IZOMORFIZM

Rozważania dotyczące zbiorów uporządkowanych poprzedzimy krótkimi uwagami o pojęciu izomorfizmu. Pojęcie to należy do najważniejszych pojęć logicznych i ma zastosowanie w wielu działach matematyki.

Podamy najpierw definicję pomocniczą:

$$D1.1 \quad P(R) = D_d(R) + D_p(R)$$

Zdefiniowany zbiór nazywamy polem relacji R .

Z definicji tej wynika natychmiast

$$T1.1 \quad x \in P(R) \equiv x \in D_d(R) \vee x \in D_p(R)$$

W celu uproszczenia zapisu następnej definicji umówimy się, że

$$X = P(S) \quad \text{i} \quad Y = P(T)$$

Symbole

$$\langle X, S \rangle \quad \text{i} \quad \langle Y, T \rangle$$

oznaczają więc pary uporządkowane, których drugimi elementami są relacje, a pierwszymi — pola tych relacji. Z tej umowy o symbolach typu $\langle X, R \rangle$ korzystać będziemy też w dalszych rozważaniach tego rozdziału.

$$D1.2. \quad \langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle \equiv R \in 1-1 \wedge D_d(R) = X \wedge D_p(R) = Y \wedge \\ \wedge \prod_x \prod_y \prod_z \prod_u [xRz \wedge yRu \rightarrow (xSy \equiv zTu)]$$

Zdefiniowane wyrażenie czytamy: relacja R ustala izomorfizm zbiorów X i Y ze względu na relacje S i T . Aby więc relacja ustalała izomorfizm zbiorów X i Y ze względu na relacje S i T , potrzeba i wystarcza, aby spełnione były warunki:

- a) relacja R jest doskonała;
- b) zbiory X i Y są odpowiednio polami relacji S i T ;

c) lewa dziedzina relacji R jest równa polu relacji S , prawa zaś — polu relacji T ;

d) dwa przedmioty pozostają w relacji S wtedy i tylko wtedy, gdy przyporządkowane im przez relację R przedmioty pozostają w relacji T .

O ile z kontekstu wynika wyrażnie, że względu na jakie relacje dane dwa zbiory są izomorficzne, lub też nie jest to istotne, mówimy zwykle wprost o izomorfizmie zbiorów nie zaznaczając, że względu na jakie relacje zbiory te są izomorficzne.

Widoczne jest, że jeśli relacja R ustala izomorfizm dwóch zbiorów, to jednocześnie ustala też ich równoliczność.

Przykład I. Niech $\mathbb{R}^+$ będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}^-$ — ujemnych. Łatwo sprawdzić, że relacja S określona równoważnością

$$xSy \equiv x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}^- \wedge |x| = |y|$$

ustala izomorfizm zbioru $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^-$ ze względu na relacje większości i mniejszości.

Przykład II. Niech X będzie zbiorem wyrażeń pewnego języka, Y zbiorem wyrażeń jakiegoś innego języka. Zakładamy, że zbiory te są przekładalne, tzn. że dla każdego wyrazu jednego z tych zbiorów istnieje równoznaczny z nim wyraz zbioru drugiego. Zakładamy też, że w zbiorze X jak też w zbiorze Y nie ma wyrazów równoznacznych. Niech relacja S zachodzi pomiędzy wyrazami zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy wyrazy te należą do tej samej części mowy, i niech relacja T , zachodząca pomiędzy wyrazami zbioru Y , ma analogiczny sens. Widoczne jest, że relacja R , przyporządkowująca wyrazom zbioru X równoznaczne wyrazy zbioru Y , ustala izomorfizm tych zbiorów.

$$D1.3. \quad \langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle \equiv \sum_R (\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle)$$

Zdefiniowane wyrażenie czytamy: zbiory X i Y są izomorficzne ze względu na relacje S i T .

W D1.2 i D1.3 jest mowa o relacjach S i T , będących relacjami dwuargumentowymi. Łatwo jednak tak uogólnić te definicje, by dotyczyły relacji o większej ilości argumentów. Nietrudno też zdefiniować izomorfizm dwóch zbiorów ze względu na większą liczbę relacji. W szczególności uogólnione definicje mogą dotyczyć zbiorów, w których określone są działania np. dodawania i mnożenia*.

Niech Φ oznacza dowolne wyrażenie, w którym prócz symboli rachunku zdań i kwantyfikatorów występują tylko symbole:

$$(1) \quad x, y, \dots, u, X, S.$$

* Przypominamy, że działania dwuargumentowe są szczególnymi przypadkami relacji trójargumentowych.

Zakładamy, że zmienne $x, y, \dots, u$ przebiegają ustalony zbiór X , będący polem relacji S , i że kwantyfikatory w wyrażeniu Φ wiążą tylko te zmienne, nie wiążą natomiast zmiennej S . O zmiennej X zakładamy też, że występować może w wyrażeniu Φ tylko w kontekstach $\prod_{x \in X}, \sum_{x \in X}, \prod_{y \in X}, \dots$

Oznaczmy przez Φ^* wyrażenie, które powstaje z wyrażenia Φ przez zastąpienie symboli (1) odpowiednimi symbolami:

$$x^*, y^*, \dots, u^*, X^*, S^*$$

O symbolach tych czynimy założenia analogiczne do założeń dotyczących symboli (1).

Z tych oznaczeń i założeń skorzystamy formułując następujący lemat i dowodząc go:

$$\text{L1.1.} \quad \langle X, S \rangle \text{ iz}_R \langle X^*, S^* \rangle \wedge xRx^* \wedge yRy^* \wedge \dots \wedge uRu^* \rightarrow (\Phi \equiv \Phi^*)$$

$$\begin{array}{l} \text{Dow. (1) } \langle X, S \rangle \text{ iz}_R \langle X^*, S^* \rangle \\ \text{(2) } xRx^* \wedge yRy^* \wedge \dots \wedge uRu^* \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Dow. (1) } \langle X, S \rangle \text{ iz}_R \langle X^*, S^* \rangle \\ \text{(2) } xRx^* \wedge yRy^* \wedge \dots \wedge uRu^* \end{array}} \right\} \quad \{\text{zał.}\}$$

Dowód lematu rozbijamy na trzy części.

a. Zakładamy najpierw, że w wyrażeniu Φ nie występują kwantyfikatory. Wtedy też — oczywiście — nie występują kwantyfikatory w wyrażeniu Φ^* . Z założeń (1) i (2) oraz D1.2 wynikają równoważności:

$$xSx \equiv x^*S^*x^*$$

$$xSy \equiv x^*S^*y^*$$

$$\dots \dots \dots$$

$$xSu \equiv x^*S^*u^*$$

$$ySx \equiv y^*S^*x^*$$

$$\dots \dots \dots$$

$$uSu \equiv u^*S^*u^*$$

Z równoważności tych, z założeń dotyczących wyrażen Φ i Φ^* oraz z reguły ekstensjonalności dla wyrażen rachunku zdań * wynika teza lematu.

b. Zakładamy, że w wyrażeniu Φ występują tylko kwantyfikatory szczegółowe. Dowód lematu w tym przypadku jest indukcyjny ze względu na liczbę tych kwantyfikatorów. O ile liczba ta jest równa zeru, to w myśl części a. dowód lematu jest prawdziwy.

Zakładamy, że dla wyrażen $\Psi(x)$ i $\Psi^*(x^*)$ lemat jest prawdziwy.

Oznaczmy przez χ koniunkcję wszystkich założeń dowodzonego lematu z wyjątkiem założenia, że xRx^* . Widoczne jest, że lemat ten w przypadku,

gdy dotyczy wyrażen $\Psi(x)$ i $\Psi^*(x^*)$, jest równoważny wyrażeniu

$$\chi \rightarrow [xRx^* \rightarrow (\Psi(x) \equiv \Psi^*(x^*))]$$

O ile więc spełnione są założenia dowodzonego lematu, to prawdziwe jest też wyrażenie

$$xRx^* \rightarrow (\Psi(x) \equiv \Psi^*(x^*))$$

Stąd i z uwagi że w wyrażeniu χ nie występują zmienne x i x^* , wynika wyrażenie

$$(3) \quad \prod_{x \in X} \prod_{x^* \in X^*} [xRx^* \rightarrow (\Psi(x) \equiv \Psi^*(x^*))]$$

Założmy, że prawdziwe jest też wyrażenie

$$(1.1) \quad \sum_{x \in X} \Psi(x) \quad \{\text{z. dow.}\}$$

$$(1.2) \quad x_1 \in X \quad \{1.1\}$$

$$(1.3) \quad \Psi(x_1) \quad \{1.1\}$$

$$(1.4) \quad D_l(R) = X \wedge D_p(R) = X^* \quad \{D1.2, 1\}$$

$$(1.5) \quad x_1 \in D_l(R) \quad \{1.2, 1.4\}$$

$$(1.6) \quad \sum_{x^* \in D_p(R)} x_1 Rx^* \quad \{\text{wniosek 6.3a rozdz. I, 1.5}\}$$

$$(1.7) \quad x_1^* \in D_p(R) \quad \{1.6\}$$

$$(1.8) \quad x_1 Rx_1^* \quad \{1.6\}$$

$$(1.9) \quad x_1^* \in X^* \quad \{1.7, 1.4\}$$

$$(1.10) \quad \Psi^*(x_1^*) \quad \{3, 1.2, 1.9, 1.8, 1.3\}$$

$$(1.11) \quad \sum_{x^* \in X^*} \Psi^*(x^*) \quad \{1.9, 1.10\}$$

$$(4) \quad \sum_{x \in X} \Psi(x) \rightarrow \sum_{x^* \in X^*} \Psi^*(x^*) \quad \{1.1 \rightarrow 1.11\}$$

W podobny sposób dowodzimy implikacji

$$\sum_{x^* \in X^*} \Psi^*(x^*) \rightarrow \sum_{x \in X} \Psi(x)$$

Prawdziwa jest więc równoważność:

$$\sum_{x \in X} \Psi(x) \equiv \sum_{x^* \in X^*} \Psi^*(x^*)$$

Stąd i z reguły ekstensjonalności dla wyrażen rachunku zdań wynika prawdziwość lematu w rozważanym przypadku.

c. Niech Φ i Φ^* będą dowolnymi wyrażeniami. Równoważność tych wyrażen wynika z części b. dowodu oraz z uwagi, że kwantyfikator ogólny może być zastąpiony przez układ dwóch znaków negacji przedzielonych kwantyfikatorem szczegółowym. Lemat jest więc prawdziwy.

* Patrz § 3 części pierwszej.

** W wyrażeniach tych prócz zmiennych x i x^* mogą też występować inne zmienne.

Zauważmy, że L1.1 poprzedzić możemy kwantyfikatorami $\prod_{x \in X}$ i $\prod_{x^* \in X^*}$.

Jeśli w wyrażeniu Φ zmienna x jest związana (wtedy zmienna x^* jest w wyrażeniu Φ^* również związana), to na podstawie T13* i T16* otrzymujemy w poprzedniku L1.1 zamiast wyrażenia xRx^* wyrażenie

$$\sum_{x \in X} \sum_{x^* \in X^*} xRx^*$$

będące wyrażeniem prawdziwym, o ile tylko zbiory X i X^* są niepuste. Stąd wynika łatwo, że w założeniach L1.1 skreślić możemy każde wyrażenie typu xRx^* , o ile tylko zmienne x i x^* są w wyrażeniach Φ i Φ^* związane.

W szczególności prawdziwy jest więc

Wniosek 1.1. W przypadku, gdy w wyrażeniach Φ i Φ^* nie występują zmienne wolne, L1.1 przyjmuje postać:

$$\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle \rightarrow (\Phi \equiv \Phi^*)$$

W następującym twierdzeniu zachowujemy założenia dotyczące wyrażen Φ i Φ^* , jak też założenie, że zbiory X i X^* są niepuste.

T1.2. Jeśli

$$\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle$$

i wyrażenie Φ jest prawdziwe, to również wyrażenie Φ^* jest prawdziwe.

Dow. Jeśli w wyrażeniach Φ i Φ^* występują zmienne wolne, to poprzedzamy te wyrażenia kwantyfikatorami ogólnymi, wiążącymi wszystkie te zmienne. Otrzymane w ten sposób wyrażenia oznaczamy odpowiednio przez Φ_1 i Φ_1^* . Z założenia, że prawdziwe jest wyrażenie Φ , wynika, że prawdziwe jest też wyrażenie Φ_1 .

Założmy też, że relacją ustalającą izomorfizm zbiorów X i Y jest relacja E_1 . Stąd

$$\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle$$

Ze wzoru tego, z prawdziwości wyrażenia Φ_1 i z wniosku 1.1 wynika prawdziwość wyrażenia Φ_1^* . Opuszczając na początku tego wyrażenia dołączone kwantyfikatory ogólne, otrzymujemy z powrotem wyrażenie Φ^* . Twierdzenie jest więc prawdziwe.

Udowodnione twierdzenie nosi nazwę zasadniczego twierdzenia o izomorfizmie.

Może być ono uogólnione w wielu kierunkach. Np. może dotyczyć wyrażen, w których mowa jest nie o jednej relacji, lecz o kilku relacjach. Mogą to być relacje o dowolnej liczbie argumentów. Zasadnicze twierdzenie o izomorfizmie zostało podane przez logików polskich A. Lindenbauma i A. Tarskiego.

Z twierdzenia tego wynika, że dwie teorie, z których pierwsza dotyczy elementów zbioru X , będącego polem pewnych relacji, druga — elementów zbioru Y , będącego polem tej samej liczby relacji, nie różnią się formalnie, o ile

zbiory X i Y są izomorficzne ze względu na dane relacje. O ile więc np. pewien zbiór Y , w którym określone są dwa działania dwuargumentowe i jedno działanie jednoargumentowe, jest izomorficzny ze względu na te działania z algebrą Boole'a, to teoria dotycząca przedmiotów zbioru Y nie różni się formalnie od tej algebry.

Ćwiczenia

1. Uogólnić D1.2 w przypadku, gdy każdy ze zbiorów X i Y jest polem dwu relacji.
2. Uogólnić D1.2 w przypadku, gdy S i T są relacjami trójargumentowymi.
3. Zakładamy, że w zbiorze X są określone i wykonalne działania dwuargumentowe, oznaczone symbolami „+” i „·”, w zbiorze zaś Y — działania dwuargumentowe, oznaczone symbolami „ $\oplus$ ” i „ $\odot$ ”. Zakładamy też, że zbiory X i Y są izomorficzne ze względu na te działania. Wykazać, nie odwołując się do zasadniczego twierdzenia o izomorfizmie, że
 - a. jeśli działania „+” i „·” są przemienne i łączne, to również działania „ $\oplus$ ” i „ $\odot$ ” są przemienne i łączne;
 - b. jeśli pierwsze z tych działań mają moduły, to również działania drugie mają moduły;
 - c. jeśli dla pierwszych z tych działań istnieją działania odwrotne, to i dla drugich działań istnieją działania odwrotne;
 - d. jeśli działanie „+” jest rozdzielne względem działania „·”, to również działanie „ $\oplus$ ” jest rozdzielne względem działania „ $\odot$ ”.
4. Wykazać, że następująca definicja

$$\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle \equiv X \sim_R Y \wedge \prod_{x \in X} \prod_{y \in Y} [xSy \equiv R(x)TR(y)]$$

jest równoważna D1.2

§ 2. ZBIORY PODOBNE. TYPY PORZĄDKOWE

Teoria zbiorów uporządkowanych jest w wielu punktach analogiczna do ogólnej teorii mnogości, której poświęcony był poprzedni rozdział. Np. treść tego paragrafu jest analogiczna do treści § 7 rozdziału I.

Podamy najpierw kilka prostych definicji pomocniczych:

- D2.1a. $R \in \text{sp}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} [x \neq y \rightarrow (xRy \vee yRx)]$
- b. $R \in \text{przech}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} \prod_{z \in A} (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
- c. $R \in \text{asym}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} [xRy \rightarrow \sim(yRx)]$

Zdefiniowane wyrażenia czytamy:

- a. relacja R jest spójna w zbiorze A
- b. „ „ „ przechodnia w zbiorze A
- c. „ „ „ asymetryczna w zbiorze A

Każdy więc z symboli: $\text{sp}(A)$, $\text{przech}(A)$, $\text{asym}(A)$ oznacza pewien zbiór relacji, zależnych od zbioru A .

Dalsze definicje mają już podstawowe znaczenie dla teorii zbiorów uporządkowanych.

D2.2. $R \in \text{porz}(A) \equiv A = P(R) \wedge R \in \text{sp}(A) \cdot \text{przech}(A) \cdot \text{asym}(A)$

Zdefiniowane wyrażenie czytamy: relacja R porządkuje zbiór A . Aby więc pewna relacja porządkowała zbiór A , potrzeba i wystarcza, żeby polem jej był zbiór A i żeby była ona w tym zbiorze spójna, przechodnia i asymetryczna.

Typowymi relacjami porządkującymi zbiór liczb rzeczywistych są relacje mniejszości i większości. Typowe też są dwie następujące relacje:

t_1 jest wcześniejszy od t_2 , t_1 jest późniejszy od t_2 ,

które porządkują dowolny zbiór momentów czasowych.

D2.3. $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym $\equiv R \in \text{porz}(A)$

Zbiorami uporządkowanymi są więc pary, których elementem pierwszym jest dowolny zbiór, elementem zaś drugim — relacja porządkująca ten zbiór. Aby wyjaśnić sens intuicyjny D2.3, umówmy się elementy x i y zbioru A , spełniające warunek „ xRy ” nazywać: x — elementem wcześniejszym, y — elementem późniejszym. Możemy teraz sformułować D2.3 w następujący, nieścisły, lecz za to intuicyjny, sposób:

Zbiór jest uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy:

- dla każdych dwóch (różnych) elementów rozważanego zbioru zostało ustalone, który jest wcześniejszy, a który późniejszy (warunek spójności); przy czym
- jeśli element x jest wcześniejszy od y i y jest wcześniejszy od z , to x jest wcześniejszy od z (warunek przechodniości),
- żaden element x nie może być wcześniejszy i zarazem późniejszy od elementu y (warunek asymetrii).

Przykładami zbiorów uporządkowanych są pary: $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\langle \mathbb{N}, > \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, > \rangle$. Z A5.1 poprzedniego rozdziału wynika, że zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, > \rangle$ są różne, gdyż relacje mniejszości i większości są — oczywiście — różne**. Różne są też zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, > \rangle$.

Wprowadzimy teraz pewne umowy terminologiczne i pewne uproszczenia przyjętej symboliki. Umówmy się przede wszystkim nazywać zbiór A zapasem zbioru uporządkowanego $\langle A, R \rangle$. Zauważmy dalej, że o przedmiocie a mówimy, że jest elementem zbioru uporządkowanego wtedy i tylko wtedy,

* Zgodnie z umową wprowadzoną w § 1 i dotyczącą symboli typu $\langle X, R \rangle$, relacje „ $<$ ” i „ $>$ ” ograniczone są tu do zbioru $\mathbb{N}$ (polem tych relacji jest zbiór $\mathbb{N}$).
** Por. D6.10 rozdziału I.

gdy a jest elementem zapasu tego zbioru. Dla zaznaczenia, że a należy do $\langle A, R \rangle$ piszemy: $a \in \langle A, R \rangle$. Prawdziwa jest więc równoważność:

$$a \in \langle A, R \rangle \equiv a \in A$$

Symbol $\in$ użyty tu jest w dwóch różnych znaczeniach: raz oznacza należenie przedmiotu do zbioru uporządkowanego, drugi raz — do zbioru nieuporządkowanego. Z kontekstu jednak wynikać będzie zawsze, w którym z tych znaczeń użyty jest symbol $\in$.

W rozważaniach dotyczących zbiorów uporządkowanych często jest ustalone, jaka relacja porządkuje dany zbiór, lub jest obojętne, jaka to jest relacja. W wypadkach tych zamiast posługiwać się symbolem $\langle A, R \rangle$ posługiwać się będziemy symbolem prostszym A^0 . Symbole $A^0, B^0, C^0, \dots$ oznaczają więc zbiory uporządkowane, których zapasami są zbiory $A, B, C, \dots$. Oczywiście jest, że jeśli w jakimś wzorze lub dowodzie powtarza się parokrotnie symbol A^0 , to za każdym razem symbol ten oznacza zbiór uporządkowany przez tę samą relację.

Jeszcze jedna umowa: dla zaznaczenia, że elementy x i y zbioru $\langle A, R \rangle$ spełniają warunek „ xRy ”, pisać będziemy:

$$(1) \quad x \prec_A y$$

Relację tę czytamy: element x poprzedza (jest wcześniejszy) w zbiorze A^0 element y . Prawdziwa jest więc równoważność:

$$x \prec_A y \equiv x, y \in A \wedge xRy$$

Zauważmy jeszcze, że w wyrażeniu (1) będziemy czasami opuszczali wskaźnik A .

Posługując się wprowadzonymi oznaczeniami możemy określić zbiór uporządkowany jako zbiór, którego dowolne elementy x i y spełniają warunki:

- $x \neq y \rightarrow (x \prec y \vee y \prec x)$
- $x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$
- $x \prec y \rightarrow \sim (y \prec x)$

Następująca definicja jest odpowiednikiem D7.1 rozdziału I:

$$D2.4. \quad A^0 \simeq_R B^0 \equiv A \sim_R B \wedge \prod_x \prod_y [x \prec_A y \equiv R(x) \prec_B R(y)]$$

Wyrażenie $A^0 \simeq_R B^0$ czytamy: relacja R ustala podobieństwo zbiorów uporządkowanych A^0 i B^0 . Aby więc relacja R ustalała podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 , konieczne jest, aby ustalała równoliczność zapasów tych zbiorów, a więc by była doskonała oraz by $D_I(R) = A$ i $D_P(R) = B$.

Drugi warunek, jaki spełniać musi relacja R , wypowiedzieć możemy w następujący sposób:

elementy zbioru B^0 , przyporządkowane przez relację R elementom x i y zbioru A^0 , pozostają w zbiorze B^0 w tym samym stosunku porządkowym, w jakim pozostają w zbiorze A^0 elementy x i y .

D2.4 możemy też zanotować w następującej postaci:

$$S \in \text{porz}(A) \wedge T \in \text{porz}(B) \rightarrow [\langle A, S \rangle \simeq_R \langle B, T \rangle \equiv \langle A, S \rangle \text{ iz}_R \langle B, T \rangle]$$

Oznaczmy przez C_1 zbiór liczb całkowitych ujemnych. Łatwo zauważyć, że relacja R_1 , określona wzorem

$$nR_1c \equiv n = |c| \wedge n \in \mathbb{N} \wedge c \in C_1$$

ustala podobieństwo zbiorów $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ i $\langle C_1, > \rangle$.

D2.5.
$$A^0 \simeq B^0 \equiv \sum_R A^0 \simeq_R B^0$$

Zdefiniowaną relację odczytujemy: zbiory uporządkowane A^0 i B^0 są podobne. Relacja ta jest odpowiednikiem relacji równoliczności zbiorów (por. D7.2 rozdziału I).

Widoczne jest, że pojęcie podobieństwa zbiorów uporządkowanych jest szczególnym przypadkiem pojęcia izomorfizmu *.

Z D2.5 i D2.4 wynika

Wniosek 2.2.

$$A^0 \simeq B^0 \rightarrow A \sim B$$

Zapasy zbiorów podobnych są więc równoliczne. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, gdyż np. zbiory $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, > \rangle$ nie są oczywiście podobne.

T2.1a.
$$A^0 \simeq A^0$$

b.
$$A^0 \simeq B^0 \rightarrow B^0 \simeq A^0$$

c.
$$A^0 \simeq B^0 \wedge B^0 \simeq C^0 \rightarrow A^0 \simeq C^0$$

Relacja podobieństwa zbiorów uporządkowanych jest więc relacją typu równoważności.

Dow. T2.1 jest odpowiednikiem T7.1 rozdziału I. Dowody tych twierdzeń są też podobne. Ograniczymy się więc do następujących krótkich uwag:

w dowodzie wzoru a należy skorzystać z relacji identyczności ograniczonej do zbioru A ;

jeśli relacja R ustala podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 , to relacja R^{-1} ustala podobieństwo zbiorów B^0 i A^0 ;

jeśli relacja R ustala podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 , relacja zaś S podobieństwo zbiorów B^0 i C^0 , to iloczyn względny tych relacji ustala podobieństwo zbiorów A^0 i C^0 .

* Por. twierdzenie 4 poprzedniego paragrafu.

Wprowadzamy nowe pojęcie pierwotne, analogiczne do pojęcia mocy zbioru. Jest nim pojęcie typu porządkowego zbioru uporządkowanego. Typ porządkowy zbioru A^0 oznaczamy przez $\overline{A^0}$. Według Cantora, który był twórcą nie tylko ogólnej teorii mnogości, lecz też teorii zbiorów uporządkowanych, dochodzimy do pojęcia typu porządkowego danego zbioru, abstrahując od tego, jakie przedmioty tworzą ten zbiór. Kreska w oznaczeniu typu porządkowego ma właśnie symbolizować tę pojedynczą abstrakcję.

Sens wprowadzonego pojęcia wyjaśnia następujący aksjomat, analogiczny do A7.1 rozdziału I:

A2.1.
$$\overline{A^0} = \overline{B^0} \equiv A^0 \simeq B^0$$

Typy porządkowe dwóch zbiorów uporządkowanych są więc identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te są podobne.

Zauważmy, że z A2.1 wynika natychmiast T2.1 *.

D2.6.
$$a \in \text{Tp} \equiv \sum_{A^0} a = \overline{A^0}$$

Wyrażenie $a \in \text{Tp}$ czytamy: a jest typem porządkowym. Dowolne typy porządkowe oznaczać będziemy małymi literami alfabetu greckiego.

Z D2.6 wynika

T2.2a.
$$\overline{A^0} \in \text{Tp}$$

b.
$$\prod_{A^0} \sum_{a \in \text{Tp}} a = \overline{A^0}$$

c.
$$\prod_{a \in \text{Tp}} \sum_{A^0} a = \overline{A^0}$$

D2.6 i T2.2 są odpowiednikami D7.3 i T7.2 z rozdziału I.

Z A7.1 z rozdziału I oraz wniosku 2.2 i A2.1 wynika

Wniosek 2.3.

$$\overline{A^0} = \overline{B^0} \rightarrow \overline{\overline{A^0}} = \overline{\overline{B^0}}$$

Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa, co stwierdzić możemy na przykładzie $A^0 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ i $B^0 = \langle \mathbb{N}, > \rangle$.

W końcowej części § 7 poprzedniego rozdziału zauważyliśmy, że znaczną większość twierdzeń o mocach zbiorów może być sformułowana bez posługiwania się tym pojęciem, lecz tylko za pomocą pojęcia równoliczności zbiorów. Podobnie: twierdzenia o typach porządkowych mogą być zastąpione twierdzeniami, w których występuje pojęcie podobieństwa zbiorów. Skreślenie więc z listy pojęć pierwotnych teorii mnogości pojęcia typu porządkowego (z jedno-

* Por. uwagę po T1.7 (na str. 142).

czesnym skreśleniem A2.1) nie spowodowałoby istotnego zubożenia tej teorii, podobnie jak nie powoduje istotnego jej zubożenia skreślenie pojęcia moey zbioru.

Z następującego lematu, analogicznego do L7.4 poprzedniego rozdziału, skorzystamy wielokrotnie:

L2.1. Dla każdych dwóch zbiorów uporządkowanych A^0 i B^0 istnieją takie zbiory uporządkowane A_1^0 i B_1^0 , że:

$$A_1^0 \simeq A^0, \quad B_1^0 \simeq B^0 \quad \text{ i } \quad A_1 \cdot B_1 = 0$$

Dow. Zbiory A_1 i B_1 określamy w następujący sposób:

$$\langle 1, a \rangle \in A_1 \equiv a \in A$$

$$\langle 2, b \rangle \in B_1 \equiv b \in B$$

Przyjmujemy też, że

$$\langle 1, a_1 \rangle \prec_{A_1} \langle 1, a_2 \rangle \equiv a_1 \prec_A a_2$$

$$\langle 2, b_1 \rangle \prec_{B_1} \langle 2, b_2 \rangle \equiv b_1 \prec_B b_2$$

Łatwo zauważyć, że tak określone zbiory uporządkowane A_1^0 i B_1^0 spełniają żądane warunki.

W rozważaniach dotyczących typów porządkowych obojętne jest, które spośród podobnych zbiorów bierzemy pod uwagę. W myśl L2.1 możemy zawsze dane dwa zbiory zastąpić zbiorami rozłącznymi.

Ćwiczenia

1. Podać przykład relacji R , dla której $P(R) = D_L(R) = D_P(R)$.
2. Wykazać, że $P(R) = P(R^{-1})$.
3. Podać przykład relacji spójnej (przechodniej, asymetrycznej) w zbiorze $\mathfrak{A}$, lecz niespójnej (nieprzechodniej, niesymetrycznej) w zbiorze $\mathfrak{A}$.
4. Wykazać, że następujące relacje porządkują zbiór $\mathfrak{A}$:

$$a) xRy = x^0 < y^0$$

$$b) xRy = x^0 < y^0 \wedge x - y > 0 \vee x < 0 \wedge y > 0$$

$$c) xRy = |x| < |y| \vee |x| = |y| \wedge x < 0 \wedge y > 0$$

5. Podać relację porządkującą zbiór wszystkich liczb zespolonych.
6. Jaka relacja porządkuje zbiór wyrazów w słownikach? Wzorując się na tej relacji, podać relację porządkującą zbiór wszystkich ciągów skończonych, których elementami są liczby naturalne $< \mathbb{N}$.
7. Sprawdzić, czy zbiory uporządkowane $(\mathfrak{A}, R_1)$, $(\mathfrak{A}, R_2)$ są podobne, gdy relacje R_1 i R_2 są określone tak, jak w ćwiczeniu 4.

8. Wykazać, że dowolna relacja jest w zbiorze pustym zwrotna, asymetryczna i przechodnia.
9. Wykazać, że relacja C nie porządkuje rodziny wszystkich podzbiorów zbioru A liczącego co najmniej dwa elementy.
10. Udowodnić wzór:

$$R \in \text{porz}(A) \rightarrow R^{-1} \in \text{porz}(A)$$

§ 3. ARYTMETYKA TYPÓW PORZĄDKOWYCH

Następujące dwie definicje określają sumę i iloczyn zbiorów uporządkowanych:

$$D3.1. \quad A \cdot B = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \{A^0 + B^0 = C^0 \equiv C = A + B \wedge \prod_x \prod_y [x \prec_C y \equiv (x \prec_A y \vee x \prec_B y \vee x \in A \wedge y \in B)]\}$$

$$D3.2. \quad A^0 \cdot B^0 = C^0 \equiv$$

$$\equiv C = A \times B \wedge \prod_a \prod_b \prod_x \prod_y [\langle a, b \rangle \prec_C \langle x, y \rangle \equiv (b \prec_B y \vee b = y \wedge a \prec_A x)]$$

Łatwo zauważyć, że warunek

$$x \prec_A y \vee x \prec_B y \vee x \in A \wedge y \in B$$

określa relację R_1 , która porządkuje zbiór $A + B$, o ile tylko $A \cdot B = 0$.

Podobnie warunek

$$b \prec_B y \vee b = y \wedge a \prec_A x$$

określa relację S_1 , która porządkuje zbiór $A \times B$. Suma i iloczyn zbiorów uporządkowanych są więc zbiorami uporządkowanymi.

Zauważmy dalej, że relacja R_1 porządkuje zbiór $A + B$ w ten sposób, że najprzód występują wszystkie elementy zbioru A^0 w niezmiennym porządku, po nich zaś wszystkie elementy zbioru B^0 również w niezmiennym porządku*.

Aby wyjaśnić sens intuicyjny relacji S_1 , rozważymy następujący przykład:

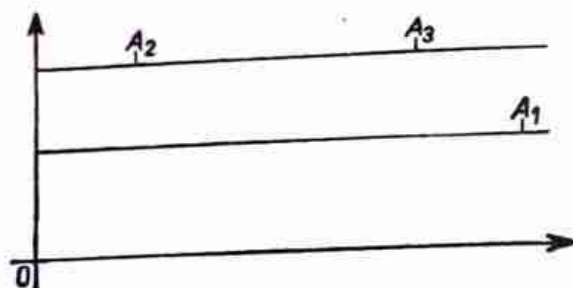
Niech zbiory A^0 i B^0 będą zbiorami wszystkich liczb rzeczywistych uporządkowanych według wielkości. Spełnione są więc równości

$$A^0 = B^0 = \langle \mathfrak{R}, < \rangle$$

Elementy zbioru $A \times B$ możemy więc traktować jako punkty płaszczyzny, na której został obrany układ osi współrzędnych. Łatwo widzieć, że punkty te są uporządkowane w ten sposób, że z dwóch punktów leżących na różnych prostych poziomych (p. rysunek) wcześniejszy jest ten, który leży na prostej

* Patrz przypis na str. 220.

położonej niżej, z dwóch zaś punktów leżących na tej samej prostej poziomej wcześniejszy jest punkt położony bardziej na lewo *. Zaznaczone na rysunku



punkty są więc uporządkowane następująco:

$$A_1 \prec A_2 \prec A_3$$

Następujący lemat jest analogiczny do L7.5a, b z rozdziału I.

$$\text{L3.1a.} \quad A^0 \simeq B^0 \wedge A_1^0 \simeq B_1^0 \wedge A \cdot A_1 = B \cdot B_1 = 0 \rightarrow A^0 + A_1^0 \simeq B^0 + B_1^0$$

$$\text{b.} \quad A^0 \simeq B^0 \wedge A_1^0 \simeq B_1^0 \rightarrow A \cdot A^0 \simeq B^0 \cdot B_1^0$$

Dow. Podamy dowód tylko części b lematu, gdyż dowód części a jest analogiczny do dowodu L7.5a z rozdziału I.

Założmy, że relacja R ustala podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 , relacja zaś R_1 podobieństwo zbiorów A_1^0 i B_1^0 . Łatwo spostrzec, że relacja S , określona wzorem

$$\langle x, x_1 \rangle S \langle y, y_1 \rangle \equiv x R y \wedge x_1 R_1 y_1$$

ustala podobieństwo zbiorów $A^0 \cdot A_1^0$ i $B^0 \cdot B_1^0$.

Zdefiniujemy teraz sumę i iloczyn typów porządkowych,

$$\text{D3.3.} \quad A \cdot B = 0 \rightarrow \overline{A^0 + B^0} = \overline{A^0} + \overline{B^0}$$

$$\text{D3.4.} \quad \overline{A^0 \cdot B^0} = \overline{A^0} \cdot \overline{B^0}$$

Zauważmy, że D3.3 i D3.4 moglibyśmy również zanotować w następujący dokładniejszy sposób:

$$a + b = c \equiv \sum_{A^0=a} \sum_{B^0=b} (A \cdot B = 0 \wedge c = \overline{A^0 + B^0})$$

$$a \cdot b = c \equiv \sum_{A^0=a} \sum_{B^0=b} (c = \overline{A^0 \cdot B^0})$$

Wykażemy, że D3.3 jest poprawna. W tym celu należy udowodnić, że dla każdego dwóch typów porządkowych a i b istnieje dokładnie jeden typ porządkowy będący ich sumą.

* Obrazowe i niedokładne zwroty, jakich tu użyto, usprawiedliwione są celem, którym się kierowaliśmy: chodziło wyłącznie o wyjaśnienie intuicyjnego sensu rozważanej relacji porządkującej.

W myśl T2.2c istnieją zbiory uporządkowane A^0 i B^0 takie, że $\overline{A^0} = a$ i $\overline{B^0} = b$. Niech A_1^0 i B_1^0 będą dowolnymi zbiorami uporządkowanymi, spełniającymi warunki $A_1^0 \simeq A^0$, $B_1^0 \simeq B^0$. Na podstawie L2.1 możemy założyć, że $A \cdot B = A_1 \cdot B_1 = 0$. Stąd i z L3.1a wynika, że

$$A^0 + B^0 \simeq A_1^0 + B_1^0$$

Stąd z kolei otrzymujemy na podstawie A2.1 i D3.3:

$$\overline{A^0 + B^0} = \overline{A_1^0 + B_1^0}$$

Istnieć więc może tylko jedna suma dwóch danych typów porządkowych. O tym, że suma taka zawsze istnieje, wnioskujemy na podstawie L2.1, D3.3, T2.2b i uwagi, że suma dwóch zbiorów uporządkowanych jest zbiorem uporządkowanym.

W podobny sposób można wykazać poprawność D3.4.

$$\text{T3.1a.} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\text{b.} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Dodawanie i mnożenie typów porządkowych jest więc łączne. Działania te nie są jednak, jak przekonamy się później, przemienne.

Dow. Udowodnimy tylko wzór a.

Niech A^0, B^0, C^0 będą zbiorami uporządkowanymi, spełniającymi wzory:

$$(1) \quad \overline{A^0} = a, \quad \overline{B^0} = b, \quad \overline{C^0} = c$$

Istnienie takich zbiorów zapewnia T2.2c. Na podstawie L2.1 możemy założyć, że

$$(2) \quad A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C = 0$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$(3) \quad D^0 = A^0 + B^0, \quad E^0 = B^0 + C^0, \quad X^0 = (A^0 + B^0) + C^0, \quad Y^0 = A^0 + (B^0 + C^0)$$

Z D3.1, (2) i (3) wynikają następujące równości:

$$X = (A + B) + C, \quad Y = A + (B + C)$$

Stąd

$$(4) \quad X = Y$$

Z D3.1, (2) i (3) wynikają też równoważności

$$\begin{aligned} x \prec_{X^0} y &\equiv x \prec_{D^0} y \vee x \prec_{C^0} y \vee x \in D \wedge y \in C = \\ &\equiv x \prec_{A^0} y \vee x \prec_{B^0} y \vee x \in A \wedge y \in B \vee x \prec_{C^0} y \vee x \in A + B \wedge y \in C = \\ &\equiv x \prec_{A^0} y \vee x \prec_{B^0} y \vee x \prec_{C^0} y \vee x \in A \wedge y \in B \vee x \in A \wedge y \in C \vee x \in B \wedge y \in C \\ x \prec_{Y^0} y &\equiv x \prec_{A^0} y \vee x \prec_{E^0} y \vee x \in A \wedge y \in E = \\ &\equiv x \prec_{A^0} y \vee x \prec_{B^0} y \vee x \prec_{C^0} y \vee x \in B \wedge y \in C \vee x \in A \wedge y \in B \vee x \in A \wedge y \in C \end{aligned}$$

Stąd

(5)

$$x \prec_{xy} y \equiv x \prec y$$

Z D2.4 oraz wzorów (4) i (5) wynika, że relacja identyczności ograniczona do zbioru X ustala podobieństwo zbiorów X^0 i Y^0 . Stąd, z D2.5 i A2.1 wynika

(6)

$$\overline{X^0} = \overline{Y^0}$$

Z drugiej strony z D3.3, (2) i (3) wynikają równości

$$\overline{X^0} = (\overline{A^0} + \overline{B^0}) + \overline{C^0}, \quad \overline{Y^0} = \overline{A^0} + (\overline{B^0} + \overline{C^0})$$

Z równości tych oraz wzorów (6) i (1) wynika wzór (a).

Podamy jeszcze następujące twierdzenie:

T3.2.

$$\gamma \cdot (a + \beta) = \gamma \cdot a + \gamma \cdot \beta$$

Mnożenie typów porządkowych jest więc rozdzielne względem dodawania. Dowód T3.2 pomijamy.

§ 4. PRZEKROJE. ZBIORY GĘSTE I CIĄGŁE

Pojęciem przekroju zbioru wszystkich liczb wymiernych posłużył się matematyk niemiecki R. Dedekind* budując arytmetykę liczb rzeczywistych. Pojęcie przekroju, które podamy, jest uogólnieniem pojęcia wprowadzonego przez Dedekinda.

D4.1. $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru uporządkowanego $C^0 \equiv$
 $\equiv A \neq 0 \wedge B \neq 0 \wedge A \cdot B = 0 \wedge A^0 + B^0 = C^0$

Przekrojami są więc pary uporządkowane zbiorów uporządkowanych o niepustych i rozłącznych zapasach. Zbiór A^0 nazywamy klasą dolną przekroju, B^0 — klasą górną. Z D4.1 i D3.1 wynika, że

$$x \in A^0 \wedge y \in B^0 \rightarrow x \prec_c y$$

Przekrój wyznacza więc podział wszystkich elementów danego zbioru uporządkowanego na dwie klasy takie, że każdy element pierwszej klasy jest wcześniejszy od każdego elementu drugiej klasy.

D4.2a. x jest pierwszym elementem zbioru uporządkowanego $A^0 \equiv x \in A \wedge$
 $\wedge \prod_{y \in A} (x \neq y \rightarrow x \prec_A y)$

b. x jest ostatnim elementem zbioru uporządkowanego $A^0 \equiv x \in A \wedge$
 $\wedge \prod_{y \in A} (x \neq y \rightarrow y \prec_A x)$

* W poprzednim rozdziale zapozналиśmy się z definicją zbioru nieskończonego, podaną przez tego matematyka.

Elementem pierwszym zbioru $\langle \mathfrak{N}, < \rangle$ jest liczba 1, ostatniego elementu zbiór ten nie posiada.

D4.3a. Przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest skokiem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ostatni element zbioru A^0 i element pierwszy zbioru B^0 .

b. Przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest luką wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ostatni element zbioru A^0 i nie istnieje element pierwszy zbioru B^0 .

Łatwo zauważyć, że każdy przekrój zbioru $\langle \mathfrak{N}, < \rangle$ jest skokiem. Można też wykazać, że przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ zbioru wszystkich liczb wymiernych dodatnich uporządkowanych według wielkości, określony przez wzory:

$$x \in A \equiv x^2 < 2, \quad x \in B \equiv x^2 > 2$$

jest luką. Istnieją — oczywiście — przekroje nie będące skokami ani lukami. Przekrojem takim jest np. przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ zbioru $\langle \mathfrak{N}, < \rangle$, w którym do zbioru A zaliczone są wszystkie liczby niedodatnie, do zbioru B — wszystkie liczby dodatnie. Ostatnim elementem zbioru A^0 jest liczba 0, zbiór B^0 nie ma elementu pierwszego.

D4.4a. Zbiór uporządkowany jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego przekrój nie jest skokiem.

b. Zbiór uporządkowany jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego przekrój nie jest skokiem ani luką.

Zbiór $\langle \mathfrak{N}, < \rangle$ nie jest — oczywiście — gęsty ani też ciągły. Zbiór wszystkich liczb wymiernych uporządkowanych według wielkości jest gęsty, nie jest jednak ciągły, gdyż — jak wynika to z podanego wyżej przykładu — istnieją jego przekroje będące lukami. Ciągły jest natomiast zbiór $\langle \mathfrak{R}, < \rangle$.

Wprowadzimy pojęcie zawierania się zbiorów uporządkowanych, którym w dalszych rozważaniach posłużymy się wielokrotnie.

D4.5. $A^0 C B^0 \equiv A \subset B \wedge \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} (x \prec_A y \equiv x \prec_B y)$

Zbiór uporządkowany A^0 jest więc zawarty w zbiorze uporządkowanym B^0 wtedy i tylko wtedy, gdy zapas pierwszego z tych zbiorów zawarty jest (w znaczeniu ustalonym w algebrze zbiorów) w zapasie zbioru drugiego i gdy elementy zbioru A^0 są w nim uporządkowane tak, jak w zbiorze B^0 . Symbol „ C ” ma więc dwa znaczenia. Nie będzie to jednak groziło nieporozumieniami, gdyż oznaczenia argumentów tego symbolu będą zawsze wskazywały, w jakim znaczeniu jest on użyty. Zauważmy jeszcze, że jeśli $A^0 C B^0$, to zbiór A^0 nazywamy częścią lub podzbiorem zbioru B^0 .

Z D4.5, D3.1 i D4.1 wynikają natychmiast:

Wniosek 4.1a. $A^0 + B^0 = C^0 \rightarrow A^0 C C^0 \wedge B^0 C C^0$

b. $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest przekrojem $C^0 \rightarrow A^0 C C^0 \wedge B^0 C C^0$

T4.1. $A^0 C B^0 \wedge B^0 C C^0 \rightarrow A^0 C C^0$

Stosunek więc zawierania się zbiorów uporządkowanych, tak jak stosunek zawierania się zbiorów nieuporządkowanych, jest przechodni.

Dow. (1)	$A^0 \subset B^0 \wedge B^0 \subset C^0$	{zał.}
(2)	$A \subset B \wedge B \subset C$	{D4.5, 1}
(3)	$A \subset C$	{2}
(1.1)	$x, y \in A$	{z. dow.}
(1.2)	$x, y \in B \wedge x, y \in C$	{1.1, 2}
(1.3)	$x \prec_A y \equiv x \prec_B y$	{D4.5, 1, 1.1, 1.2}
(1.4)	$x \prec_B y \equiv x \prec_C y$	
(1.5)	$x \prec_A y \equiv x \prec_C y$	{1.3, 1.4}
	$A^0 \subset C^0$	{D4.5, 3, 1.1 $\rightarrow$ 1.5}

T4.2a. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i istnieje element pierwszy zbioru A^0 , to istnieje też element pierwszy zbioru B^0 .

b. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i istnieje element ostatni zbioru A^0 , to istnieje też element ostatni zbioru B^0 .

c. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i zbiór A^0 jest gęsty, to gęsty jest też zbiór B^0 .

d. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i zbiór A^0 jest ciągły, to ciągły jest też zbiór B^0 .

Dow. Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z zasadniczego twierdzenia o izomorfizmie, podanego w § 1.

Dowód tego twierdzenia jest jednak trudny. Z tego względu podajemy dowody T4.2a, b, c, d, nie oparte na zasadniczym twierdzeniu o izomorfizmie; dowody te są zupełnie łatwe. Udowodnimy najpierw część a twierdzenia.

Założmy, że relacja doskonała R ustala podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 oraz że a_1 jest pierwszym elementem zbioru A^0 . Wykażemy, że $b_1 = R(a_1)$ jest pierwszym elementem zbioru B^0 . Gdyby bowiem istniał taki element b_2 zbioru B^0 , że $b_2 \prec_B b_1$, to istniałby też element a_2 zbioru A^0 , spełniający warunek $b_1 = R(a_2)$, przy czym w myśl D2.4 prawdziwa byłaby równoważność

$$a_2 \prec_A a_1 \equiv R(a_2) \prec_B R(a_1)$$

Element a_1 nie byłby więc — wbrew założeniu — pierwszym elementem zbioru A^0 .

Dowód części b twierdzenia jest analogiczny. Udowodnimy teraz część c twierdzenia.

Założmy znów, że relacja doskonała R ustala podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 oraz że zbiór A^0 jest gęsty. Założmy też — wbrew temu, co chcemy wykazać — że pewien przekrój $\langle X^0, Y^0 \rangle$ zbioru B^0 jest skokiem. Oznaczmy przez Z^0 i U^0 podzbiory zbioru A^0 , spełniające warunki:

$$R(Z) = X, \quad R(U) = Y$$

Łatwo zauważyć, że $Z^0 \simeq_R X^0$, $U^0 \simeq_R Y^0$ i że para uporządkowana $\langle Z^0, U^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru A^0 . Z założenia więc, że przekrój $\langle X^0, Y^0 \rangle$ jest skokiem

oraz z T4.2a, b wynika, że w zbiorze Z^0 jest element ostatni, w zbiorze zaś U^0 — element pierwszy. Przekrój $\langle Z^0, U^0 \rangle$ jest więc skokiem. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z założeniem, że zbiór A^0 jest gęsty.

Dowód części d. twierdzenia jest analogiczny.

T4.3. Zbiór uporządkowany A^0 jest gęsty $\equiv \prod_x \prod_y \sum_z (x \prec_A y \rightarrow x \prec_A z \prec_A y)^*$

Dow. Założmy najprzód, że zbiór A^0 jest gęsty i niech x i y będą dowolnymi jego elementami, spełniającymi warunek

$$(1) \quad x \prec_A y$$

Niech podzbiory X^0 i Y^0 zbioru A^0 spełniają warunki:

$$(2) \quad t \in X^0 \equiv t \prec_A x \vee t = x$$

$$(3) \quad t \in Y^0 \equiv y \prec_A t \vee t = y$$

Gdyby nie istniał element z spełniający warunek

$$(4) \quad x \prec_A z \prec_A y$$

to — jak łatwo spostrzec — para uporządkowana $\langle X^0, Y^0 \rangle$ byłaby przekrojem zbioru A^0 , i to przekrojem będącym skokiem. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z założeniem, że zbiór A^0 jest gęsty. Z założenia więc tego wynika, że dla każdych dwóch elementów x, y zbioru A^0 , spełniających wzór (1), istnieje element z spełniający wzór (4).

Założmy teraz, że zbiór A^0 nie jest gęsty. Istnieje więc przekrój $\langle X^0, Y^0 \rangle$ tego zbioru, będący skokiem. Łatwo zobaczyć, że istnieją wtedy elementy x i y zbioru A^0 , spełniające wzory (1), (2) i (3). Gdyby pewien element z zbioru A^0 spełniał warunek (4), to element ten nie należałby ani do zbioru X^0 , ani do zbioru Y^0 i para uporządkowana $\langle X^0, Y^0 \rangle$ nie byłaby — wbrew założeniu — przekrojem zbioru A^0 . Dowód twierdzenia został w ten sposób zakończony.

Ćwiczenia

1. Podać taką relację R , by zbiór uporządkowany $\langle \mathbb{R}, R \rangle$ nie miał elementu pierwszego ani ostatniego.
2. Podać taką relację R , by pewien przekrój zbioru $\langle \mathbb{R}, R \rangle$ był skokiem, inny zaś luką.
3. Zbiór X^0 nazywamy ograniczonym od góry w zbiorze A^0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X^0 \subset A^0 \wedge \sum_{a \in X^0} \prod_{x \in X^0} x \prec_A a$$

Kresem górnym zbioru $X^0 \subset A^0$ nazywamy taki element a zbioru A^0 , że

$$\prod_{x \in X^0} (x \prec_A a \vee x = a) \wedge \prod_{y \in X^0} \left[\prod_{x \in X^0} (x \prec_A y) \rightarrow (a \prec_A y \vee a = y) \right]$$

* Wyrażenie $x \prec_A z \prec_A y$ jest koniunkcją wyrażenia $x \prec_A z$ i wyrażenia $z \prec_A y$.

- a) Zdefiniować analogicznie zbiór ograniczony od dołu i kres dolny.
 b) Wykazać, że każdy podzbiór zbioru ciągłego ograniczony od góry ma kres górny, ograniczony od dołu ma kres dolny.
 c) Wykazać, że powyższej własności nie mają zbiory uporządkowane, będące zbiorami gęstymi nieciągłymi.
4. Udowodnić wzory:
 a) $A^0 \subset A^0$
 b) $A^0 \subset B^0 \wedge B^0 \subset A^0 \rightarrow A^0 = B^0$
5. Niech X będzie dowolnym niepustym podzbiorem rodziny wszystkich podzbiorów (w znaczeniu D4.5) zbioru uporządkowanego X^0 . Następujący wzór jest pewnym uogólnieniem pojęcia sumy zbiorów uporządkowanych:

$$Z^0 = \bigcup_{Y^0 \in X} Y^0 \equiv Z = \bigcup_{Y \in X} Y \wedge \prod_{y \in Z} \prod_{z \in Z} (x \prec_Z y \equiv x \prec_X y)$$

Wykazać, że jeśli żaden ze zbiorów należących do rodziny X nie ma elementu pierwszego (ostatniego), to również zbiór $\bigcup_{Y \in X} Y$ nie ma elementu pierwszego (ostatniego).

6. a) Wykazać, że wyjmując ze zbioru gęstego dowolną skończoną ilość elementów otrzymujemy zbiór, który nadal jest gęsty.
 b) Wykazać, że analogicznej własności nie mają zbiory ciągłe.

§ 5. SKOŃCZONE ZBIORY UPORZĄDKOWANE. TYPY PORZĄDKOWE ω , η , λ . TYPY ODWROTNE

O zbiorze uporządkowanym A^0 mówimy, że jest mocy m , wtedy i tylko wtedy, gdy zapas tego zbioru jest zbiorem mocy m , a więc gdy $\bar{A} = m$. Podobnie zbiór A^0 nazywamy przeliczalnym, skończonym lub pustym, gdy odpowiednio zbiór A jest przeliczalny, skończony lub pusty. Zauważmy jeszcze, że o zbiorach uporządkowanych mówimy, że są równoliczne, gdy ich zapasy są równoliczne.

L5.1. *Każdy skończony zbiór uporządkowany ma element pierwszy.*

Dow. Niech liczba naturalna n będzie mocą zbioru uporządkowanego A^0 . Jeśli $n = 1$, to elementem pierwszym zbioru A^0 jest jego jedyny element. Zakładamy, że dla liczby naturalnej k lemat jest prawdziwy oraz że $\bar{A} = k+1$. Niech a będzie dowolnym elementem zbioru A^0 . Oznaczmy przez A_1^0 podzbiór zbioru A^0 , którego zapasem jest różnica zbioru A i zbioru jednoelementowego $\{a\}$. Widoczne jest, że $\bar{A}_1 = k$. W myśl więc założenia indukcyjnego istnieje element pierwszy a_1 zbioru A_1^0 . Elementem pierwszym zbioru A^0 jest wcześniejszy spośród elementów a i a_1 . Dowód indukcyjny lematu został w ten sposób zakończony.

T5.1. *Jeśli skończone zbiory uporządkowane A^0 i B^0 są równoliczne, to zbiory te są podobne.*

Dow. Zakładamy, że

$$\bar{A} = \bar{B} = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Określimy indukcyjnie ciąg skończony

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

Pierwszym elementem ciągu (1) niech będzie pierwszy element zbioru A^0 . Istnienie tego elementu gwarantuje L5.1. Założmy, że określiliśmy elementy

$$(2) \quad a_1, a_2, \dots, a_k, \quad k < n$$

ciągu (1). Oznaczmy przez A_1 różnicę zbioru A i zapasu ciągu (2). Niech a_{k+1} będzie pierwszym elementem podzbioru A_1^0 zbioru A^0 . W ten sposób ciąg (1) został całkowicie wyznaczony. W podobny sposób określamy ciąg

$$(3) \quad b_1, b_2, \dots, b_n$$

którego wyrazami są elementy zbioru B .

Niech relacja R zachodzi pomiędzy wyrazami ciągów (1) i (3) wtedy i tylko wtedy, gdy wskaźniki tych wyrazów są równe. Łatwo wykazać, że

$$I. \quad \begin{cases} R \in 1-1 \\ D_l(R) = A \wedge D_p(R) = B \\ \prod_x \prod_y [x \prec_A y \equiv R(x) \prec_B R(y)] \end{cases}$$

Relacja R ustala więc podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 .

Z T5.1 wynika

Wniosek 5.1. *Każdy uporządkowany zbiór n -elementowy jest podobny do zbioru wszystkich liczb naturalnych $\leq n$, uporządkowanych według wielkości.*

Z T5.1 wynika też, że skończone i równoliczne zbiory uporządkowane mają ten sam typ porządkowy. Typy te oznaczать będziemy symbolami, którymi oznaczamy liczby naturalne. Tak np. typ porządkowy zbioru pięcioelementowego oznaczamy symbolem „5”. Symbol ten, zgodnie z umowami poprzedniego rozdziału, oznacza jednocześnie moc zbioru pięcioelementowego. Niedokładność ta nie grozi sprzecznością, gdyż własności typów porządkowych i liczb kardynalnych zbiorów skończonych są takie same. W szczególności prawa dotyczące działań na typach porządkowych i liczbach kardynalnych zbiorów skończonych są jednakowe. Arytmetykę liczb naturalnych możemy więc budować jako arytmetykę liczb kardynalnych zbiorów skończonych lub też jako arytmetykę typów porządkowych zbiorów skończonych.

Jako ilustrację powyższych uwag podajemy:

T5.2. *Jeśli m i n są typami porządkowymi zbiorów skończonych, to*

$$(1) \quad m + n = n + m$$

$$(2) \quad m \cdot n = n \cdot m^{**}$$

* Istnienie tego elementu gwarantuje znów L5.1.

** Jak już poprzednio zostało wspomniane, dodawanie i mnożenie dowolnych typów porządkowych nie jest przemienne.

Dow. Niech

$$(3) \quad \overline{A^0} = m, \quad \overline{B^0} = n, \quad A \cdot B = 0$$

Widoczne jest, że zbiory $A^0 + B^0$ i $B^0 + A^0$ są skończone i równoliczne. Uwaga ta dotyczy również $A^0 \cdot B^0$ i $B^0 \cdot A^0$. Stąd i z T5.1 wynika:

$$\overline{A^0 + B^0} = \overline{B^0 + A^0}$$

$$\overline{A^0 \cdot B^0} = \overline{B^0 \cdot A^0}$$

Stąd, z D3.3, D3.4 i wzorów (3) wynikają wzory (1) i (2).

Zajmiemy się teraz szczegółowiej zbiorami, spełniającymi następujące trzy warunki:

- Zbiór uporządkowany X^0 ma element pierwszy;
- Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu ostatniego;
- Każdy przekrój zbioru X^0 jest skokiem.

T5.3. Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki a-c, to zbiory te są podobne.

Dow. Określimy indukcyjnie ciąg nieskończony

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

Wyrazem a_1 jest pierwszy element zbioru A^0 . Istnienie tego elementu jest zagwarantowane przez to, że zbiór A^0 spełnia warunek a. Załóżmy, że zostały już określone elementy $a_1, a_2, \dots, a_k$ ciągu (1). Następujące równoważności wyznaczają dwa podzbiory zbioru uporządkowanego A^0 :

$$x \in A_1^0 \equiv x \prec a_k \vee x = a_k$$

$$x \in A_2^0 \equiv a_k \prec x$$

Stąd, że zbiór A^0 spełnia warunek b, wynika, że zbiór A_2^0 jest niepusty. Łatwo sprawdzić, że para uporządkowana $\langle A_1^0, A_2^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru A^0 . Stąd, że zbiór ten spełnia warunek c wynika, że zbiór A_2^0 ma element pierwszy. Niech element ten będzie $(k+1)$ -szym wyrazem ciągu (1). W podobny sposób określamy ciąg nieskończony

$$(2) \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

którego wyrazami są elementy zbioru B^0 .

Określimy jeszcze relację R :

$$(3) \quad aRb \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} (a = a_i \wedge b = b_i)$$

Wykażemy przede wszystkim, że

$$(4) \quad D_1(R) = A$$

Z (3) wynika, że zbiór $D_1(R)$ jest równy zapasowi ciągu (1). Oczywiście jest też, że każdy wyraz tego ciągu jest elementem zbioru A^0 . Dla udowodnienia wzoru (4) wystarczy więc wykazać, że każdy element zbioru A^0 jest jednym z wyrazów ciągu (1). Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że pewien element a zbioru A^0 jest różny od każdego z wyrazów ciągu (1). Wynika stąd łatwo, że element a spełnia jeden z trzech warunków:

- $a \prec a_1$
- $\sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k \prec a \prec a_{k+1})$
- $\prod_{i \in \mathbb{N}} a_i \prec a$

Przypadek α nie może jednak zachodzić, gdyż a_1 jest pierwszym elementem zbioru A^0 . Gdyby zachodził przypadek β , to — jak łatwo zauważyć — element a nie należałby do żadnego ze zbiorów A_1^0 i A_2^0 , określonych na początku dowodu, co jest niemożliwe ze względu na to, że para $\langle A_1^0, A_2^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru A^0 . Załóżmy teraz, że zachodzi przypadek γ . Następujące równoważności wyznaczają dwa podzbiory zbioru uporządkowanego A^0 :

$$x \in A_3^0 \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} x \prec a_i$$

$$x \in A_4^0 \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} a_i \prec x$$

Łatwo spostrzec, że para $\langle A_3^0, A_4^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru A^0 , przy czym zbiór A nie ma elementu ostatniego. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z założeniem, że zbiór A^0 spełnia warunek c. Przypadek γ nie może zatem również zachodzić. Wzór (4) jest więc prawdziwy.

Dowód, że

$$D_p(R) = B$$

jest analogiczny.

Łatwy dowód, że relacja R spełnia pozostałe ze wzorów I, podanych w dowodzie T5.1, pozostawiamy czytelnikowi. Stąd, że relacja R spełnia te wzory, i z D2.4 wynika, że $A^0 \simeq_R B^0$. Stąd i z D2.5 wynika twierdzenie:

$$D5.1. \quad \omega = \overline{A^0} \equiv \text{zbiór } A^0 \text{ spełnia warunki a-c}$$

Widoczne jest, że zbiór $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ spełnia warunki a-c. Stąd Wniosek 5.2.

$$\omega = \overline{\langle \mathbb{N}, < \rangle}$$

Wzór ten może spełniać rolę definicji typu porządkowego ω .

Każdy więc zbiór uporządkowany, spełniający warunki a-e, jest przeliczalny. Liczba kardynalna κ_0 może więc być określona niezależnie od pojęcia liczby naturalnej. O ile jednak budujemy teorię mnogości nie zakładając

arytmetyki liczb naturalnych, musimy przyjąć aksjomat, gwarantujący istnienie co najmniej jednego zbioru przeliczalnego.

Zajmiemy się z kolei zbiorami spełniającymi warunki:

- a'. Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu pierwszego ani ostatniego,
 b'. " " " jest przeliczalny,
 c'. " " " jest gęsty.

T5.4. Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki a'-c', to zbiory te są podobne.

Dow. Z założenia, że zbiory A^0 i B^0 spełniają warunek b', i z T7.3 z rozdziału I wynika istnienie ciągów nieskończonych

- (1) $a_1, a_2, a_3, \dots$
 (2) $b_1, b_2, b_3, \dots$

spełniających warunki:

zapasami ciągów (1) i (2) są odpowiednio zbiory A i B ;

jeśli $i \neq j$, to $a_i \neq a_j$ oraz $b_i \neq b_j$.

Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg nieskończony

- (3) $b_{t_1}, b_{t_2}, b_{t_3}, \dots$

Niech wyraz $b_{t_1} = b_1$. Założmy, że określiliśmy już wyrazy $b_{t_1}, b_{t_2}, \dots, b_{t_k}$. Założmy też, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n nie większych od k zachodzi wzór

- (4) $a_m \prec_A a_n \equiv b_{t_m} \prec_B b_{t_n}$.

Widoczne jest, że wyraz a_{k+1} ciągu (1) spełniać musi jeden z warunków:

- α . $\prod_{j \leq k} a_{k+1} \prec_A a_j$
 β . $a_j \prec_A a_{k+1} \wedge \sum_{1 \leq m \leq k} a_j \prec_A a_m \wedge \sim \sum_{1 \leq m \leq k} a_j \prec_A a_m \prec a_{k+1}$
 γ . $\prod_{j \leq k} a_j \prec_A a_{k+1}$

W każdym z tych przypadków wyraz $b_{t_{k+1}}$ ciągu (3) niech będzie równy wyrazowi b_i , będącemu pierwszym wyrazem ciągu (2), spełniającym odpowiednio warunek:

- α' . $\prod_{j \leq k} b_i \prec_B b_j$
 β' . $b_j \prec_B b_i \wedge \sum_{1 \leq m \leq k} b_j \prec_B b_m \wedge \sim \sum_{1 \leq m \leq k} b_j \prec_B b_m \prec b_i$
 γ' . $\prod_{j \leq k} b_j \prec_B b_i$

Istnienie wyrazu b_i wynika:

* przypadku α' i γ' — stąd, że zbiór B^0 spełnia warunek a'.

* przypadku β' — stąd, że zbiór B^0 spełnia warunek c' i ze wzoru (4).

Widoczne jest, że wzór (4) pozostanie prawdziwy, gdy m i n będą mogły przyjmować również wartość $k+1$. Wzór ten jest więc prawdziwy dla wszystkich wyrazów ciągów (1) i (3).

Następująca równoważność określa relację R :

$$aRb \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} (a = a_k \wedge b = b_k)$$

Wykażemy, że każdy wyraz ciągu (2), a więc każdy element zbioru B jest jednym z wyrazów ciągu (3). Założmy na chwilę, że tak nie jest, i niech b_l będzie pierwszym wyrazem ciągu (2), który nie wszedł do ciągu (3). Każdy więc z wyrazów $b_1, \dots, b_{l-1}$ jest równy pewnemu wyrazowi ciągu (3). Oznaczmy przez b_{t_l} wyraz tego ciągu spełniający wzór

$$b_{t_l} = b_l, \quad \text{gdzie } l = 1, \dots, l-1.$$

Niech k będzie największą z liczb $r_1, \dots, r_{l-1}$. Założmy dalej, że b_l spełnia warunek α' oraz że a_s jest pierwszym wyrazem ciągu (1) wcześniejszym w zbiorze A^0 od każdego z wyrazów

- (5) $a_1, \dots, a_k$

ciagu (1). Każdy więc z wyrazów $a_{k+1}, \dots, a_{s-1}$ jest późniejszy od jednego co najmniej z wyrazów (5). Wyraz a_s jest więc wcześniejszy od każdego z wyrazów $a_1, \dots, a_{s-1}$. Stąd, że wzór (4) spełniony jest dla wszystkich wyrazów ciągów (1) i (3), wynika, że każdy z wyrazów $b_{t_{k+1}}, \dots, b_{t_{s-1}}$ jest późniejszy w zbiorze B^0 od jednego co najmniej z wyrazów $b_{t_1}, \dots, b_{t_k}$. Wyraz b_l jest więc wcześniejszy od każdego z wyrazów $b_{t_1}, \dots, b_{t_{s-1}}$, przy czym b_l jest pierwszym wyrazem ciągu (2) spełniającym ten warunek, gdyż każdy z wyrazów $b_1, \dots, b_{l-1}$ jest równy jednemu spośród wyrazów $b_{t_1}, \dots, b_{t_{s-1}}$. Stąd i z definicji ciągu (3) wynika, że $b_l = b_{t_s}$. Analogiczne dowody, że b_l jest jednym z wyrazów ciągu (3) w przypadkach, gdy wyraz ten spełnia warunek β' lub γ' , pozostawiamy czytelnikowi. Z dotychczasowych rozważań wynika, że $D_p(R) = B$. Wykazanie prawdziwości pozostałych ze wzorów I, podanych w dowodzie T5.1, nie sprawia trudności.

Relacja R ustala więc podobieństwo zbiorów A^0 i B^0 . Stąd wynika już T5.4.

Udowodnione twierdzenie pozwala przyjąć następującą definicję:

- D5.2. $\eta = \overline{A^0} \equiv$ zbiór A^0 spełnia warunki a'-c'

Widoczne jest, że zbiór $\langle \mathbb{B}, < \rangle$ spełnia warunki a'-c'.
 Wniosek 5.3.

$$\eta = \overline{\langle \mathbb{B}, < \rangle}$$

Wzór ten może służyć za definicję typu porządkowego η .

Rozważmy teraz zbiory spełniające warunki:

- a". Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu pierwszego ani ostatniego;
 b". Zbiór uporządkowany X^0 jest ciągły;

$$c". \sum_{\overline{W}} |W^0 \subset X^0 \wedge \overline{W} = \kappa_0 \wedge \prod_x \prod_y [x \prec_X y \rightarrow \sum_{w \in W} (x \prec_X w \prec_X y)]|.$$

Podajemy słowne sformułowanie warunku c":

Istnieje podzbiór przeliczalny W^0 zbioru X^0 taki, że dla każdych dwóch (różnych) elementów zbioru X^0 istnieje pośredni element podzbioru W .

T5.5. Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki a"-c", to zbiory te są podobne.

Dow. * Niech W_1^0 i W_2^0 będą odpowiednio przeliczalnymi podzbiórmi zbiorów A^0 i B^0 , spełniającymi warunki:

$$(1) \quad \prod_x \prod_y [x \prec_A y \rightarrow \sum_{w \in W_1} (x \prec_A w \prec_A y)] \\ \prod_x \prod_y [x \prec_B y \rightarrow \sum_{w \in W_2} (x \prec_B w \prec_B y)]$$

Istnienie takich podzbiorów zagwarantowane jest przez założenie, że zbiory A^0 i B^0 spełniają warunek c". Łatwo zauważyć, że zbiory W_1^0 i W_2^0 spełniają warunki a'-c'. W myśl więc T5.4 są one podobne. Niech relacja S ustala podobieństwo zbiorów W_1^0 i W_2^0 .

Niech x będzie dowolnym elementem zbioru A^0 . Oznaczmy przez A_1^0 podzbiór zbioru A^0 , do którego należą wszystkie elementy tego zbioru wcześniejsze w nim od elementu x , przez A_2^0 — podzbiór zbioru A^0 , do którego należą wszystkie pozostałe elementy tego zbioru. Łatwo spostrzec, że para uporządkowana $\langle A_1^0, A_2^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru A^0 i że x jest pierwszym elementem zbioru A_2^0 . Oznaczmy przez C^0 iloczyn zbiorów W_1 i A_1^0 , przez B_1^0 — podzbiór zbioru B^0 , do którego należy każdy element a tego zbioru, dla którego istnieje element zbioru $S(C)$ późniejszy w zbiorze B^0 od a . Oznaczmy jeszcze przez B_2^0 podzbiór zbioru B^0 , do którego należą wszystkie elementy tego zbioru, które nie należą do B_1^0 . Łatwo dostrzec, że para uporządkowana $\langle B_1^0, B_2^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru B^0 i że zbiór B_1^0 nie ma elementu ostatniego. Stąd, że zbiór A_1^0 nie ma elementu ostatniego, i że wzoru (1) wynika, że zbiór C^0 , będący podzbiorem zbioru A^0 , nie ma elementu ostatniego. Nie ma więc też elementu ostatniego zbiór $S(C)$, będący podzbiorem zbioru B^0 . Stąd wynika, że zbiór B_1^0 nie ma elementu ostatniego.

Stąd i z założenia, że zbiór B^0 spełnia warunek b", wynika istnienie pierwszego elementu zbioru B_1^0 . Oznaczmy przez y ten element i przyporządkujmy go elementowi x . W ten sposób każdemu elementowi zbioru A^0 został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru B^0 . O ile przyporządkowanie to,

będące oczywiście pewną relacją, oznaczmy przez R , otrzymamy wzory:

$$(2) \quad D_1(R) = A$$

$$(3) \quad R \in \text{funke}$$

W podobny sposób możemy przyporządkować dowolnemu elementowi y zbioru B^0 dokładnie jeden element zbioru A^0 . Łatwo zauważyć, że w ten sposób przyporządkowane elementy x i y pozostają w relacji R . Stąd

$$(4) \quad D_p(R) = B$$

$$(5) \quad R^{-1} \in \text{funke}$$

Ze wzorów (3) i (5) wynika, że $R \in 1-1$. Sprawdzenie, że spełniony jest też trzeci spośród wzorów I, podanych w dowodzie T5.1, pozostawiamy czytelnikowi.

Zbiory A^0 i B^0 są więc podobne.

Udowodnione twierdzenie pozwala przyjąć następującą definicję:

$$D5.3. \quad \lambda = \overline{A^0} \equiv \text{zbiór } A^0 \text{ spełnia warunki a"-c"}$$

Łatwo zauważyć, że zbiór $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ spełnia warunki a"-c", przy czym zbiorem W , o którym mówi warunek c", jest zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Stąd

Wniosek 5.4.

$$\lambda = \overline{\langle \mathbb{R}, < \rangle}$$

Wzór ten może grać rolę definicji typu porządkowego λ .

Wśród przekrojów danego zbioru uporządkowanego A^0 , nie będących skokami ani też lukami, występują pary przekrojów tym tylko różniące się, że pewien element a zbioru A^0 jest ostatnim elementem klasy dolnej jednego z tych przekrojów i jednocześnie pierwszym elementem klasy górnej drugiego przekroju. Przekrojami takimi są np. przekroje zbioru $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, w jednym z których klasą górną jest zbiór wszystkich liczb dodatnich, w drugim zaś klasą dolną jest zbiór wszystkich liczb ujemnych.

Usuńmy ze zbioru wszystkich przekrojów zbioru A^0 te przekroje, należące do secharakteryzowanych przed chwilą par, w których klasa dolna ma element ostatni. Otrzymany w ten sposób zbiór nazywać będziemy zbiorem wszystkich przekrojów właściwych zbioru A^0 .

Z określenia tego i D4.4a wynika

Wniosek 5.5. W żadnym z przekrojów, należących do zbioru przekrojów właściwych zbioru gęstego, klasa dolna nie ma elementu ostatniego.

Łatwo spostrzec, że relacja R , określona wzorem

$$II. \quad \langle A_1^0, B_1^0 \rangle R \langle A_2^0, B_2^0 \rangle \equiv A_1 \subsetneq A_2$$

porządkuje zbiór wszystkich przekrojów właściwych zbioru A^0 .

* Dowód, który podajemy, jest dowodem skrótowym.

L5.2. Jeśli zbiór uporządkowany A^0 jest gęsty, to zbiór $\mathfrak{U}^0$ wszystkich jego przekrojów właściwych uporządkowany przez relację R , określoną wzorem II, jest również gęsty.

Dow. Należy wykazać, że żaden przekrój $\langle \mathfrak{U}_1^0, \mathfrak{B}_1^0 \rangle$ zbioru $\mathfrak{U}^0$ nie jest skokiem. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że przekrój $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle$ zbioru A^0 jest ostatnim elementem klasy $\mathfrak{U}_1^0$, przekrój zaś $\langle A_2^0, B_2^0 \rangle$ zbioru A^0 jest pierwszym elementem klasy $\mathfrak{B}_1^0$. Widoczne jest, że

$$\langle A_1^0, B_1^0 \rangle \prec_{\mathfrak{U}} \langle A_2^0, B_2^0 \rangle$$

Stąd i ze wzoru II wynika, że $A_1 \subsetneq A_2$. Istnieje więc taki element a zbioru A , że

$$(1) \quad a \in A_1 \wedge a \in A_2$$

Z wniosku 5.5 wynika też istnienie elementu a_1 , spełniającego warunek:

$$(2) \quad a \prec_A a_1 \wedge a_1 \in A_2$$

Następujące wzory wyznaczają podzbiory zbioru A^0 :

$$(3) \quad x \in A_1^0 \equiv x \prec_A a_1, \quad x \in B_1^0 \equiv a_1 \prec_A x \vee x = a_1$$

Widoczne jest, że para uporządkowana $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle$ jest elementem zbioru $\mathfrak{U}$. Ze wzorów jednak (1)-(3) i II wynika

$$\langle A_1^0, B_1^0 \rangle \prec_{\mathfrak{U}} \langle A_2^0, B_2^0 \rangle \prec_{\mathfrak{U}} \langle A_2^0, B_2^0 \rangle$$

Przekrój $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle$ nie jest więc elementem klasy $\mathfrak{U}_1^0$ ani też klasy $\mathfrak{B}_1^0$. Wniosek ten jest sprzeczny z założeniem, że para uporządkowana $\langle \mathfrak{U}_1^0, \mathfrak{B}_1^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru $\mathfrak{U}^0$. Zbiór ten jest więc gęsty.

T5.6. Jeśli zbiór uporządkowany A^0 jest gęsty, to zbiór $\mathfrak{U}^0$ wszystkich jego przekrojów właściwych, uporządkowany przez relację R , określoną wzorem II, jest ciągły.

Dow. Niech para uporządkowana $\langle \mathfrak{U}_1^0, \mathfrak{B}_1^0 \rangle$ będzie dowolnym przekrojem zbioru $\mathfrak{U}^0$. Załóżmy, że przekrój ten jest luką. Następujące równoważności wyznaczają podzbiory A_1^0 i B_1^0 zbioru uporządkowanego A^0 :

$$(1) \quad \begin{aligned} x \in A_1^0 &\equiv \sum_X \sum_Y (\langle X^0, Y^0 \rangle \in \mathfrak{U}_1^0 \wedge x \in X) \\ y \in B_1^0 &\equiv \sum_X \sum_Y (\langle X^0, Y^0 \rangle \in \mathfrak{B}_1^0 \wedge y \in Y) * \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że para uporządkowana $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle$ jest przekrojem właściwym zbioru A^{0**} . Załóżmy, że $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle \in \mathfrak{U}_1^0$. Z założenia, że przekrój $\langle \mathfrak{U}_1^0, \mathfrak{B}_1^0 \rangle$ jest luką, wynika istnienie takiego przekroju $\langle A_2^0, B_2^0 \rangle$ zbioru A^0 , że

$$\langle A_2^0, B_2^0 \rangle \in \mathfrak{U}_1^0 \wedge \langle A_1^0, B_1^0 \rangle \prec_{\mathfrak{U}} \langle A_2^0, B_2^0 \rangle$$

* Zbiór A , jest więc sumą wszystkich klas dolnych przekrojów, należących do klasy $\mathfrak{U}_1^0$, zbiór B , sumą wszystkich klas górnych przekrojów — należących do klasy $\mathfrak{B}_1^0$.
** Por. ćwiczenie 5, § 4.

Stąd i ze wzoru II wynika, że $A_1 \subsetneq A_2$. Wniosek ten jest jednak sprzeczny ze wzorem (1). W podobny sposób można wykazać, że przekrój ten nie jest też elementem klasy $\mathfrak{B}_1^0$. Żaden więc przekrój zbioru $\mathfrak{U}^0$ nie jest luką.

Z L5.2 wynika, że żaden przekrój zbioru $\mathfrak{U}^0$ nie jest też skokiem. Zbiór ten jest więc ciągły.

W teorii liczb rzeczywistych Dedekinda, o której wspomnieliśmy na początku poprzedniego paragrafu, liczby rzeczywiste zdefiniowane są jako przekroje właściwe zbioru liczb wymiernych, uporządkowanego według wielkości. Wzór II określa relację mniejszości tak rozumianych liczb rzeczywistych. Z T5.6 wynika, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, uporządkowanych według wielkości jest zbiorem ciągłym.

$$D5.4. \quad \beta = a^* \equiv \sum_X \sum_R (a = \langle X, R \rangle \wedge \beta = \langle X, R^{-1} \rangle)$$

Definicję tę można zapisać krócej, w postaci:

$$a = \langle X, R \rangle \rightarrow a^* = \langle X, R^{-1} \rangle$$

lub też w postaci:

$$(\langle X, R \rangle)^* = \langle X, R^{-1} \rangle$$

Typ porządkowy a^* nazywamy typem odwrotnym względem typu porządkowego a . Jeśli a jest typem porządkowym zbioru X uporządkowanego przez relację R , to a^* jest typem porządkowym zbioru X uporządkowanego przez relację odwrotną względem R , czyli konwers relacji R . Z definicji D5.4 i wniosku 5.2 wynika, że $\omega^* = \langle \mathfrak{N}, > \rangle$. Typ porządkowy ω^* jest więc typem porządkowym zbiorów uporządkowanych, które nie mają elementu pierwszego, mają element ostatni i w których każdy przekrój jest skokiem. Jak łatwo zauważyć, jest to typ porządkowy zbioru liczb całkowitych ujemnych, uporządkowanego przez relację $<$.

Z przykładu tego widać, że typ a^* może być różny od typu a . W pewnych jednak przypadkach typ odwrotny względem typu porządkowego a jest identyczny z typem a . Tak więc np. z T5.1 wynika, że $n^* = n$ (gdzie n jest typem porządkowym zbioru skończonego), z T5.4 i T5.5 wynika, że $\eta = \eta^*$, $\lambda^* = \lambda$. Można też wykazać, że $(\omega^* + \omega)^* = \omega^* + \omega$.

Typ porządkowy $\omega^* + \omega$ jest to typ porządkowy zbioru liczb całkowitych, uporządkowanego przez relację $<$. Zbiory uporządkowane tego typu nie mają ani elementu pierwszego, ani elementu ostatniego, a każdy ich przekrój jest skokiem.

Ćwiczenia

1. Podać przykłady zbiorów uporządkowanych, spełniających dwa spośród warunków a-o, o których jest mowa w T5.3, nie spełniających jednak warunku trzeciego.
Rozwiązać analogiczne ćwiczenia dotyczące warunków a'-o', o których jest mowa w T5.4, oraz warunków a''-o'', o których jest mowa w T5.5.

2. Wykazać, że typ porządkowy α dowolnego przeliczalnego zbioru gęstego spełnia jeden z czterech warunków:

$$\alpha = \eta, \quad \alpha = 1 + \eta, \quad \alpha = \eta + 1, \quad \alpha = 1 + \eta + 1.$$

3. Wykazać, że dla dowolnego typu porządkowego α zachodzi wzór:

$$\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$$

4. Udowodnić wzory:

- $\omega = 1 + \omega = 2 + \omega = \dots = n + \omega$
- $\omega = 2\omega = 3\omega = \dots = n \cdot \omega$
- $\eta = \eta + \eta = \eta + 1 + \eta = \eta \cdot \eta$
- $\lambda = \lambda + 1 + \lambda$
- $(\omega + 1) + \omega = \omega + \omega$

5. Wykazać fałszywość następujących wzorów:

- $\omega = \omega + 1$
- $2\omega = \omega + \omega$
- $\eta = \eta + 2 + \eta$
- $\lambda = \lambda + 2 + \lambda$
- $\lambda = \lambda + \lambda$
- $2\eta = \eta$
- $\lambda = \lambda \cdot \lambda$

6. Udowodnić wzory:

- $(\alpha^*)^* = \alpha$
- $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$
- $(\alpha \cdot \beta)^* = \alpha^* \cdot \beta^*$
- $\omega^* = \omega^* + 1$

7. Wykazać fałszywość wzorów:

- $\omega + \omega^* = \omega^* + \omega$
- $(\alpha \cdot \beta)^* = \beta^* \cdot \alpha^*$

8. Wykazać, że dwa zbiory uporządkowane, z których każdy jest podobny do podzbioru zbioru drugiego, mogą nie być podobne.

§ 6. ZBIORY DOBRZE UPORZĄDKOWANE. LICZBY PORZĄDKOWE

D6.1. Zbiór uporządkowany A^0 jest zbiorem dobrze uporządkowanym = $\prod_{0 \neq B^0 \subset A^0} \sum_b (b \text{ jest elementem pierwszym zbioru } B^0)$.

Zbiór jest więc dobrze uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego niepusty podzbiór ma element pierwszy.

Z D6.1 i L5.1 wynika natychmiast, że każdy skończony zbiór uporządkowany jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Dobrze uporządkowany jest też zbiór $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, nie są natomiast zbiorami dobrze uporządkowanymi zbiory $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Z T4.2a wynika

Wniosek 6.1. Zbiór podobny do zbioru dobrze uporządkowanego jest też dobrze uporządkowany.

D6.2. $\alpha \in \text{Lp} \iff \sum_{A^0} (A^0 \text{ jest zbiorem dobrze uporządkowanym} \wedge \alpha = \overline{A^0})$

Wyrażenie $\alpha \in \text{Lp}$ czytamy: α jest liczbą porządkową. Liczby porządkowe są więc typami porządkowymi zbiorów dobrze uporządkowanych.

Z poprzednich uwag i wniosków 5.2-5.4 wynika, że spośród typów porządkowych ω , η i λ liczbą porządkową jest tylko typ ω . Zauważmy dalej, że o ile traktować będziemy liczby naturalne jako typy porządkowe zbiorów skończonych (por. uwagi poprzedniego paragrafu), to liczby naturalne będą szczególnymi przypadkami liczb porządkowych. Również liczba zero, rozumiana jako typ porządkowy zbioru pustego (por. ćwiczenie 8 paragrafu 2), jest — w myśl D6.1 i D6.2 — liczbą porządkową.

T6.1. Każdy podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego jest dobrze uporządkowany.

Dow. Niech B^0 będzie dowolnym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego A^0 , C^0 zaś dowolnym niepustym podzbiorem zbioru B^0 . Łatwo zauważyć, że zbiór C^0 jest podzbiorem zbioru A^0 . Zbiór C^0 ma więc element pierwszy. Wykazaliśmy więc, że każdy niepusty podzbiór zbioru B^0 ma element pierwszy. Stąd i z D6.1 wynika, że zbiór ten jest dobrze uporządkowany.

T6.2. Suma i iloczyn zbiorów dobrze uporządkowanych są zbiorami dobrze uporządkowanymi.

Dow. Niech A^0 i B^0 będą dowolnymi zbiorami dobrze uporządkowanymi i niech C^0 będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $A^0 + B^0$. Jeśli $A \cdot C \neq 0$, to przyjmujemy, że elementy zbioru D^0 , którego zapasem jest zbiór $A \cdot C$, są uporządkowane tak jak w zbiorze A^0 . Zbiór D^0 jest — oczywiście — niepustym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego A^0 , ma więc element pierwszy. Łatwo dostrzec, że element ten jest jednocześnie elementem pierwszym podzbioru C^0 . Jeśli zaś $A \cdot C = 0$, to zbiór C^0 jest podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego B^0 , ma więc element pierwszy. Wykazaliśmy więc, że w obu możliwych przypadkach dowolny niepusty podzbiór zbioru $A^0 + B^0$ ma element pierwszy. Zbiór $A^0 + B^0$ jest więc zbiorem dobrze uporządkowanym.

Niech teraz C^0 będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $A^0 \cdot B^0$. Oznaczmy przez A_1^0 podzbiór zbioru A^0 , którego elementami są te i tylko te elementy zbioru A , które są pierwszymi elementami par uporządkowanych, należących do zbioru C . Analogicznie określamy podzbiór B_1^0 zbioru B^0 . Łatwo spostrzec, że zbiory A_1^0 i B_1^0 są niepuste. Niech a_0 i b_0 będą odpowiednio elementami pierwszymi tych zbiorów. Widoczne jest, że para $\langle a_0, b_0 \rangle$ jest elementem pierwszym zbioru C^0 . Zbiór $A^0 \cdot B^0$ jest więc też dobrze uporządkowany.

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że działania na liczbach porządkowych możemy określić jako szczególne przypadki odpowiednich działań na typach porządkowych. Wynika stąd natychmiast, że twierdzenia z arytmetyki

typów porządkowych, udowodnione w paragrafie 3, pozostają prawdziwe w arytmetyce liczb porządkowych.

Zauważmy jeszcze, że prawa przemienności dodawania i mnożenia fałszywe są nie tylko dla typów porządkowych, lecz również dla liczb porządkowych. Świadczą o tym następujące nierówności:

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega$$

$$\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$$

których łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Zauważmy jeszcze, że zbiór dobrze uporządkowany, którego zapasem jest zbiór A , oznaczamy będziemy przez A^+ .

Ćwiczenia

1. Wykazać, że następująca definicja jest równoważna D6.1:

Zbiór uporządkowany A^+ jest dobrze uporządkowany $\equiv \prod_{0 \neq B \subseteq A^+} \sum_b (b \text{ jest pierwszym elementem zbioru } B^+)$.

2. Wykazać, że żaden przekrój zbioru dobrze uporządkowanego nie jest luką.
3. Wykazać, że żaden zbiór dobrze uporządkowany nie zawiera podzbioru typu ω^* .

§ 7. ODCINKI ZBIORU DOBRZE UPORZĄDKOWANEGO

$$D7.1. \quad X^+ = A(a) \equiv X^+ \subset A^+ \wedge \prod_x (x \in X \equiv x \prec_A a)$$

Zbiór $A(a)$ nazywamy odcinkiem zbioru dobrze uporządkowanego A^+ , wyznaczonym przez element a tego zbioru. Odcinek $A(a)$ jest więc zbiorem wszystkich elementów zbioru A^+ wcześniejszych w tym zbiorze od a , przy czym elementy odcinka $A(a)$ są w nim tak uporządkowane jak w zbiorze A^+ .

Z D7.1 i T6.1 wynika

Wniosek 7.1. Dowolny odcinek zbioru dobrze uporządkowanego jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Zauważmy jeszcze, że odcinek wyznaczony przez pierwszy element zbioru A^+ jest zbiorem pustym.

$$D7.3. \quad a_1, a_2 \in A^+ \rightarrow [A(a_1) \subset A(a_2) \equiv a_1 \prec_A a_2]$$

Zdefiniowaną relację nazywamy relacją mniejszości. Polem tej relacji jest zbiór wszystkich odcinków danego zbioru dobrze uporządkowanego.

T7.1. Relacja przyporządkowująca każdemu elementowi a zbioru A^+ odcinek $A(a)$ ustala podobieństwo zbioru A^+ i zbioru wszystkich jego odcinków, uporządkowanych przez relację mniejszości.

Łatwy dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Z T7.1 i wniosku 6.1 wynika natychmiast

Wniosek 7.2. Zbiór wszystkich odcinków zbioru A^+ , uporządkowany przez relację mniejszości, jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

$$L7.1. \quad A^+ \simeq B^+ \rightarrow \prod_{a \in A} \sum_{b \in B} [A(a) \simeq B(b)]$$

Dow. Załóżmy, że relacja E ustala podobieństwo zbiorów A^+ i B^+ oraz że a jest dowolnym elementem zbioru A . Przyjmijmy też, że $b = E(a)$. Łatwo dostrzec, że $A(a) \simeq B(b)$. Lemat jest więc prawdziwy.

W określeniu, które podamy, występuje symbol Y^X . Definicją tego symbolu jest D8.3 z poprzedniego rozdziału.

$$D7.3. \quad R \in \text{fr}(A^+) \equiv R \in A^+ \wedge \prod_x \prod_y [x \prec_A y \rightarrow R(x) \prec_A R(y)]$$

Wyrażenie $R \in \text{fr}(A^+)$ czytamy: R jest funkcją rosnącą, określoną w zbiorze A^+ .

$$L7.2. \quad R \in \text{fr}(A^+) \rightarrow \sim [R(a) \prec_A a]$$

Funkcja rosnąca, określona w pewnym zbiorze, nie może więc przyporządkowywać żadnemu elementowi tego zbioru elementu wcześniejszego.

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że dla pewnego $a \in A^+$

$$(1) \quad R(a) \prec_A a$$

Oznaczmy przez A_1^+ podzbiór zbioru A^+ , którego elementami są te i tylko te elementy zbioru A^+ , które spełniają wzór (1). Zbiór A_1^+ jest więc niepusty. Niech a_0 będzie pierwszym jego elementem. Stąd

$$(2) \quad R(a_0) \prec_A a_0$$

oraz dla każdego x :

$$(3) \quad x \prec_A a_0 \rightarrow \sim [R(x) \prec_A x]$$

Przyjmując, że $x = R(a_0)$, otrzymujemy ze wzorów (2) i (3) następujący wzór:

$$(4) \quad \sim [R(R(a_0)) \prec_A R(a_0)]$$

Z drugiej strony, ze wzoru (2) i założenia, że funkcja R jest rosnącą, otrzymujemy

$$R(R(a_0)) \prec_A R(a_0)$$

Wzór ten jest sprzeczny ze wzorem (4). Założenie (1) prowadzi więc do sprzeczności.

$$L7.3. \quad \sim [A^+ \simeq A(a)]$$



Zbiór dobrze uporządkowany nie jest więc podobny do żadnego ze swych odcinków.

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że dla pewnego $a_1 \in A$

$$(1) \quad A^+ \simeq A(a_1)$$

Oznaczmy przez R relację ustalającą podobieństwo tych zbiorów. Z D2.4 otrzymujemy:

$$(2) \quad x \prec_A y \rightarrow R(x) \prec_{A(a_1)} R(y)$$

Relacja R jest więc funkcją rosnącą określoną w zbiorze A^+ . Stąd i z L7.2 wynika, że

$$(3) \quad \sim(R(a_1) \prec_A a_1)$$

Stąd jednak, że $A^+ \simeq_R A(a_1)$ i $a_1 \in A$ wynika, że $R(a_1) \prec_A a_1$. Wniosek ten jest sprzeczny ze wzorem (3). Założenie (1) prowadzi więc do sprzeczności.

$$\text{L7.4.} \quad a_1, a_2 \in A^+ \wedge A(a_1) \simeq A(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

Dow. Załóżmy, że $a_1 \neq a_2$. Stąd, z L7.3 i uwagi, że z dwóch (różnych) odcinków tego samego zbioru dobrze uporządkowanego zawsze jeden jest odcinkiem pozostałego, wynika, że

$$\sim[A(a_1) \simeq A(a_2)]$$

Lemat jest więc prawdziwy.

$$\text{L7.5.} \quad \prod_{a \in A^+} \sum_{b \in B^+} [A(a) \simeq B(b)] \wedge \prod_{b \in B^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq B(b)] \rightarrow A^+ \simeq B^+$$

Jeśli więc dla każdego odcinka zbioru A^+ istnieje podobny do niego odcinek zbioru B^+ i odwrotnie, to zbiory A^+ i B^+ są podobne.

Dow. Wykażemy, że podobieństwo zbiorów A^+ i B^+ ustala relacja R , określona przez równoważność:

$$(1) \quad aRb \equiv A(a) \simeq B(b)$$

Z założeń lematu i wzoru (1) wynika:

$$(2) \quad D_l(R) = A, \quad D_p(R) = B$$

Założmy, że

$$aRb_1 \quad \text{i} \quad aRb_2$$

Stąd i ze wzoru (1) wynikają wzory:

$$A(a) \simeq B(b_1), \quad A(a) \simeq B(b_2)$$

Stąd z kolei i z T2.1b, c wynika, że $B(b_1) \simeq B(b_2)$. Na podstawie L7.4 wnioskujemy więc, że $b_1 = b_2$. W podobny sposób można wykazać, że z założeń $a_1 R b$

i $a_2 R b$ wynika, że $a_1 = a_2$. Relacja R jest więc doskonała. Stąd i ze wzorów (2) wynika:

$$(3) \quad A \sim_R B$$

Założmy teraz, że

$$(4) \quad a_1 \prec_A a_2$$

oraz, że

$$(5) \quad a_1 R b_1 \quad \text{i} \quad a_2 R b_2$$

Ze wzorów (1) i (5) wynika:

$$(6) \quad A(a_1) \simeq B(b_1)$$

$$(7) \quad A(a_2) \simeq B(b_2)$$

Ze wzoru (4) wynika, że $a_1 \in A(a_2)$. Stąd, z L7.1 i wzoru (7) wynika istnienie takiego elementu b' , że

$$(8) \quad b' \in B(b_2)$$

$$(9) \quad A(a_1) \simeq B(b')$$

Ze wzorów (6) i (9) wnioskujemy, że $B(b_1) \simeq B(b')$. W myśl więc L7.4 $b_1 = b'$. Stąd i ze wzoru (8) wynika, że $b_1 \in B(b_2)$, a więc

$$(10) \quad b_1 \prec_B b_2$$

Stąd, że ze wzorów (4) i (5) uzyskaliśmy wzór (10), oraz ze wzoru (3) wynika teza lematu:

L7.6. Jeśli b_0 jest pierwszym elementem zbioru B^+ , spełniającym warunek

$$\prod_{a \in A^+} \sim[A(a) \simeq B(b)]$$

i jeśli $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ oraz

$$(1) \quad A(a_1) \simeq B(b_1)$$

to

$$b_1 \in B(b_0)$$

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że

$$(2) \quad b_1 \notin B(b_0)$$

Stąd wynika, że bądź $b_0 = b_1$, bądź $b_0 \prec_B b_1$. W przypadku pierwszym wzór (1) przyjmuje postać

$$A(a_1) \simeq B(b_0)$$

Wzór ten jest jednak sprzeczny z założeniem lematu dotyczącym elementu b_0 . Załóżmy więc, że $b_0 \prec_B b_1$. Stąd, z L7.1 i założenia (1) wynika istnienie ele-

mentu a' zbioru $A(a_1)$ takiego, że

$$A(a') \simeq B(b_0)$$

Wniosek ten jest znów sprzeczny z założeniem dotyczącym elementu b_0 . Dowód nie wprost lematu został w ten sposób zakończony.

$$\text{L7.7.} \quad \prod_{a \in A^+} \sum_{b \in B^+} [A(a) \simeq B(b)] \vee \prod_{b \in B^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq B(b)]$$

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że istnieje taki element $a \in A^+$, że

$$(1) \quad \prod_{b \in B^+} \sim [A(a) \simeq B(b)]$$

oraz że istnieje taki element $b \in B^+$, że

$$(2) \quad \prod_{a \in A^+} \sim [A(a) \simeq B(b)]$$

Oznaczmy przez a_0 pierwszy element zbioru A^+ spełniający warunek (1), przez b_0 — pierwszy element zbioru B^+ spełniający warunek (2). Załóżmy, że $a_1 \in A(a_0)$. Stąd $a_1 \prec a_0$. Z określenia elementu a_0 wynika istnienie elementu b_1 zbioru B^+ takiego, że

$$A(a_1) \simeq B(b_1)$$

Stąd i z L7.6 wnioskujemy, że $b_1 \in B(b_0)$.

Wykazaliśmy więc, że

$$(3) \quad \prod_{a \in A(a_0)} \sum_{b \in B(b_0)} [A(a) \simeq B(b)]$$

W podobny sposób można wykazać, że

$$(4) \quad \prod_{b \in B(b_0)} \sum_{a \in A(a_0)} [A(a) \simeq B(b)]$$

Ze wzorów (3) i (4) oraz L7.5 wynika, że $A(a_0) \simeq B(b_0)$. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z określeniem elementu a_0 (jak też z określeniem elementu b_0). Dowód nie wprost lematu został w ten sposób zakończony.

$$\text{L7.2.} \quad A^+ \simeq B^+ \vee \prod_{b \in B} [A^+ \simeq B(b)] \vee \sum_{a \in A} [B^+ \simeq A(a)]$$

Każde więc dwa zbiory dobrze uporządkowane są bądź podobne, bądź jeden z nich jest podobny do odcinka pozostałego.

Dow. Z L7.7. wynika, że spełniony jest co najmniej jeden z następujących warunków:

$$(1) \quad \prod_{a \in A^+} \sum_{b \in B^+} [A(a) \simeq B(b)]$$

$$(2) \quad \prod_{b \in B^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq B(b)]$$

Jeśli prawdziwe są oba te warunki, to w myśl L7.5

$$(3) \quad A^+ \simeq B^+$$

Założmy teraz, że spełniony jest warunek (1), nie jest natomiast spełniony warunek (2), a więc że istnieje element b zbioru B^+ spełniający wzór

$$\prod_{a \in A^+} \sim [A(a) \simeq B(b)]$$

Oznaczmy przez b_0 pierwszy element zbioru B^+ spełniający ten wzór. Przyjmijmy, też że

$$(4) \quad C^+ = B(b_0)$$

Z określenia elementu b_0 i wzoru (4) wynika

$$(5) \quad \prod_{c \in C^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq C(c)]$$

Założmy, że $a_1 \in A^+$. Z założenia prawdziwości wzoru (1) wynika istnienie takiego elementu b_1 zbioru B^+ , że

$$A(a_1) \simeq B(b_1)$$

Stąd i z L7.6 wynika, że $b_1 \in B(b_0)$. Stąd i ze wzoru (4) wynika, że $b_1 \in C^+$ oraz że zbiór $B(b_1)$ jest odcinkiem zbioru C^+ . Wykazaliśmy więc, że

$$(6) \quad \prod_{a \in A^+} \sum_{c \in C^+} [A(a) \simeq C(c)]$$

Z L7.5 i wzorów (5) oraz (6) wynika, że $A^+ \simeq C^+$. Stąd i ze wzoru (4) otrzymujemy:

$$(7) \quad A^+ \simeq B(b_0)$$

W podobny sposób można wykazać, że dla pewnego $a_0 \in A^+$

$$(8) \quad B^+ \simeq A(a_0)$$

Jeden więc co najmniej ze wzorów (3), (7) i (8) jest prawdziwy. T7.2 zostało zatem udowodnione.

Udowodnimy jeszcze

$$\text{L7.8.} \quad A^+ \simeq A_1^+ \wedge B^+ \simeq B_1^+ \wedge \sum_{b \in B} [A^+ \simeq B(b)] \rightarrow \sum_{b \in B_1} [A_1^+ \simeq B_1(b)]$$

Dow. Niech relacja R ustala podobieństwo zbiorów B^+ i B_1^+ . Z trzeciego założenia lematu wynika istnienie takiego elementu b' zbioru B , że

$$(1) \quad A^+ \simeq B(b')$$

Niech b_1 będzie elementem zbioru B_1 spełniającym wzór

$$b_1 = R(b')$$

Stąd i z uwagi, że relacja R ustala podobieństwo zbiorów B^+ i B_1^+ , wynika, że

$$(2) \quad B(b') \simeq B_1(b_1)$$

Z pierwszego założenia lematu, wzorów (1) i (2) oraz uwagi, że relacja $\simeq$ jest przechodnia i symetryczna, wynika, że $A_1^+ \simeq B_1(b_1)$. Stąd wynika już teza lematu.

Z twierdzeń i lematów, udowodnionych w tym paragrafie, skorzystamy w paragrafie następnym.

§ 8. NIERÓWNOŚCI. LICZBY GRANICZNE

Rozważania tego paragrafu będą w wielu punktach analogiczne do rozważań paragrafu 9 poprzedniego rozdziału.

$$D8.1. \quad \overline{A^+} < \overline{B^+} \equiv \sum_b A^+ \simeq B(b)$$

Na to więc, by liczba porządkowa zbioru A^+ była mniejsza od liczby porządkowej zbioru B^+ , potrzeba i wystarcza, by zbiór A^+ był podobny do pewnego odcinka zbioru B^+ . Zauważmy, że z D8.1 i L7.8 wynika: jeśli $\overline{A^+} = \overline{A_1^+}$, $\overline{B^+} = \overline{B_1^+}$ i $\overline{A^+} < \overline{B^+}$, to $\overline{A_1^+} < \overline{B_1^+}$.

Z D8.1 i T2.1a wynika
Wniosek 8.1.

$$\overline{A(a)} < \overline{A^+}$$

W celu prostszego zapisu dalszych dowodów wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\alpha = \overline{A^+}, \quad \beta = \overline{B^+}, \quad \gamma = \overline{C^+}$$

Litery α, β, γ oznaczać więc będą liczby porządkowe.

Z D8.1 i L7.3 wynika

$$L8.1. \quad \alpha < \beta \rightarrow \alpha \neq \beta$$

$$L8.2. \quad \alpha \neq \beta \rightarrow \alpha < \beta \vee \beta < \alpha$$

Lemat jest wnioskiem z T7.2 i D8.1.

$$L8.3. \quad \alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma$$

Dow. Z D8.1 i założeń lematu wynika, że dla pewnego elementu b zbioru B^+ i pewnego elementu c zbioru C^+ spełnione są wzory:

$$(1) \quad A^+ \simeq B(b)$$

$$(2) \quad B^+ \simeq C(c)$$

Z L7.1 i (2) wynika istnienie takiego elementu c_1 zbioru C^+ , że $B(b) \simeq C(c_1)$. Stąd i z (1) wynika

$$A^+ \simeq C(c_1)$$

W myśl więc D8.1 $\alpha < \gamma$.

$$L8.4. \quad \alpha < \beta \rightarrow \sim(\beta < \alpha)$$

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że $\beta < \alpha$. Stąd i z L8.3 wynika, że $\alpha < \alpha$. Wniosek ten jest sprzeczny z L8.1.

Z lematów L8.2, L8.3 i L8.4 wynika

T8.1. Relacja mniejszości porządkuje zbiór liczb porządkowych.

T8.2. Jeśli zbiór $\sum_b (\beta < a)^*$ jest uporządkowany przez relację mniejszości, to

$$a = \overline{\sum_b (\beta < a)^*}$$

Dow. Niech $a = \overline{A^+}$. Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że

$$A^+ \simeq \sum_b (\beta < a)^*$$

Relacją ustalającą podobieństwo tych zbiorów jest relacja R , określona przez równoważność

$$\alpha R \beta \equiv \beta = \overline{A(a)}$$

Szczegółowe sprawdzenie tego pozostawiamy czytelnikowi.

Z T8.2 i wniosku 6.1 wynika

Wniosek 8.1. Zbiór $\sum_b (\beta < a)^*$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

T8.3. Dowolny niepusty zbiór Ψ liczb porządkowych, uporządkowany przez relację mniejszości, ma element pierwszy**.

Dow. Załóżmy — wbrew temu, co chcemy wykazać — że zbiór Ψ nie ma elementu pierwszego i że a jest dowolnym elementem tego zbioru. Stąd wynika, że zbiór $\sum_b (\beta \in \Psi \wedge \beta < a)$ jest niepusty. Zakładamy, że zbiór ten jest uporządkowany przez relację mniejszości. Jest więc niepustym podzbiorem zbioru $\sum_b (\beta < a)$, w myśl D6.1 i wniosku 8.1 ma więc element pierwszy. Łatwo spostrzec, że element ten jest jednocześnie elementem pierwszym zbioru Ψ . Założenie więc, że zbiór ten nie posiada elementu pierwszego, prowadzi do sprzeczności.

T8.4. Dowolny zbiór liczb porządkowych, uporządkowany przez relację mniejszości, jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Dow. Twierdzenie wynika natychmiast z D6.1 i T8.3.

* Zmienne α i β reprezentują tu, oczywiście, dowolne liczby porządkowe.

** Twierdzenie to można wypowiedzieć również w sposób następujący: W każdym niepustym zbiorze liczb porządkowych istnieje liczba najmniejsza.

Umówmy się oznaczać zbiór wszystkich liczb porządkowych uporządkowany przez relację mniejszości symbolem Lp^+ , odcinek zaś tego zbioru wyznaczony przez element a symbolem $Lp(a)$. T8.2 możemy więc zanotować:

$$a \in Lp^+ \rightarrow \overline{Lp(a)} = a$$

$$D8.2. \quad a \in Lg \equiv a \in Lp \wedge a \neq 0 \wedge \prod_{\beta \in Lp} a \neq \beta + 1$$

Wyrażenie „ $a \in Lg$ ” czytamy: a jest liczbą graniczną. Liczbami granicznymi są np. liczby ω , $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$, nie jest natomiast liczbą graniczną żadna liczba naturalna ani żadna liczba postaci $\omega + n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

$$T8.5. \quad a \neq 0 \wedge a \in Lg \wedge a \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{\beta \in Lg} \sum_{n \in \mathbb{N}} a = \beta + n$$

Dow. Załóżmy, że

$$(1) \quad a \neq 0 \wedge a \in Lg \wedge a \in \mathbb{N}$$

oraz — wbrew temu, co chcemy wykazać — że

$$(2) \quad \prod_{\beta \in Lg} \prod_{n \in \mathbb{N}} a \neq \beta + n$$

Oznaczmy przez a_0 najmniejszą liczbę porządkową spełniającą warunki (1) i (2). Istnienie takiej liczby zagwarantowane jest przez T8.3 i poczynione założenia. Istnieje więc też taka liczba porządkowa β_0 , że

$$(3) \quad a_0 = \beta_0 + 1$$

Gdyby $\beta_0 \in Lg$, to liczba a_0 nie spełniałaby — wbrew założeniu — wzoru (2). Spełniony jest więc wzór

$$(4) \quad \beta_0 \in Lg$$

Z (1) i (3) wynika też, że

$$(5) \quad \beta_0 \neq 0 \wedge \beta_0 \in \mathbb{N}$$

Ze wzoru (3) i D8.1 wynika, że $\beta_0 < a_0$. Stąd, z założenia, że a_0 jest najmniejszą liczbą porządkową spełniającą jednocześnie wzory (1) i (2), oraz z wzorów (4) i (5) wynika istnienie takiej liczby granicznej β_1 i takiej liczby naturalnej n_1 , że

$$\beta_0 = \beta_1 + n_1$$

Z tego wzoru, wzoru (3) i T3.1a wynika:

$$a_0 = \beta_1 + (n_1 + 1)$$

Otrzymany wzór jest sprzeczny z założeniem, że a_0 spełnia wzór (2). Dowód nie wprost twierdzenia został w ten sposób zakończony.

Ćwiczenia

- Wykazać, że następująca definicja relacji mniejszości liczb porządkowych jest równoważna D8.1: $a < \beta \equiv \sum_{\gamma \neq 0} \beta = a + \gamma$

Na podstawie tej definicji udowodnić L8.3.

- Udowodnić wzory:

- $a < \beta \rightarrow \gamma + a < \gamma + \beta$
- $a < \beta \rightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

- Wykazać fałszywość wzorów:

- $a < \beta \rightarrow a + \gamma < \beta + \gamma$
- $a < \beta \rightarrow \gamma \cdot a < \gamma \cdot \beta$

- Udowodnić wzory:

- $\beta \in Lg \rightarrow a + \beta \in Lg$
- $\beta \in Lg \rightarrow a \cdot \beta \in Lg$

§ 9. ZASADA INDUKCJI

W paragrafie tym uogólnimy zasadę indukcji, będącą prawem arytmetyki liczb naturalnych*. Zasada indukcji formułowana bywa bądź jako twierdzenie arytmetyczne, bądź jako reguła dowodzenia twierdzeń. W sformułowaniu pierwszym zasada ta ma postać**:

$$(1) \quad 0 \in Z \wedge \prod_{k \in Z} (k+1 \in Z) \rightarrow \mathbb{N} \subset Z$$

Formułując zasadę indukcji jako regułę, posłużymy się symbolem $W(n)$, który oznacza dowolny wzór (lub, ogólniej, dowolne twierdzenie), zanotowany przy pomocy zmiennej wolnej n , przebiegającej zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Regułę indukcji zanotujemy tak, jak notowaliśmy w części I reguły logiczne:

I.

$W(0)$

$$\frac{\prod_{k \in \mathbb{N}} [W(k) \rightarrow W(k+1)]}{\prod_{n \in \mathbb{N}} W(n)}$$

Posługując się regułą I można udowodnić twierdzenie (1) i odwrotnie: można wykazać, że reguła I jest wtórna ze względu na reguły logiczne i twierdzenie (1).

* Szczegółowe informacje o większości twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych, o których będzie tu mowa, znajdzie czytelnik w książce: W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*.

** W rozważaniach tego paragrafu dogodne jest zaliczyć zero do liczb naturalnych.

W dowodach twierdzeń matematycznych stosujemy często regułę różną od reguły I, noszącą jednak też nazwę reguły indukcji. Schemat tej reguły ma postać:

II.

$$\frac{\prod_{m \in \mathbb{N}} \left[\prod_{k \in \mathbb{N}} [k < m \rightarrow W(k)] \rightarrow W(m) \right]}{\prod_{n \in \mathbb{N}} W(n)}$$

Twierdzeniem arytmetycznym, będącym odpowiednikiem reguły II w tym znaczeniu, w jakim twierdzenie (1) jest odpowiednikiem reguły I, jest twierdzenie

(2)

$$\prod_{m \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{k < m} k \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \mathbb{Z} \right) \rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

W arytmetyce liczb naturalnych reguły I i II są równoważne. Uogólniona jednak w arytmetyce liczb porządkowych może być tylko reguła II. Reguła I nie może być uogólniona na wszystkie liczby porządkowe z tego względu, że nie każda liczba porządkowa może być otrzymana z zera przez dodawanie jedności, gdy każda liczba naturalna może być — oczywiście — w ten sposób otrzymana. Liczbami porządkowymi, które nie mogą być otrzymane z zera przez dodawanie jedności, są np. liczby: ω , $\omega+1$, $\omega \cdot \omega$.

Schemat uogólnionej reguły II ma postać*:

III.

$$\frac{\prod_a \left[\prod_{\beta < a} W(\beta) \rightarrow W(a) \right]}{\prod_{\varphi} W(\varphi)}$$

Dla wykazania więc, że wzór $W(\varphi)$ jest prawdziwy dla każdej liczby porządkowej φ , wystarczy wykazać, że wzór ten jest prawdziwy dla dowolnej liczby a , o ile tylko jest prawdziwy dla każdej liczby $\beta < a$.

T9.1. Reguła indukcji o schemacie III jest regułą wtórną ze względu na reguły logiczne i T8.3.

Dow. Niech $W(\varphi)$ będzie dowolnym wzorem, w którym występuje zmienna wolna φ , reprezentująca dowolne liczby porządkowe. Zakładamy, że

(1)

$$\prod_a \left[\prod_{\beta < a} W(\beta) \rightarrow W(a) \right]$$

oraz że wzór $W(\varphi)$ — wbrew temu, co chcemy wykazać — nie jest prawdziwy dla pewnej liczby porządkowej φ_1 , a więc że prawdziwe jest zdanie

(2)

$$\sim W(\varphi_1)$$

Oznaczmy przez Φ zbiór wszystkich liczb porządkowych, dla których wzór $W(\varphi)$ jest fałszywy. Z (2) wynika, że zbiór ten jest niepusty. W myśl więc T8.3 istnieje

* W paragrafie tym zachowujemy umowę, przyjętą w paragrafie poprzednim, że zmiennie $a, \beta, \gamma, \dots, \varphi$ reprezentują dowolne liczby porządkowe.

w nim liczba najmniejsza φ_0 . Spełnione są więc wzory:

(3)

$$\sim W(\varphi_0)$$

(4)

$$\prod_{\beta < \varphi_0} W(\beta)$$

Ze wzorów (1) i (4) wynika $W(\varphi_0)$. Wniosek ten jest jednak sprzeczny ze wzorem (3). Dowód nie wprost twierdzenia został więc zakończony.

Dowód, który podaliśmy, jest analogiczny do dowodu reguły II na podstawie tzw. zasady minimum, która brzmi następująco:

W dowolnym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje element najmniejszy. Uogólnieniem tej zasady jest T8.3.

Podobnie jak podane w tym paragrafie twierdzenia są uogólnieniami pewnych twierdzeń arytmetycznych, uogólnić możemy metodę definiowania, zwaną metodą indukcyjną, a stosowaną często w arytmetyce i w innych działach matematyki.

Ograniczymy się tutaj do następującego nieścisłego określenia tej metody definiowania:

Definiujemy pewną własność przysługującą każdemu elementowi danego zbioru dobrze uporządkowanego w ten sposób, że określamy ją dla pierwszego elementu tego zbioru, a następnie, zakładając, że jest już określona dla wszystkich elementów wcześniejszych od danego, dowolnego elementu a tego zbioru, określamy ją dla elementu a .

Przykładem definicji indukcyjnej jest definicja potęgowania liczb porządkowych:

D9.1a.

$$a^0 = 1$$

b.

$$a^{\beta+1} = a^\beta \cdot a$$

c. w przypadku, gdy $\gamma \in \text{Lg}$, $a^\gamma = 0$ dla $a = 0$, zaś dla $a \neq 0$ określamy a^γ jako najmniejszą liczbę porządkową równą lub większą od każdej liczby a^β , gdzie β jest liczbą porządkową mniejszą od γ .

Uogólnić możemy również pojęcie ciągu nieskończonego:

D9.2. Ciąg pozaskończony typu a jest to funkcja, której lewą dziedziną jest zbiór wszystkich liczb porządkowych mniejszych od a , gdzie $a \geq \omega$.

W przypadku $a = \omega$ otrzymamy zwykły ciąg nieskończony.

Wskaźnikami wyrazów ciągu pozaskończonego typu a są liczby porządkowe mniejsze od liczby a . Ciąg typu a zapisujemy:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_\xi, \dots, \quad \xi < a$$

lub też krótko:

$$\{a_\xi\}_{\xi < a}$$

Pomijając w D9.2 warunek $a \geq \omega$ otrzymamy najogólniejsze pojęcie ciągu, obejmujące jako szczególny przypadek również pojęcie ciągu skończonego. Ciągi pozaskończone określamy często metodą indukcyjną.

Ćwiczenia

1. Udowodnić wzór

$$\prod_a \left[\prod_{\beta < a} \beta \in \Phi \rightarrow a \in \Phi \right] \rightarrow Lp \subset \Phi^*$$

2. Korzystając ze wzoru (1), podanego na początku tego paragrafu, wykazać, że relacja mniejszości dobrze porządkuje zbiór wszystkich liczb naturalnych.

3. Udowodnić wzór

$$1^a = 1$$

§ 10. TWIERDZENIE ZERMELE. ALEFY. HIPOTEZA CONTINUUM

Następujące, ważne i mające zastosowanie w wielu działach matematyki, twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Zermeli:

T10.1. Dla każdego zbioru A istnieje zbiór dobrze uporządkowany, którego zapasem jest zbiór A .

Twierdzenie to można wypowiedzieć również w następujący sposób: Dla każdego zbioru A istnieje taka relacja R , że para uporządkowana $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Twierdzenie to formułowane jest też często w następujący, krótki, lecz niedokładny, sposób: Każdy zbiór można dobrze uporządkować.

Do dowodu T10.1 potrzeba kilku lematów i oznaczeń.

Niech Z będzie dowolnym, lecz ustalonym zbiorem niepustym, R — funkcją spełniającą dla każdego niepustego podzbioru X zbioru Z warunek:

$$(I) \quad R(X) \in X^{**}$$

Istnienie takiej funkcji wynika z T14.2 z Rozdziału I.

Oznaczmy przez W rodzinę wszystkich podzbiorów W^+ zbioru Z , spełniających warunki:

- (i) W^+ jest zbiorem dobrze uporządkowanym,
- (ii) jeśli $w \in W^+$, to $w = R[Z - W(w)]$

Każdy więc element zbioru W^+ jest przyporządkowany przez funkcję R zbiorowi tych elementów zbioru Z , które nie są w zbiorze W^+ wcześniejsze od w .

$$L10.1a. \quad U^+, V^+ \in W \wedge v \in V^+ \wedge U^+ \simeq V(v) \rightarrow U^+ = V(v)$$

Każdy więc zbiór należący do rodziny W jest identyczny z pewnym odcinkiem zbioru $V^+ \in W$, o ile tylko jest podobny do tego odcinka.

* Wzór ten jest odpowiednikiem reguły III w tym znaczeniu, w jakim wzór (2) jest odpowiednikiem reguły II.

** Por. drugi odcinek ze str. 205.

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & U^+, V^+ \in W \\ (2) & v \in V^+ \\ (3) & U^+ \simeq V(v) \\ (4) & U^+ \neq V(v) \\ (5) & U^+ \simeq_{S_1} V(v) \\ (6) & U \sim_{S_1} V(v) \\ (7) & S_1 \in 1-1 \\ (8) & V(v) = S_1(U^+) \\ (9) & \text{Oznaczmy przez } u_1 \text{ pierwszy element zbioru } U^+ \text{ taki, że} \\ & u_1 \neq S_1(u_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \{ \text{zał.} \} \\ \{ \text{z. d. n.} \} \\ \{ D2.5; 3 \} \\ \{ D3.4; 5 \} \\ \{ D7.1 \text{ rozdz. I; } 6 \} \\ \{ L7.2 \text{ rozdz. I; } 6 \} \end{array}$$

Istnienie takiego elementu wynika z (4), (7) i (8).

$$\begin{array}{ll} (10) & U(u_1) = V(S_1(u_1)) \\ (11) & u_1 = R[Z - U(u_1)] \wedge S_1(u_1) = \\ & = R[Z - V(S_1(u_1))] \\ (12) & u_1 = S_1(u_1) \\ & \text{sprz.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \{ 8; 9 \} \\ \{ ii; 1 \} \\ \{ 10; 11 \} \\ \{ 9; 12 \} \end{array}$$

$$L10.1b. \quad U^+, V^+ \in W \wedge U^+ \simeq V^+ \rightarrow U^+ = V^+$$

Dowód lematu jest analogiczny do dowodu lematu poprzedniego.

$$L10.1c. \quad U^+, V^+ \in W \rightarrow U^+ = V^+ \vee \sum_{v \in V^+} [U = V(v)] \vee \sum_{u \in U^+} [V = U(u)]$$

{T7.2; L10.1a; L10.1b}

$$L10.2a. \quad u, v \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+ \rightarrow \sum_{W^+ \in W} (u, v \in W^+)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & u, v \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+ \\ (2) & u \in U_1^+ \wedge U_1^+ \in W \\ (3) & v \in V_1^+ \wedge V_1^+ \in W \\ & \sum_{W^+ \in W} (u, v \in W^+) \end{array} \quad \begin{array}{l} \{ \text{zał.} \} \\ \{ D4.3 \text{ rozdz. I; } 1 \} \\ \{ L10.1c; 2; 3 \} \end{array}$$

$$L10.2b. \quad u, v, w \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+ \rightarrow \sum_{W^+ \in W} (u, v, w \in W^+)$$

Lemat ten wynika z lematu L10.1c oraz L10.2a.

$$L10.3. \quad U^+, V^+ \in W \wedge u \prec_U v \wedge u, v \in V^+ \rightarrow u \prec_V v$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dow. (1)} & U^+, V^+ \in W \\ (2) & u \prec_U v \\ (3) & u, v \in V^+ \\ (1.1) & U^+ = V^+ \\ (1.2) & u \prec_V v \\ (2.1) & U^+ = V(v_1) \\ (2.2) & u \prec_{V(v_1)} v \end{array} \quad \begin{array}{l} \{ \text{zał.} \} \\ \{ \text{z. dow.} \} \\ \{ 1.1; 2 \} \\ \{ \text{z. dow.} \} \\ \{ 2.1; 2 \} \end{array}$$

- (2.3) $u \prec_F v$ {2.2; D7.1; D4.5}
 (3.1) $V^+ = U(u_1)$ {z. dow.}
 (3.2) $u, v \in U(u_1)$ {3.1; 3}
 (3.3) $u \prec_{U(u_1)} v$ {2; 3.2; D7.1; D4.5}
 (3.4) $u \prec_F v$ {3.1; 3.3}
 $u \prec_F v$ {L10.1c; 1.1 $\rightarrow$ 1.2; 2.1 $\rightarrow$ 2.3; 3.1 $\rightarrow$ 3.4}

Wprowadzamy jeszcze jedno oznaczenie:

$$(II) \quad uTv = \sum_{W^+ \in W} (u \prec_W v)$$

$$L10.4a. \quad P(T) = \bigcup_{W^+ \in W} W^+$$

Lemat wynika z (II) i D1.1.

$$L10.4b. \quad T \in \text{sp}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$$

- Dow. (1.1) $u, v \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+ \wedge u \neq v$ {z.dow.}
 (1.2) $W_1^+ \in W \wedge u, v \in W_1^+$ {1.1; L10.2a}
 (1.3) $u \prec_{W_1} v \vee v \prec_{W_1} u$ {wzór (a) na str. 215; 1.2}
 (1.4) $uTv \vee vTu$ {II; 1.2; 1.3}
 $T \in \text{sp}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$ {D2.1a; 1.1 $\rightarrow$ 1.4}

$$L10.4c. \quad T \in \text{przech}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$$

- Dow. (1.1) $uTv \wedge vTw$ {z. dow.}
 (1.2) $u, v, w \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+$ {L10.4a; D1.1; 1.1}
 (1.3) $W_1^+ \in W \wedge u, v, w \in W_1^+$ {L10.2b; 1.2}
 (1.4) $W_2^+, W_3^+ \in W \wedge u \prec_{W_2} v \wedge v \prec_{W_3} w$ {II; 1.1}
 (1.5) $u \prec_{W_1} v \wedge v \prec_{W_1} w$ {L10.3; 1.3; 1.4}
 (1.6) $u \prec_{W_1} w$ {wzór (b) na str. 215; 1.5}
 (1.7) uTw {II; 1.6}
 $T \in \text{przech}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$ {D2.1b; 1.1 $\rightarrow$ 1.7}

$$L10.4d. \quad T \in \text{asym}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$$

- Dow. (1.1) $uTv \wedge vTu$ {z. dow.}
 (1.2) $U_1^+, V_1^+ \in W \wedge u \prec_{U_1} v \wedge v \prec_{V_1} u$ {II; 1.1}
 (1.3) $u \prec_{V_1} v$ {L10.3; 1.2}
 (1.4) $\sim(v \prec_{V_1} u)$ {wzór (c) na str. 215; 1.3}
 (1.5) sprz. {1.2; 1.4}
 (1) $uTv \rightarrow \sim(vTu)$ {1.1 $\rightarrow$ 1.5}
 $T \in \text{asym}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+)$ {D2.1c; 1}

$$L10.4e. \quad T \in \text{porz}(\bigcup_{W^+ \in W} W^+) \quad \{D2.2; L10.4a \rightarrow L10.4d\}$$

Z lematu tego i D4.5 wynika, że każdy podzbiór zbioru $\bigcup_{W^+ \in W} W^+$ jest uporządkowany. Z uwagi tej skorzystamy zapisując następny lemat.

L10.5. Jeśli $U^0 \subset \bigcup_{W^+ \in W} W^+$ i $U^0 \neq \emptyset$, to istnieje pierwszy element zbioru U^0 .

- Dow. (1) $U^0 \subset \bigcup_{W^+ \in W} W^+$ {zał.}
 (2) $U^0 \neq \emptyset$
 (3) $u_1 \in U^0$ {2}
 (4) $u_1 \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+$ {1; 3}
 (5) $W_1^+ \in W \wedge u_1 \in W_1^+$ {D4.3 rozdz. I; 4}
 (6) $(U \cdot W_1) \subset W_1^+ \wedge (U \cdot W_1) \neq \emptyset$ {3; 5}
 (7) u_2 jest pierwszym elementem zbioru $(U \cdot W_1)$ {oznacz.; D6.1; 6}

Wykażemy, że u_2 jest pierwszym elementem zbioru U^0 .

- (1.1) $u \in U^0$ {z. dow.}
 (1.1.1) $u \in W_1^+$ {z. dow.}
 (1.1.2) $u \in (U \cdot W_1)$ {1.1; 1.1.1}
 (1.1.3) $u_2 = u \vee u_2 \prec_U u$ {7; 1.1.2}
 (1.2.1) $u \in W_1^+$ {z. dow.}
 (1.2.2) $W_2^+ \in W \wedge u, u_2 \in W_2^+$ {L10.2a}
 (1.2.3) $W_1^+ = W_2(w_1)$ {L10.1c; 5; 1.2.1; 1.2.2}
 (1.2.4) $w_1 = u \vee w_1 \prec_{W_2} u$ {1.2.1–1.2.3}
 (1.2.5) $u_2 \prec_{W_2} w_1$ {7; 1.2.3}
 (1.2.6) $u_2 \prec_{W_2} u$ {wzór (b) na str. 215; 1.2.4, 1.2.5}
 (1.2.7) $u_2, u \in U^0$ {7; 1.1}
 (1.2.8) $u_2 \prec_U u$ {1.2.6; 1.2.7}
 (1.3) $u_2 = u \vee u_2 \prec_U u$ {1.1.1 $\rightarrow$ 1.1.3; 1.2.1 $\rightarrow$ 1.2.8}
 u_2 jest pierwszym elementem zbioru U^0 {1.1 $\rightarrow$ 1.3}

L10.6. Zbiór $\bigcup_{W^+ \in W} W^+$ jest dobrze uporządkowany {L10.4e; L10.5}

L10.7a. Jeśli $W^+ \in W$ i $w \in W^+$, to $W(w)$ jest odcinkiem zbioru $\bigcup_{W^+ \in W} W^+$ wyznaczonym przez element w .

Łatwy dowód tego lematu pozostawiamy czytelnikowi.

L10.7b. Jeśli $w \in \bigcup_{W^+ \in W} W^+$ i V^+ jest odcinkiem zbioru $\bigcup_{W^+ \in W} W^+$ wyznaczonym przez element w , to $w = R(Z - V^+)$

- Dow. (1) $w \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$ {zał.}
- (2) V^+ jest odcinkiem zbioru $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$ wyznaczonym przez element w {zał.}
- (3) $W_1^+ \in \mathcal{W} \wedge w \in W_1^+$ {D4.3 rozdz. I; 1}
- (4) $w = R[Z - W_1(w)]$ {ii; 3}
- (5) $W_1(w) = V^+$ {L10.7a; 2, 3}
- $w = R(Z - V^+)$ {4; 5}

Obecnie dążyć będziemy do wykazania, że $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ = Z$. Wniosek ten wobec L10.6 zakończy dowód T10.1. Z T4.2a rozdz. I wynika wzór

$$(III) \quad \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ \subset Z$$

Założmy na chwilę, że

$$(IV) \quad \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ \subsetneq Z$$

Stąd

$$Z - \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ \neq \emptyset$$

Wprowadzić więc możemy następujące oznaczenie:

$$(V) \quad a = R(Z - \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+)$$

Z (I) wynika, że $a \in Z - \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$. Stąd

$$(VI) \quad a \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$$

Wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie:

$$sT_1v \equiv sTv \vee s \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ \wedge v = a$$

L10.8a. Zbiór $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$, będący podzbiorem zbioru Z , jest dobrze uporządkowany; relacją porządkującą ten zbiór jest T_1 . Ostatnim elementem zbioru $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$ jest a .

Łatwy dowód tego lematu pozostawiamy czytelnikowi.

10.8b. Jeśli $w \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$ i V^+ jest odcinkiem zbioru $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$ wyznaczonym przez element w , to

$$(1) \quad w = R(Z - V^+)$$

Dow. Jeśli $w \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$, to wzór (1) wynika z L10.7b. Załóżmy więc, że $w = a$. Odcinkiem zbioru $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$ wyznaczonym przez element a jest zbiór $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$. Stąd i z (V) wynika, że również element a spełnia wzór (1).

Z L10.8a i L10.8b wynika, że zbiór $\bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+ + \{a\}$ spełnia warunki: (i) oraz (ii). Zbiór ten jest więc elementem rodziny zbiorów $\mathcal{W}$. Stąd $a \in \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$.

Wniosek ten jest sprzeczny ze wzorem (VI), który otrzymaliśmy na podstawie założenia (IV). Założenie to jest więc fałszywe. Stąd i z (III) wynika, że $Z = \bigcup_{W^+ \in \mathcal{W}} W^+$. Stąd i z L10.6 otrzymujemy, że zbiór Z jest dobrze uporządkowany. Wniosek ten kończy dowód T10.1.

Dowód twierdzenia Zermeli oparty był na wzorze (I), który wynika z T14.2 rozdziału I. Lecz i odwrotnie: z drugiego z tych twierdzeń wynika pierwsze.

Niech Z będzie dowolną rodziną zbiorów spełniającą założenia aksjomatu wyboru. Zgodnie z twierdzeniem Zermeli możemy założyć, że zbiór $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$ jest

dobrze uporządkowany. Łatwo dostrzec, że każdy element rodziny Z jest niepustym podzbiorem zbioru $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$, ma więc element pierwszy. Utwórzmy zbiór Y_1 ,

którego elementami są te i tylko te przedmioty, które są pierwszymi elementami zbiorów należących do rodziny Z . Łatwo zauważyć, że zbiór Y_1 spełnia następnik aksjomatu A14.1.

$$D10.1. \quad \bar{a} = \overline{A^+} = a = \overline{A^+}^*$$

Definicja ta jest poprawna, gdyż w myśl wniosku 2.2 zbiory, których typy porządkowe są równe, mają tę samą moc.

Symbol $\bar{a}$ oznacza więc moc zbioru dobrze uporządkowanego, którego liczbą porządkową jest a . O $\bar{a}$ mówimy, że jest liczbą kardynalną liczby porządkowej a .

Z D10.1 i wniosku 5.2 wynika

Wniosek 10.1.

$$\bar{\omega} = \overline{\langle \mathbb{R}, < \rangle} = \kappa_0$$

$$D10.2. \quad a \in Z(m) \equiv \bar{a} = m$$

Zbiór $Z(m)$ jest więc zbiorem wszystkich liczb porządkowych, których liczba kardynalna równa jest m .

$$T10.2. \quad m \in Lk \rightarrow Z(m) \neq \emptyset$$

* Zachowujemy umowę, że małe litery greckie reprezentują dowolne liczby porządkowe.

Dow. Z T7.2c rozdziału I wynika istnienie zbioru A spełniającego wzór

$$\overline{A} = m$$

(1)

Z T10.1 wynika istnienie zbioru dobrze uporządkowanego A^+ , którego zapasem jest zbiór A . Z T2.2b wynika istnienie liczby porządkowej α takiej, że $\alpha = \overline{A^+}$. Stąd, z D10.1 i wzoru (1) wnioskujemy, że $\overline{a} = m$. W myśl więc D10.2 $\alpha \in Z(m)$. Zbiór $Z(m)$ jest więc niepusty.

D10.3a. α jest liczbą początkową zbioru $Z(m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \geq \kappa_\alpha$ i α jest najmniejszą liczbą porządkową zbioru $Z(m)$;

b. α jest liczbą początkową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie m , że α jest liczbą początkową zbioru $Z(m)$.

Z T10.2 i T8.3 wynika

Wniosek 10.2. Jeśli $m \geq \kappa_0$, to istnieje liczba początkowa zbioru $Z(m)$.

D10.4. $\alpha = \omega_\xi$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą początkową i zbiór wszystkich liczb początkowych $< \alpha$, uporządkowany przez relację mniejszości, jest zbiorem typu ξ .

Łatwo widzieć, że ω jest liczbą początkową zbioru $Z(\kappa_0)$. Jest to więc najmniejsza liczba początkowa. W myśl więc D10.4 i uwagi, że zero jest typem porządkowym zbioru pustego,

(1)

$$\omega = \omega_0$$

Zauważmy jeszcze, że liczba początkowa ω_1 oznaczana jest zwykle symbolem Ω .

D10.5. $m = \kappa_\xi$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczbą początkową zbioru $Z(m)$ jest ω_ξ .

Liczby kardynalne, które mogą być oznaczone literą κ ze wskaźnikiem, nazywamy alefami.

Zastanowimy się, czy sens symbolu κ_0 wyznaczony przez D10.5 jest zgodny z jego dotychczasowym sensem. W myśl D10.5 liczbą początkową zbioru $Z(\kappa_0)$ jest liczba $\omega_0 = \omega$. W myśl więc D10.3a i D10.2 $\overline{\omega} = \kappa_0$. Stąd i z wniosku 10.1 wynika, że sens, jaki symbolowi κ_0 nadaje D10.5, jest zgodny z jego poprzednim sensem.

T10.3. Dla każdej liczby kardynalnej $m \geq \kappa_0$ istnieje taka liczba porządkowa ξ , że

$$m = \kappa_\xi$$

Twierdzenie to można sformułować również w następujący sposób: Każda porządkowana liczba kardynalna jest alefem.

Dow. Niech α będzie liczbą początkową zbioru $Z(m)$. Istnienie tej liczby jest zagwarantowane przez wniosek 10.2 i założenie, że $m \geq \kappa_0$. Oznaczmy przez ξ liczbę porządkową zbioru wszystkich liczb początkowych $< \alpha$.

W myśl D10.4 $\alpha = \omega_\xi$. Stąd i z D10.5 $m = \kappa_\xi$. Twierdzenie jest więc prawdziwe.

Z D10.2, D10.3a, D10.4 i D10.5 wynika
Wniosek 10.3.

$$\kappa_\xi = \overline{\omega_\xi}$$

T10.4.

$$\kappa_\xi = \overline{E_a(a < \omega_\xi)}$$

Liczbę kardynalną κ_ξ można więc określić jako moc zbioru wszystkich liczb porządkowych $< \omega_\xi$.

Dow. Zakładamy, że zbiór $E_a(a < \omega_\xi)$ jest uporządkowany przez relację mniejszości. Z T8.2 wynika więc wzór

$$\omega_\xi = \overline{E_a(a < \omega_\xi)}$$

Stąd i z D10.1 otrzymujemy

$$\overline{\omega_\xi} = \overline{E_a(a < \omega_\xi)}$$

Z tego wzoru i wniosku 10.3 wynika twierdzenie.

T10.5.

$$\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$$

Dow. Z D10.4 wynika, że $\omega_\xi \in E_a(a < \omega_{\xi+1})$. Stąd

$$(1) \quad E_a(a < \omega_\xi) \subset E_a(a < \omega_{\xi+1})$$

Ze wzoru (1) i wniosku 9.1 rozdziału I wynika

$$\overline{E_a(a < \omega_\xi)} \leq \overline{E_a(a < \omega_{\xi+1})}$$

Stąd i z T10.4 wynika z kolei

$$\kappa_\xi \leq \kappa_{\xi+1}$$

Gdyby $\kappa_\xi = \kappa_{\xi+1}$, to w myśl D10.5 liczba ξ równałaby się $\xi+1$, co — oczywiście — zachodzić nie może. Prawdziwa jest więc nierówność

$$\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$$

T10.5.

$$\kappa_1 \leq c$$

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Zagadnieniem continuum nazywamy pytanie, czy liczby κ_1 i c są równe, czy też pierwsza z tych liczb jest mniejsza od drugiej, zaś hipotezą continuum nazywamy przypuszczenie, że zachodzi pierwsza z tych możliwości.

Widoczne jest, że hipoteza ta wynika z założenia istnienia relacji R porządkującej dobrze zbiór $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych*, takiej, że

$$\overline{\langle \mathfrak{R}, R \rangle} = \Omega = \omega_1$$

Zauważmy jeszcze, że zagadnienie continuum jest równoważne pytaniu, czy istnieje liczba kardynalna m spełniająca nierówność

$$\aleph_0 < m < c$$

a więc, czy istnieje nieskończony i nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych nierównoliczny zbiorowi $\mathfrak{R}$.

K. Gödel udowodnił, że hipoteza continuum jest niesprzeczna z aksjomatami teorii mnogości, a P. J. Cohen, że jest od nich niezależna.

* Relacja R oczywiście musi być różna od relacji mniejszości.

DODATEK

§ 1. ANTYNOMIE TEORII MNOGOŚCI

Założenia, na których opierał się Cantor budując teorię mnogości, wydają się najzupełniej oczywiste. Rozbudowując jednak tę teorię natrafili wkrótce matematycy na sprzeczności, których źródła nie umieli początkowo wskazać. Rozumowania pozornie całkowicie zgodne z intuicją, prowadzące jednak do sprzeczności, noszą nazwę antynomij. Wykrycie antynomij teorii mnogości spowodowało żywe badania nad podstawami matematyki. Badania te wykazały, że niektóre pojęcia matematyki, pozornie całkowicie proste i jasne, muszą ulec szczegółowej i gruntownej analizie. Istotne trudności sprawiają nawet tak podstawowe pojęcia, jak pojęcie zbioru i pojęcie relacji należenia elementu do zbioru. O tym, że posługiwanie się nimi w sposób niesprecyzowany może prowadzić do sprzeczności, świadczy następujące rozumowanie:

Niech $\mathbf{R}$ będzie rodziną tych i tylko tych zbiorów X , które nie są swoimi elementami, a więc spełniają warunek $X \notin X$. Prawdziwa jest więc równość

$$X \in \mathbf{R} \equiv X \notin X$$

Podstawiając w niej za zmienną X symbol $\mathbf{R}$ otrzymujemy

$$\mathbf{R} \in \mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \notin \mathbf{R}$$

Wzór ten jednak prowadzi natychmiast do sprzeczności.

Przytoczone rozumowanie nosi nazwę antynomii Russella.

Podamy z kolei antynomię zbioru wszystkich zbiorów, znaną już Cantorowi. Zakładamy, że każdy zbiór jest elementem rodziny zbiorów $\mathbf{Z}$. Stąd

$$2^{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Z}$$

gdyż każdy podzbiór zbioru $\mathbf{Z}$ jest oczywiście zbiorem. Ze wzoru tego, wnioska 9.1 i T10.1 rozdziału I wynikają wzory:

$$\overline{(2^{\mathbf{Z}})} \leq \overline{\mathbf{Z}}, \quad \overline{\mathbf{Z}} < \overline{(2^{\mathbf{Z}})}$$

Jednakże z twierdzeń udowodnionych w § 9 rozdziału I wynika, że wzory te nie mogą być jednocześnie prawdziwe.

Pojęciem, prowadzącym do sprzeczności, jest też pojęcie zbioru wszystkich liczb porządkowych. W rozdziale II oznaczyliśmy ten zbiór symbolem L_p i wykazaliśmy (T8.4), że relacja mniejszości dobrze porządkuje ten zbiór. Oznaczmy przez φ jego liczbę porządkową, a więc $\varphi \in L_p$. W myśl T8.2 liczba φ jest równa liczbie porządkowej odcinka zbioru L_p , wyznaczonego przez element φ . Zbiór L_p jest więc podobny do pewnego swego odcinka. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z L7.3. Antynomia ta jest pierwszą chronologicznie antynomią teorii mnogości. Podał ją w r. 1897 matematyk włoski Burali-Forti, była już jednak znana Cantorowi w r. 1895.

Do sprzeczności prowadzi również pojęcie zbioru wszystkich liczb kardynalnych. Dla wykazania tego potrzebne są jednak twierdzenia o liczbach kardynalnych, których dowodów nie podaliśmy.

Istnieje kilka sposobów budowania teorii mnogości nie zawierającej sprzeczności. Dwa spośród nich są wyraźnie bardziej rozpowszechnione w logice i matematyce od sposobów pozostałych. Pierwszy sposób nosi nazwę teorii typów logicznych. Twórcą tej teorii jest Bertrand Russell, z którego antynomią zapoznaliśmy się w tym paragrafie. Twórcą drugiego sposobu jest E. Zermelo.

Ćwiczenie

Wykazać, że w żadnym miasteczku nie ma mieszkańca, który goliłby tych i tylko tych mieszkańców tego miasteczka, którzy nie golią sami siebie. Porównać przeprowadzone rozumowanie z antynomią Russella.

§ 2. KATEGORIE SEMANTYCZNE

Zanim omówimy teorię typów logicznych, podamy zarys teorii podziału wyrażeń logicznych na tzw. kategorie semantyczne (kategorie znaczeniowe)*. Teorie te pozostają bowiem w bliskim związku.

Podstawowymi kategoriami semantycznymi są kategorie: zdań i nazw. Zdaniem nazywamy w logice wyrażenia, które są bądź prawdziwe, bądź fałszywe. Zdaniem są więc np. wyrażenia „Warszawa leży nad Wisłą“, „liczba 373 jest podzielna przez 3“, gdyż pierwsze z tych wyrażeń jest prawdą, drugie zaś fałszem. Do kategorii semantycznej zdań zaliczamy też funkcje zdaniowe, a więc takie wyrażenia zapisane przy pomocy zmiennych, które zmieniają się w zdania, gdy za zmienne te podstawimy terminy stałe.

* Twórcą tej teorii jest logik polski Stanisław Leśniewski. Uwagi, które tu podajemy, są częściowo powtórzeniem uwag rozdziału I i II części I.

Przykładami nazw są wyrażenia „liczba π “, „Warszawa“, „największy wspólny dzielnik liczb 12 i 18“. Przytoczone nazwy zaliczamy do nazw jednostkowych, tzn. nazw oznaczających dokładnie jeden przedmiot. Obok nazw jednostkowych wyodrębniamy nazwy ogólne, oznaczające więcej niż jeden przedmiot, i nazwy puste, nie oznaczające żadnego przedmiotu. Przykładami nazw ogólnych są wyrażenia „człowiek“, „liczba naturalna“, a przykładami nazw pustych są wyrażenia „złota góra“, „największa liczba naturalna“. W systemach logiki matematycznej występują zwykle tylko nazwy jednostkowe, mówiąc dalej o nazwach będziemy mieli na myśli wyłącznie takie nazwy. Do kategorii nazw zaliczamy też zmienne, za które podstawiać możemy nazwy stałe. Ogólnie: jeśli pewne terminy stałe zostały zaliczone do danej kategorii semantycznej, to do tej kategorii zaliczamy również zmienne, za które podstawiać możemy te terminy.

Prócz zdań i nazw wyodrębniamy wśród wyrażeń i terminów logicznych tzw. funktory oraz operatory. Z przykładami funktorów zapoznaliśmy się w części I. Była tam mowa o funktorach rachunku zdań (znaki: negacji, implikacji itp.) oraz o funktorach rachunku kwantyfikatorów (symbole: $A, B, C, \dots, R, S, T, \dots$). Funktory te zaliczamy do funktorów zdaniotwórczych, gdyż tworzą one wraz ze swymi argumentami wyrażenia kategorii zdaniowej. Częste są też w matematyce funktory nazwotwórcze. Przykładami takich funktorów są znaki działań arytmetycznych. Wyrażenie zbudowane np. ze znaku „+“ i nazw dwóch liczb, np. liczb 3 i 5, a więc wyrażenie postaci „3+5“ jest z kolei nazwą liczby, której najprostszym oznaczeniem jest symbol „8“.

Argumentami funktorów mogą być wyrażenia najrozmaitszych kategorii. Tak np. argumentami funktorów rachunku zdań są wyrażenia kategorii zdaniowej, argumentami funktorów węższego rachunku kwantyfikatorów są wyrażenia kategorii nazwowej. Funktory zdaniotwórcze o argumentach zdaniowych zaliczamy do tej samej kategorii semantycznej wtedy i tylko wtedy, gdy są funktorami o tej samej liczbie argumentów. Znaki: implikacji, koniunkcji, alternatywy i równoważności zaliczymy więc do tej samej kategorii semantycznej, do której nie zaliczymy znaku negacji; jest on bowiem funktorem jednoargumentowym, poprzednio zaś wymienione funktory są dwuargumentowe. W podobny sposób dzielimy na kategorie semantyczne funktory o argumentach nazwowych.

W systemach logicznych bardziej rozbudowanych występują funktory, których argumentami nie są ani zdania, ani nazwy, lecz wyrażenia należące do kategorii funktorów. Podajemy przykładowo dwie definicje funktorów o argumentach funktorowych:

$$D1.1. \quad O(A) = \prod_x \sim A(x)$$

$$D1.2. \quad Zwr(R) = \prod_x xRx$$

Funktory zdaniotwórcze „O” i „Zwr” zaliczymy do różnych kategorii semantycznych, gdyż argumentem pierwszego funktora jest funktor jednoargumentowy, argumentem zaś drugiego funktor dwuargumentowy, argumenty więc funktorów „O” i „Zwr” należą do różnych kategorii semantycznych. Ogólnie: *dwie funktory zdaniotwórcze należą do tej samej kategorii semantycznej wtedy i tylko wtedy, gdy są funktorami o tej samej liczbie argumentów i gdy ich odpowiednie argumenty należą do tej samej kategorii semantycznej*. Analogiczna uwaga dotyczy funktorów nazwotwórczych. Oczywiście jest, że dwa funktory, z których jeden jest zdaniotwórczy, drugi zaś nazwotwórczy, nie mogą należeć do tej samej kategorii semantycznej. Dla każdej więc kategorii semantycznej funktorów określone jest, iluargumentowymi są te funktory i do jakich kategorii semantycznych należą ich argumenty. Oczywiście jest, że sensowne są te i tylko te wyrażenia, w których każdy funktor ma właściwą dla swej kategorii semantycznej liczbę argumentów i argumenty te należą do właściwych kategorii semantycznych. Tak więc np. wyrażenie zbudowane z funktora i dwóch nazw, będących jego argumentami, jest sensowne wtedy i tylko wtedy, gdy funktor ten należy do kategorii semantycznej funktorów dwuargumentowych o argumentach nazwowych.

Do operatorów należą: kwantyfikatory „ $\prod$ ” i „ $\sum$ ”, operator deskrypcyjny „ ϵ ”, symbol „ E ” w kontekście $E_a \phi$ oraz znaki nieskończonych i uogólnionych sum i iloczynów zbiorów.

Wspólną własnością operatorów jest to, że wiążą one zmienne. Nie podając tutaj dokładnego określenia tej własności zauważymy tylko, że do zmiennych związanych nie stosuje się reguły podstawiania.

Podobnie jak w odniesieniu do funktorów mówimy o argumentach operatorów. Zmiennej występującej pod znakiem operatora nie zaliczamy do jego argumentów. Np. w wyrażeniu „ $\prod_x A(x)$ ” argumentem operatora „ $\prod$ ” jest wyrażenie „ $A(x)$ ”, w wyrażeniu „ $\prod_{A(x)} B(x)$ ” argumentami operatora „ $\prod$ ” są wyrażenia „ $A(x)$ ” i „ $B(x)$ ”.

Operatory dzielimy na kategorie semantyczne analogicznie jak funktory — a więc ze względu na kategorię semantyczną całego wyrażenia (złożonego z operatora, występującej pod nim zmiennej i jego argumentów) oraz liczbę i kategorie semantyczne kolejnych argumentów — uwzględniając ponadto kategorię semantyczną zmiennej wiązanej przez dany operator*. Zwykle kwantyfikatory są operatorami zdaniotwórczymi o jednym argumencie zdaniowym, kwantyfikatory o ograniczonym zakresie są operatorami zdaniotwórczymi o dwóch argumentach zdaniowych. Operator deskrypcyjny wprowadzony w węższym rachunku kwantyfikatorów jest operatorem nazwotwórczym.

* W przypadku operatorów zdaniotwórczych o argumentach zdaniowych można przyjąć, że ich kategoria semantyczna jest niezależna od kategorii semantycznej zmiennej wiązanej przez te operatory.

czym o jednym argumencie zdaniowym. W rachunku kwantyfikatorów wyższego rzędu można wprowadzić operatory deskrypcyjne wiążące zmienne reprezentujące funktory (i-go rzędu). Wyrażenie „ $\phi(\varphi)$ ” należy wówczas do tej samej kategorii semantycznej, do której należy zmienna φ .

Widoczne jest, że wyrażenia należące do różnych kategorii semantycznych nie mogą mieć tego samego sensu, chociaż, jak przekonamy się o tym później, funktory różnych kategorii mogą mieć wyrażnie analogiczne własności. W poprawnej więc symbolice terminy różnych kategorii semantycznych powinny być różne. W dalszych uwagach tego paragrafu zakładamy, że warunek ten jest spełniony.

Weźmy pod uwagę wyrażenie

$$(1) \quad 5 + 3$$

Zastępując w nim symbol „+”, będący funktorem nazwotwórczym o dwóch argumentach nazwowych, symbolem „—”, który również jest funktorem nazwotwórczym o dwóch argumentach nazwowych, otrzymujemy wyrażenie

$$(2) \quad 5 - 3$$

a więc wyrażenie mające określony sens. Jeśli jednak symbol „+” zastąpimy funktorem innej kategorii semantycznej, np. funktorem zdaniotwórczym „ $\vee$ ”, otrzymamy wyrażenie pozbawione sensu. Podobnie zastępując w wyrażeniu (1) symbol „5” dowolnym wyrażeniem tej samej kategorii semantycznej, np. wyrażeniem (1) lub (2), otrzymamy wyrażenie sensowne, zastępując zaś ten symbol wyrażeniem innej kategorii semantycznej, np. wyrażeniem „ $p \rightarrow q$ ” lub wyrażeniem „+”, otrzymamy wyrażenie bezsensowne. Uogólniając te uwagi otrzymujemy następujące

Twierdzenie I. *Jeśli w wyrażeniu sensownym zastąpimy dowolny termin terminem należącym do tej samej kategorii semantycznej, to otrzymane wyrażenie będzie nadal wyrażeniem sensownym, jeśli zaś terminy te należą do różnych kategorii semantycznych, to otrzymamy wyrażenie pozbawione sensu**

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie II. *Jeśli dwa terminy mają tę własność, że zastępując w dowolnym wyrażeniu sensownym jeden z tych terminów drugim otrzymujemy wyrażenie sensowne, to terminy te należą do tej samej kategorii semantycznej.*

Podane twierdzenia wynikają bezpośrednio z sensu, jaki nadaliśmy pojęciom, o których jest w nich mowa.

Wprowadzimy teraz symbole, oznaczające pewne kategorie semantyczne szczególnie ważne dla dalszych rozważań. Niech więc K^o oznacza kategorię

* Twierdzenie to wymaga pewnego uzupełnienia: oczywiście jest, że zarówno w wyrażeniu $\prod_x$, jak i w wyrażeniu $\sum_a$ zmiennej a nie możemy zastąpić stałą tej samej kategorii semantycznej.

nazw, K^1 — kategorię funktorów zdaniotwórczych o jednym argumencie nazwowym, K^2 — kategorię funktorów zdaniotwórczych o jednym argumencie, należącym do kategorii K^1 itd. Symbol K^{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots$) oznacza więc kategorię funktorów zdaniotwórczych o jednym argumencie należącym do K^i . Niech x będzie zmienną kategorii K^0 , X^i — zmienną kategorii K^i . Widoczne jest, że wyrażenie $X^i(x)$ jest sensowne wtedy i tylko wtedy, gdy $i = 1$, wyrażenie zaś $X^i(X^j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j+1$ ($j \geq 1$).

§ 3. TEORIA TYPÓW LOGICZNYCH

Przy końcu poprzedniego paragrafu wprowadziliśmy pewien sposób notowania wyrażeń rachunku kwantyfikatorów, różniący się od sposobu wprowadzonego w części I: zamiast pisać $A(x)$, $A(y)$, $B(x)$, ... umówiliśmy się pisać: $X^1(x)$, $X^1(y)$, $Y^1(x)$, ... Dokonamy dalszych zmian symboliki, zapisując wyrażenia:

$$(1) \quad X^1(x), X^2(X^1), X^3(X^2), \dots$$

w postaci następującej:

$$(2) \quad x \in_1 X^1, \quad X^1 \in_2 X^2, \quad X^2 \in_3 X^3, \dots *$$

Wyrażenia te czytamy: przedmiot x jest elementem zbioru X^1 , zbiór X^1 jest elementem rodziny zbiorów X^2 , rodzina zbiorów X^2 jest elementem zbioru rodzin X^3 itd. Litera x oznacza więc dowolne indywiduum, symbol X^1 dowolny zbiór indywiduów, X^2 dowolną rodzinę takich zbiorów itd.

Zanotujemy dwa twierdzenia rachunku kwantyfikatorów we wprowadzonej przed chwilą symbolice:

$$(3) \quad \prod_x (x \in_1 X^1 \rightarrow x \in_1 Y^1) \wedge \prod_x (x \in_1 X^1) \rightarrow \prod_x (x \in_1 Y^1)$$

$$(4) \quad \prod_x (x \in_1 X^1) \rightarrow \prod_x (x \in_1 X^1 \vee x \in_1 Y^1)$$

Wyrażenia te zanotowane w symbolice, którą posługiwaliśmy się w części I, mają postać:

$$(3') \quad \prod_x [A(x) \rightarrow B(x)] \wedge \prod_x A(x) \rightarrow \prod_x B(x)$$

$$(4') \quad \prod_x A(x) \rightarrow \prod_x [A(x) \vee B(x)]$$

Również definicje i twierdzenia algebry zbiorów notować możemy w symbolice wprowadzonej w części I lub w symbolice wprowadzonej w tym paragrafie.

* Czytelnika może razić nadmiar wskaźników we wprowadzonych oznaczeniach. Przekonamy się wkrótce, że grają one istotną rolę w teorii typów logicznych.

Podajemy przykłady takich twierdzeń i definicji, umieszczając obok nich odpowiednie twierdzenia i definicje rachunku kwantyfikatorów, zanotowane w obu symbolikach:

$$X = 1 = \prod_x x \in X$$

$$X^1 =_1 1^1 = \prod_x x \in_1 X^1$$

$$A =_1 1^1 = \prod_x A(x)$$

$$X \subset Y = \prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

$$X^1 \subset_1 Y^1 = \prod_x (x \in_1 X^1 \rightarrow x \in_1 Y^1)$$

$$A \subset_1 B = \prod_x [A(x) \rightarrow B(x)]$$

$$x \in X + Y = x \in X \vee x \in Y$$

$$x \in_1 X^1 +_1 Y^1 = x \in_1 X^1 \vee x \in_1 Y^1$$

$$[A +_1 B](x) = A(x) \vee B(x)$$

Posługując się tymi równoważnościami możemy wyrażeniom (3) i (4) nadać postać:

$$(3'') \quad X^1 \subset_1 Y^1 \wedge X^1 = 1^1 \rightarrow Y^1 =_1 1^1$$

$$(4'') \quad X^1 =_1 1^1 \rightarrow X^1 +_1 Y^1 =_1 1^1$$

Wyrażenia te są odpowiednikami następujących tez algebry zbiorów:

$$X \subset Y \wedge X = 1 \rightarrow Y = 1$$

$$X = 1 \rightarrow X + Y = 1$$

Nasuwa się myśl, że algebra zbiorów może być rozumiana jako fragment rachunku kwantyfikatorów, zawierający wyłącznie tezy, w których nie występują funktory o więcej niż jednym argumencie nazwowym. Dogodne (lecz niekonieczne) jest założenie, że w systemie logiki, którego fragmentem ma być algebra zbiorów, termin identyczności jest terminem pierwotnym.

Terminami pierwotnymi systemu algebry zbiorów, podanego w rozdziale I, były: „relacja należenia elementu do zbioru” i „zbiór pełny indywiduów”. Odpowiednikiem wyrażenia algebry zbiorów $x \in X$ jest wyrażenie rachunku kwantyfikatorów $x \in_1 X^1$; wyrażenie to jest jednak równoznaczne z wyrażeniem $X^1(x)$ czy też wyrażeniem $A(x)$. Tezy rozważanego systemu możemy więc notować nie posługując się symbolem $\in$. Symbol ten wprowadziliśmy do rachunku kwantyfikatorów, by uwidocznili związek pomiędzy tym systemem a algebrą zbiorów. Pojęcie zbioru pełnego indywiduów może być zdefiniowane w logice w następujący sposób:

$$x \in_1 1^1 = x =_0 x$$

Z definicji tej wynika natychmiast teza

$$x \in_1 1^1$$

będąca odpowiednikiem aksjomatu A1, podanego w rozdziale I.

Drugim aksjomatem, z którego korzystaliśmy budując algebrę zbiorów, jest aksjomat ekstensjonalności:

$$\prod_x (x \in X \equiv x \in Y) \rightarrow X = Y$$

Odpowiednikiem tego aksjomatu jest teza rachunku kwantyfikatorów

$$(5) \quad \prod_x (x \in_1 X^1 \equiv x \in_1 Y^1) \rightarrow X^1 =_1 Y^1$$

którą zanotować możemy również w postaci następującej:

$$\prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow A = B$$

Wyrażenie (5) zaliczamy do aksjomatów logiki. Bez tego aksjomatu moglibyśmy zbudować na gruncie logiki tylko drobny fragment teorii mnogości. Istotne jest też to, że w rozważanym systemie logicznym występują definicje. Gdybyśmy budowali teorię mnogości jako fragment logiki, w której nie występują definicje *, musielibyśmy przyjąć jeszcze jeden aksjomat. Do aksjomatów logicznych zaliczamy też zwykle tzw. aksjomat nieskończoności, gwarantujący istnienie nieskończonej ilości indywiduów. Przy pomocy symboli aksjomat ten możemy zanotować np. w postaci następującej:

$$\sum_{X^1 \subsetneq 1^1} X^1 \sim 1^1$$

Aksjomat ten zanotowany jest przy pomocy terminu równoliczności zbiorów. Przekonamy się jednak w paragrafie następnym, że termin ten może być zdefiniowany na gruncie logiki. Zauważmy jeszcze, że dowody tez algebry zbiorów i tez rachunku kwantyfikatorów, będących ich odpowiednikami, są całkowicie analogiczne, o czym przekonać się może czytelnik na przykładzie tez, podanych w § 1 rozdziału I.

Omówiliśmy trochę szczegółowiej związek między algebrą zbiorów a rachunkiem kwantyfikatorów, wykazując, że algebra ta może być rozumiana jako fragment logiki. W następnym paragrafie wykażemy, że również inne działy teorii mnogości, np. arytmetyka liczb kardynalnych i porządkowych, mogą być rozumiane jako fragmenty logiki.

Symbolem 1^1 oznaczyliśmy zbiór wszystkich indywiduów, tzn. przedmiotów nie będących zbiorami. Zbiór ten nazywać będziemy zbiorem pełnym typu pierwszego, elementy jego — przedmiotami typu zerowego. Stałe kategorii semantycznej K^0 są nazwami określonych przedmiotów typu zerowego, przy pomocy zmiennych tej kategorii wysławiamy własności dowolnych przedmiotów tego typu. Wyrażenie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego lub

* Systemy logiczne, w których nie występują definicje, są pod pewnymi względami dogadujące od systemów zawierających definicje i z tego względu są często stosowane.

szczegółowego, wiążącego zmienną kategorii K^0 , stwierdza, że wszystkie lub niektóre przedmioty typu zerowego mają własność wysłowioną przez wyrażenie występujące po kwantyfikatorze. Oznaczmy dalej przez 1^2 zbiór wszystkich podzbiorów zbioru 1^1 . Zbiory te nazywamy przedmiotami (lub zbiorami) typu pierwszego. Stałe kategorii K^1 są nazwami określonych elementów (elementy te są, oczywiście, zbiorami) zbioru 1^2 .

Przy pomocy zmiennych tej kategorii wysławiamy własności dowolnych elementów tego zbioru. Elementami zbiorów typu pierwszego mogą być tylko przedmioty typu zerowego. Ogólnie: symbol 1^{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots$) oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru 1^i . Zbiór 1^{i+1} nazywamy zbiorem pełnym typu $i+1$ -go, elementy tego zbioru — przedmiotami typu i -go. Stałe kategorii K^i są nazwami określonych elementów zbioru 1^{i+1} (przedmiotów typu i -tego), przy pomocy zmiennych tej kategorii wysławiamy własności dowolnych elementów tego zbioru. Elementami zbiorów typu $i+1$ -go mogą być tylko przedmioty typu i -tego.

Zastanowimy się jeszcze nieco szczegółowiej nad definicjami funktorów należących do kategorii semantycznej K^{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots$). Schemat definicji takiego funktora ma postać

$$X_1^{i+1}(X^i) = \Phi(X^i)$$

gdzie symbol X_1^{i+1} oznacza stały funktor kategorii K^{i+1} , określony przez daną definicję, symbol X^i jest zmienną kategorii K^i , wreszcie symbol $\Phi(X^i)$ oznacza dowolne wyrażenie, w którym występuje zmienna wolna X^i i nie występuje żadna inna zmienna wolna. Przyjmujemy, że symbol X_1^{i+1} jest nazwą określonego zbioru typu $i+1$ -go, którego elementami są te i tylko te przedmioty typu i -tego, które spełniają funkcję zdaniową $\Phi(X^i)$. Przyjmujemy też, że zbiór ten istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(X^i)$ jest wyrażeniem sensownym.

Podział przedmiotów na indywidua, zbiory indywiduów, rodziny zbiorów indywiduów itp. nosi nazwę teorii typów logicznych. Podział ten ma następujące własności:

- 1) elementami zbioru dowolnego typu mogą być tylko przedmioty typu o jeden niższego;
- 2) zbiór pełny dowolnego typu, z wyjątkiem typu pierwszego, jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru pełnego typu o jeden niższego.

Często zbiory są utożsamiane z cechami, w tym sensie, iż zwrot, że przedmiot należy do pewnego zbioru, jest równoznaczny z powiedzeniem, że przedmiot ten ma odpowiednią cechę. Np. zwrot „ x jest elementem zbioru przedmiotów białych” jest równoznaczny ze zwrotem „ x ma cechę białości”. Wtedy też indywidua traktujemy jako przedmioty, które mają cechy, ale same nie są cechami, zbiory indywiduów jako cechy takich przedmiotów, rodziny zbiorów indywiduów jako cechy takich cech itp. O tym, że cechy mogą posiadać z kolei pewne inne cechy, świadczy np. powiedzenie, że pewna cecha jest mało praw-

dopodobna. Małe prawdopodobieństwo jest więc w tym przypadku cechą cech. Widoczne jest, że tak rozumiane zbiory, gdy należą do różnych typów logicznych, są istotnie różnymi przedmiotami, żadne też indywiduum nie może być identyczne z żadnym zbiorem. Interpretacja zbiorów jako cech jest więc zgodna z teorią typów logicznych. Interpretacja ta nasuwa jednak pewne trudności, których nie będziemy tu omawiali.

Zastanowimy się teraz, w jaki sposób teoria typów logicznych zapobiega powstawaniu antynomii teorii mnogości. Źródłem antynomii Russella była definicja

$$X \in R \equiv X \bar{\in} X$$

Definicja ta nie jest jednak zbudowana poprawnie, gdyż prawa jej strona nie jest wyrażeniem sensownym na gruncie teorii typów logicznych, gdy zmienną X zaopatrzymy po obu stronach znaku „ $\in$ ” w ten sam wskaźnik „ i ”. Natomiast wyrażeniem sensownym na gruncie teorii typów logicznych jest wyrażenie

$$X^i \in_{i+1} R^{i+1} \equiv X^i \bar{\in}_{i+1} X^{i+1}$$

Nie jest ono jednak poprawną definicją, gdyż po prawej jego stronie występuje zmienna wolna X^{i+1} , która nie występuje po jego lewej stronie*.

Na gruncie teorii typów logicznych nie możemy też zdefiniować zbioru wszystkich zbiorów, lecz tylko zbiór wszystkich zbiorów pewnego typu. Pojęcie to jednak nie prowadzi do sprzeczności. Nie możemy więc na gruncie teorii typów odtworzyć antynomii zbioru wszystkich zbiorów, nie możemy też odtworzyć na tym gruncie antynomii Burali-Fortiego ani żadnej innej antynomii teorii mnogości.

Omówimy jeszcze w paru słowach teorię podziału relacji na typy logiczne. Przyjmujemy, że funktory zdaniotwórcze o większej od 1 liczbie argumentów są nazwami pewnych zbiorów, przy czym funktory dwuargumentowe są nazwami zbiorów par uporządkowanych, funktory trójargumentowe — zbiorów trójek uporządkowanych itd. Zbiory układów uporządkowanych nazywamy relacjami. Elementami układów uporządkowanych tworzących relacje mogą być przedmioty dowolnych typów logicznych. Teoria podziału relacji na typy logiczne nie różni się istotnie od teorii podziału zbiorów nie będących relacjami, jest jednak bardziej skomplikowana.

§ 4. DEFINICJE NIEKTÓRYCH POJĘĆ TEORII MNOGOŚCI NA GRUNCIE LOGIKI

Jak już wspomnieliśmy, wszystkie pojęcia teorii mnogości mogą być zdefiniowane na gruncie logiki. Jednak dla tego samego pojęcia teorii zbiorów mamy w logice nie jeden, lecz nieskończenie wiele odpowiedników. Uwagi te wyjaśnimy

* Poprawna definicja powinna spełniać tzw. warunek jednorodności (por. cz. I, rozdz. II, § 5).

szczególnej na przykładzie pojęcia funkcji, które zostało zdefiniowane w rozdziale I przy pomocy wyrażenia

$$\prod_x \prod_y \prod_z (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$$

Odpowiednikami tego wyrażenia na gruncie logiki są wyrażenia następujące:

$$\prod_x \prod_y \prod_z (xR^1y \wedge xR^1z \rightarrow y =_0 z)$$

$$\prod_{X^i} \prod_{Y^i} \prod_{Z^i} (X^i R^{i+1} Y^i \wedge X^i R^{i+1} Z^i \rightarrow Y^i =_i Z^i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Mamy więc ciąg nieskończony pojęć funkcji należących do różnych typów logicznych, zdefiniowanych jednak w analogiczny sposób i mających analogiczne własności. O pojęciach takich mówimy, że są „typikalnie wieloznaczne”. Typikalnie wieloznaczne są też pojęcia prawej i lewej dziedziny relacji oraz pojęcia relacji doskonałej i relacji równoliczności zbiorów. Definicje tych pojęć na gruncie logiki są całkowicie analogiczne do odpowiednich definicji teorii mnogości.

Przypominamy, że jedynymi pojęciami pierwotnymi teorii mnogości, wykraczającymi poza algebrę zbiorów, są pojęcia mocy zbioru, typu zbioru uporządkowanego i pary uporządkowanej. Pojęcia te mogą być zdefiniowane w logice. Są one znów typikalnie wieloznaczne.

Ograniczymy się do podania definicji tych pojęć w przypadkach najprostszych. Definicje dwóch pierwszych pojęć należą do tzw. definicji przez abstrakcję. Omówimy pokrótce ten rodzaj definicji.

Niech R^1 będzie dowolną relacją typu równoważności (definicja tego pojęcia została podana w § 6 rozdziału I). Dla relacji tej spełnione są więc wzory:

- I. xR^1x
- II. $xR^1y \rightarrow yR^1x$
- III. $xR^1y \wedge yR^1z \rightarrow xR^1z$
- D4.1. $y \in_1 [x]_{R^1} \equiv xR^1y$

Zbiór $[x]$ nazywamy klasą abstrakcji ze względu na relację R^1 wyznaczoną przez element x .

Podamy kilka własności zdefiniowanego pojęcia zakładając, że R^1 jest relacją typu równoważności.

- L4.1. $x \in_1 [x]_{R^1}$ [D4.1, I]
- L4.2. $[x]_{R^1} =_1 [y]_{R^1} \rightarrow xR^1y$

		{zał.}
Dow. (1)	$[x]_{R^1} =_1 [y]_{R^1}$	{L4.1}
(2)	$y \in_1 [y]_{R^1}$	{1, 2}
(3)	$y \in_1 [x]_{R^1}$	{D4.1, 3}
	xR^1y	
L4.3.	$xR^1y \rightarrow [x]_{R^1} C_1 [y]_{R^1}$	
		{zał.}
Dow. (1)	xR^1y	{z dow.}
(1.1)	$z \in_1 [x]_{R^1}$	{D4.1, 1.1}
(1.2)	xR^1z	{II, III, 1, 1.2}
(1.3)	zR^1y	{D4.1, II, 1.3}
(1.4)	$z \in_1 [y]_{R^1}$	{1.1 $\rightarrow$ 1.4}
	$[x]_{R^1} C_1 [y]_{R^1}$	{L4.3, II}
L4.4.	$xR^1y \rightarrow [y]_{R^1} C_1 [x]_{R^1}$	
T4.1.	$[x]_{R^1} =_1 [y]_{R^1} \equiv xR^1y$	{L4.2, L4.3, L4.4}

W zupełnie ten sam sposób moglibyśmy udowodnić

$$T4.1a. \quad [X^1]_{R^1} =_2 [Y^1]_{R^1} \equiv X^1 R^2 Y^1$$

Twierdzenia T4.1 i T4.1a różnią się tylko kategoriami semantycznymi zmiennych i stałych w nich występujących.

Wyjaśnimy sens intuicyjny D4.1 i T4.1. Każda relacja typu równoważności zachodzi między przedmiotami, które są jednakowe ze względu na pewną cechę. Tak np. relacja podobieństwa figur geometrycznych zachodzi między figurami, które są jednakowych kształtów, relacja przystawania zachodzi między figurami, które są jednakowych kształtów i wielkości. Zbiór $[x]_{R^1}$ jest więc zbiorem wszystkich przedmiotów nie różniących się od x -a pod względem pewnej cechy. Gdy R^1 jest relacją podobieństwa figur geometrycznych, x zaś trójkątem równobocznym, to zbiór ten jest zbiorem wszystkich trójkątów równobocznych. Jeśli zbiory utożsamimy z cechami, to $[x]_{R^1}$ jest cechą, przysługującą x -owi i wszystkim przedmiotom nie różniącym się od x -a pod względem tej cechy.

Twierdzenie T4.1 mówi, że cechy $[x]_{R^1}$ i $[y]_{R^1}$ są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy x i y nie różnią się pod względem tej cechy.

Wiemy, że relacja równoliczności zbiorów jest relacją typu równoważności. Niech X^1 będzie dowolnym zbiorem indywiduów. Moc (liczebność) zbioru X^1 rozumiemy jako cechę przysługującą zbiorowi X^1 i wszystkim zbiorom równolicznym z X^1 . Moc zbioru X^1 jest więc klasą abstrakcji ze względu na relację równoliczności wyznaczoną przez ten zbiór. Stąd

$$(1) \quad \bar{X}^1 =_2 [X^1]_{\sim}$$

Widoczne jest, że tak rozumiana moc zbioru jest pojęciem typikalnie wieloznacznym.

Jedynym aksjomatem, na którym oparliśmy w rozdziale I teorię równoliczności zbiorów, był aksjomat następujący

$$\bar{X}^1 =_2 \bar{Y}^1 \equiv X^1 \sim Y^1$$

Korzystając ze wzoru (1) zanotować możemy ten aksjomat w postaci następującej:

$$[X^1]_{\sim} =_2 [Y^1]_{\sim} \equiv X^1 \sim Y^1$$

Otrzymane wyrażenie jest szczególnym przypadkiem T4.1a, może więc być udowodnione na gruncie logiki.

Uwagi o mocy i równoliczności zbiorów da się przenieść bez istotnych zmian na pojęcie typu i podobieństwa zbiorów uporządkowanych.

Pozostało jeszcze do omówienia pojęcie pary uporządkowanej. Parę $\langle x, y \rangle$ definiujemy w logice jako rodzinę zbiorów, której jedynymi elementami są: zbiór jednostkowy $\{x\}$ oraz zbiór dwuelementowy $\{x, y\}$. Spełniony jest więc wzór:

$$(2) \quad \langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Jedyny aksjomat dotyczący par uporządkowanych, który przyjęliśmy w teorii mnogości (§ 5 rozdziału I), miał postać

$$(3) \quad \langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \equiv x = z \wedge y = t$$

Opierając się na wzorze (2) jako definicji pary uporządkowanej możemy udowodnić wzór (3).

Z równości

$$(4) \quad x = z \quad i \quad y = t$$

oraz D1.3a rozdziału I wynika, że

$$(5) \quad \{x\} = \{z\} \quad i \quad \{x, y\} = \{z, t\}$$

Z tych zaś równości i wzoru (2) wynika równość

$$(6) \quad \langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle$$

Wykażemy, że i odwrotnie, z równości (6) wynikają równości (4). Rozpaczmy najprzód przypadek, gdy $x \neq y$. Wtedy ze wzoru (6) wynikają na podstawie wzoru (2) wzory (5), z których z kolei wynikają wzory (4). Jeśli zaś $x = y$, to

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}\}$$

Stąd i z równości (6) wynika, że $x = t$ oraz że

$$\langle z, t \rangle = \{\{z\}\} = \{\{x\}\}$$

a więc $z = x = y = t$. W obu więc możliwych przypadkach ze wzoru (6) wynikają wzory (4). Wzór (3) jest więc prawdziwy.

Zauważmy jednak, że pewnik wyboru, o którym szczegółowiej była mowa w § 14 rozdziału I, nie może być udowodniony na gruncie logiki.

§ 5. AKSJOMATYCZNA TEORIA MNOGOŚCI

Wspomnieliśmy już, że twórcą aksjomatycznej teorii mnogości jest E. Zermelo. Podane przez niego aksjomaty ulegały licznym, lecz raczej niezbyt istotnym zmianom. Aksjomaty, które tu podamy, prawie nie różnią się od aksjomatów zawartych w *Teorii mnogości* profesorów Kuratowskiego i Mostowskiego.

Terminami pierwotnymi, występującymi w tych aksjomatach, są pojęcia zbioru pustego i relacji należenia przedmiotu do zbioru.

Notując aksjomaty teorii mnogości posłużymy się symboliką, którą posługiwaliśmy się w części II. W aksjomatycznej teorii mnogości występują zmienne jednej tylko kategorii semantycznej; są nimi litery $x, y, z, t, \dots$. Podstawowymi wyrażeniami rozważanego systemu są wyrażenia o postaci

$$x \in y, \quad x = y.$$

W wyrażeniach tych zamiast zmiennych występować może symbol „0”, oznaczający zbiór pusty. Wyrażenia tych postaci możemy poprzedzać znakiem negacji, kwantyfikatorami oraz łączyć znakami implikacji, koniunkcji, alternatywy i równoważności. Na otrzymanych wyrażeniach możemy znów wykonywać wymienione operacje itp. Otrzymane w ten sposób wyrażenia nazywać będziemy wyrażeniami sensownymi aksjomatycznej teorii mnogości.

Znak identyczności może być traktowany jako symbol logiczny; wówczas teoria mnogości opiera się na węższym rachunku kwantyfikatorów z identycznością (formułowanym często metalogicznie). Symbol ten może być również zdefiniowany przy pomocy symbolu ϵ . Definicją taką może być równoważność:

$$(I) \quad x = y \equiv \prod_z (x \in z \equiv y \in z)$$

W aksjomatycznej teorii mnogości równoważność ta, aczkolwiek analogiczna do równoważności T.VI (cz. I, rozdz. II, § 6), różni się od niej ze względu na kategorie semantyczne zmiennych, które w niej występują. Mianowicie w (I) zmienna z należy do tej samej kategorii semantycznej, co zmienne x oraz y , podczas gdy zmienna A występująca w T.VI należy do innej kategorii semantycznej niż zmienne x oraz y .

Aby nadać aksjomatom teorii mnogości przejrzystą postać, wprowadzimy kilka definicji.

$$D1. \quad Z(x) \equiv \sum_y (y \in x) \vee x = 0$$

Wyrażenie $Z(x)$ czytamy: x jest zbiorem. Przedmiot x jest więc zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przedmiot będący jego elementem, bądź gdy jest on identyczny ze zbiorem pustym.

$$D2. \quad R(x) \equiv Z(x) \wedge \prod_{y \in x} Z(y)$$

Zdefiniowane wyrażenie czytamy: x jest rodziną zbiorów. Przedmiot x jest więc rodziną zbiorów, gdy sam jest zbiorem i każdy jego element też jest zbiorem.

Zauważmy, że wyrażenia $Z(x)$, $R(x)$ są tylko skrótami wyrażań występujących w D1, D2 i D3 po prawej stronie znaku równoważności. Funktorów „Z” i „R” nie należy więc rozumieć jako nazw jakichś zbiorów.

Dalsze definicje nie różnią się treścią od odpowiednich definicji rozdziału I, są jednak zanotowane w nieco innej symbolice. Obok każdej z podanych niżej definicji umieszczamy w nawiasie numer jej odpowiednika z rozdziału I.

$$D3. \quad x \subset y \equiv Z(x) \wedge Z(y) \wedge \prod_z (z \in x \rightarrow z \in y) \quad (D1.2)$$

$$D3a. \quad x \subsetneq y \equiv x \subset y \wedge x \neq y \quad (D1.9)$$

$$D4. \quad x = \bigcup_{z \in y} z \equiv \prod_t [t \in x \equiv \sum_{u \in y} t \in u] \quad (D4.3)$$

$$D5. \quad x = 2^y \equiv \prod_z (z \in x \equiv z \subset y) \quad (D10.1)$$

$$D6. \quad x = y \cdot z \equiv \prod_t (t \in x \equiv t \in y \wedge t \in z) \quad (D1.5)$$

$$D7. \quad x = \{y, z\} \equiv \prod_t [t \in x \equiv (t = y \vee t = z)] \quad (D1.3b)$$

Zauważmy jeszcze to, że zamiast pisać $\sim(x \in y)$ pisać będziemy $x \bar{\in} y$. Podajemy aksjomaty teorii mnogości.

$$A1. \quad \prod_{Z(x)} \prod_{Z(y)} \left[\prod_z (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y \right]$$

Aksjomat ten nosi nazwę aksjomatu ekstensjonalności. Nie różni się on treścią od A1.2 podanego w rozdziale I.

$$A2. \quad \prod_x (x \bar{\in} 0)$$

W myśl tego aksjomatu żaden przedmiot nie jest elementem zbioru pustego.

$$A3. \quad \prod_x \prod_y \sum_z [z = \{x, y\}]$$

Dla każdego więc przedmiotu x i y istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są te przedmioty.

$$A4. \quad R(y) \rightarrow \sum_{Z(x)} (x = \bigcup_{z \in y} z)$$

Dla każdej więc rodziny zbiorów istnieje zbiór, będący sumą elementów tej rodziny.

$$A5. \quad Z(y) \rightarrow \sum_{R(x)} (x = 2^y)$$

Dla każdego więc zbioru istnieje rodzina wszystkich jego podzbiorów.

$$A6. \quad \sum_{R(x)} (x \neq 0 \wedge \prod_{y \in x} \sum_{z \in y} y \subseteq z)$$

W myśl tego aksjomatu istnieje co najmniej jedna niepusta rodzina zbiorów taka, że dla każdego zbioru y , będącego elementem tej rodziny, istnieje zbiór, będący również elementem tej rodziny, którego częścią właściwą jest zbiór y . Zauważmy, że warunek ten spełnia np. następująca rodzina podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}, \dots$$

Gdybyśmy jednak wzięli pod uwagę dowolny skończony zbiór, np. zbiór liczb naturalnych ≤ 1000 , i dowolną niepustą rodzinę jego podzbiorów, to wśród tych podzbiorów istniałby zawsze podzbiór, który nie byłby częścią właściwą żadnego podzbioru, należącego do rozważanej rodziny. A6 gwarantuje więc istnienie nieskończonej ilości przedmiotów. Aksjomat ten nosi też nazwę aksjomatu nieskończoności.

$$A7. \quad R(x) \wedge x \neq 0 \wedge 0 \in x \wedge \prod_{y \in x} \prod_{z \in y} (y \neq z \rightarrow y \cdot z = 0) \rightarrow \sum_{Z(\theta)} \prod_{u \in x} \sum_v 1 \cdot v \in t \cdot u$$

Jest to aksjomat wyboru, o którym szczegółowiej była mowa w § 14 rozdziału I.

Niech x będzie dowolnym zbiorem, $\Phi(z)$ zaś dowolnym wyrażeniem sensownym aksjomatycznej teorii mnogości, w którym występuje zmienna wolna z , lecz w którym nie występują zmienne wolne x i y .

$$A8. \quad Z(x) \rightarrow \sum_{Z(y)} \prod_z [z \in y \Rightarrow z \in x \wedge \Phi(z)]$$

Łatwo zauważyć, że zbiór y , którego istnienie stwierdza A8, jest podzbiorem zbioru x . W myśl więc A8 dla każdego zbioru x i każdego warunku $\Phi(z)$ istnieje zbiór przedmiotów spełniających ten warunek, z tym jednak ograniczeniem, że zbiór ten jest podzbiorem zbioru x . A8 nie jest właściwie pojedynczym aksjomatem, lecz schematem nieskończonej ilości aksjomatów, które otrzymujemy wstawiając w A8 na miejsce $\Phi(z)$ określone wyrażenia sensowne, np. wyrażenie „ $z \neq 0$ ”. Otrzymane w ten sposób wyrażenie

$$Z(x) \rightarrow \sum_{Z(y)} \prod_z (z \in y \Rightarrow z \in x \wedge z \neq 0)$$

zaliczamy do też aksjomatycznej teorii mnogości. Aksjomat A8 nosi nazwę aksjomatu podzbiorów.

Jak zaznaczyliśmy już uprzednio, teorię mnogości można budować nie posługując się pojęciami mocy i typu porządkowego, lecz tylko pojęciami równoliczności i podobieństwa zbiorów. O ile jednak chcemy, by pojęcia te wystąpiły w aksjomatycznej teorii mnogości, musimy je zaliczyć do pojęć pierwotnych tej teorii, gdyż na jej gruncie pojęcia te nie mogą być zdefiniowane, logicznych. Jednocześnie należy wzbogacić układ aksjomatów teorii mnogości o A7.1 i A2.1, z których pierwszy podany był w rozdziale I, drugi zaś w rozdziale II.

Na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości lewe strony definicji D7.3. rozdz. I i D2.6. rozdz. II oraz D6.2. rozdz. II będą miały odpowiednio postać: $Lk(m)$, $Tp(a)$, $Lp(a)$. Również niektóre inne definicje wprowadzone w poprzednich rozdziałach trzeba odpowiednio przeformułować na gruncie tej teorii. Np. zamiast D5.2. z rozdz. I wystąpi definicja: $x \in \sum_{a \in X} \Phi(a) \equiv x \in X \wedge \Phi(x)$,

analogicznej modyfikacji ulegnie również D5.3 z rozdz. I, po lewej stronie D6.1. rozdz. I wprowadzimy wyrażenie „ $Funkc(R)$ ” lub ograniczymy D6.1 definiując zbiór funkcji należących do danego zbioru.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób założenia aksjomatycznej teorii mnogości zapobiegają antynomiom. Zagadnienie to rozpatrzmy szczegółowiej na przykładzie antynomii Russella. Wiemy, że punktem wyjścia tej antynomii jest równoważność

$$(1) \quad X \in R \equiv X \in X$$

Zbliżona do niej co do treści jest następująca równoważność

$$(2) \quad R(x) \equiv x \in x$$

którą możemy zaliczyć do definicji aksjomatycznej teorii mnogości, gdyż w niej, w odróżnieniu od logicznej teorii typów, wyrażenie „ $x \in x$ ” jest wyrażeniem sensownym. Wyrażenie jednak $R(x)$ jest tylko skrótem wyrażenia „ $x \in x$ ”, symbol R nie jest też tu nazwą żadnego zbioru, nie możemy więc go podstawiać za zmienną x . Wyrażenie (2) nie prowadzi więc do sprzeczności.

Zastanówmy się z kolei nad wyrażeniem

$$(3) \quad Z(x) \rightarrow \sum_{Z(y)} \prod_z (z \in y \Rightarrow z \in x \wedge z \neq 0)$$

którego treść jest również zbliżona do treści wyrażenia (1). Wykażemy najprzód, że wyrażenie (3) prowadzi do sprzeczności. Podstawieniem tego wyrażenia jest wyrażenie

$$(3a) \quad Z(0) \rightarrow \sum_{Z(y)} \prod_z (z \in y \Rightarrow z \in 0 \wedge z \neq 0)$$

W myśl D1 poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, prawdziwy jest więc też jej następnik, z którego na podstawie reguły opuszczania kwantyfikatora szczegółowego otrzymujemy wyrażenie

$$\prod_z (z \in y_1 \equiv z \bar{\in} z)$$

Z tego zaś wyrażenia wynika wyrażenie

$$(4) \quad y_1 \in y_1 \equiv y_1 \bar{\in} y_1$$

prowadzące natychmiast do sprzeczności.

Zauważmy jednak, że wyrażenie (3) nie jest tezą aksjomatycznej teorii mnogości, A8 pozwala bowiem dołączyć do systemu wyrażenie

$$(5) \quad Z(x) \rightarrow \sum_{Z(y)} \prod_z (z \in y \equiv z \in x \wedge z \bar{\in} z)$$

a więc wyrażenie, mające wprawdzie podobną, lecz nie całkiem tę samą budowę co wyrażenie (3). Z wyrażenia (5), wnioskując podobnie jak przy wyprowadzaniu ze wzoru (3) wyrażenia (4), otrzymujemy wyrażenie

$$y_1 \in y_1 \equiv y_1 \in 0 \wedge y_1 \bar{\in} y_1$$

Wyrażenie to nie prowadzi jednak do sprzeczności. Widzimy więc, że antynomia Russella nie może być odtworzona na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości, tak jak nie może być też odtworzona na gruncie teorii typów logicznych. Podobnie przedstawia się sprawa ze wszystkimi znanymi antynomiami teorii mnogości. Nasuwa się pytanie, czy jakieś rozumowanie, dotychczas przez nikogo nie przeprowadzone, nie doprowadzi do sprzeczności czy to na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości, czy też na gruncie teorii typów logicznych? Otóż zostało udowodnione, że obie te teorie, gdy zubożymy je o aksjomat nieskończoności, są niesprzeczne. Przekonanie o niesprzeczności tych teorii, wraz z aksjomatem nieskończoności, opierać musimy tylko na fakcie doświadczalnym, że daleko bardzo posunięta rozbudowa tych systemów nie doprowadziła do sprzeczności.

Nasuwa się też pytanie: dlaczego obie rozważane teorie zapobiegają antynomiom? Przyczyna tego tkwi w tym, że na gruncie każdej z nich ograniczone są sposoby budowania zbiorów. W teorii typów logicznych zakładamy, że dla każdej funkcji zdaniowej istnieje zbiór przedmiotów spełniających tę funkcję. Budowa jednak funkcji zdaniowych jest ograniczona warunkami, jakie spełniać muszą kategorie semantyczne wyrażen stojących przed i po znaku „ $\in$ ”, który jest też w teorii tej „typikalnie wieloznaczny”. W aksjomatycznej teorii mnogości nie ma tych ograniczeń. Teoria ta jednak nie przyjmuje, że dla każdej funkcji zdaniowej istnieje zbiór przedmiotów spełniających tę funkcję, lecz

przyjmuje tylko to, że dla każdej funkcji zdaniowej i każdego zbioru istnieje jego podzbiór złożony z przedmiotów spełniających daną funkcję zdaniową. Dzięki temu w żadnej z tych teorii nie można np. stwierdzić istnienia zbioru wszystkich zbiorów, czy też zbioru wszystkich zbiorów nie będących własnymi elementami.

Pomimo że intuicje, na których oparte są rozważane teorie, różnią się istotnie, zasób ich twierdzeń jest prawie taki sam. Dokładniej: każdej tezie aksjomatycznej teorii mnogości odpowiada zespół twierdzeń teorii typów logicznych o takiej samej lub bardzo zbliżonej treści intuicyjnej, przy czym twierdzenia tego zespołu różnią się tylko tym, że w każdym z nich mowa jest o zbiorach innych typów logicznych. I odwrotnie: każdemu takiemu zespołowi twierdzeń teorii typów logicznych odpowiada teza aksjomatycznej teorii mnogości o takiej samej lub bardzo zbliżonej treści.

Na pytanie, która z rozważanych teorii jest „lepszą”, trudno odpowiedzieć. Żadna nie jest doskonała, każda ma formalne i intuicyjne wady. Z tego względu w wykładzie teorii mnogości, podanym w części II, nie trzymaliśmy się konsekwentnie żadnej z tych teorii. Czynią tak też inne podręczniki, nawet na bardzo wysokim poziomie, np. książka prof. W. Sierpińskiego. Szczegółowy wykład aksjomatycznej teorii mnogości znajdzie czytelnik w książce profesorów Kuratowskiego i Mostowskiego, zarys teorii typów logicznych w *Logice matematycznej* prof. A. Mostowskiego.

§ 6. TEORIA MNOGOŚCI A ARYTMETYKA

W arytmetyce teoretycznej definiowane są liczby całkowite przy pomocy liczb naturalnych, arytmetyka liczb całkowitych oparta jest też na arytmetyce liczb naturalnych. W takim samym stosunku pozostaje arytmetyka liczb wymiernych do arytmetyki liczb całkowitych, arytmetyka liczb rzeczywistych do arytmetyki liczb wymiernych i wreszcie arytmetyka liczb zespolonych do arytmetyki liczb rzeczywistych. Niezdefiniowane pozostają więc tylko liczby arytmetyki liczb rzeczywistych. Niezdefiniowane pozostają więc tylko liczby naturalne, jedynie też budując ich arytmetykę musimy wprowadzić specjalne aksjomaty. Pierwszą chronologicznie i najbardziej znaną aksjomatyką arytmetyki liczb naturalnych jest aksjomatyka podana przez matematyka i logika włoskiego G. Peano. Pojęciami pierwotnymi, które występują w tej aksjomatyce, są: liczba zero, zbiór wszystkich liczb naturalnych i funkcja

$$x = \text{seq } y$$

Wyrażenie to czytamy: x jest sekwensem (następnikiem) y . Przyjmujemy że jest ono równoważne wyrażeniu

$$x = y + 1$$

Notując aksjomaty Peany posłużymy się oznaczeniami wprowadzonymi w części II:

- I. $0 \in \mathbb{N}^*$
- II. $x \in \mathbb{N} \rightarrow \text{seq } x \in \mathbb{N}$
- III. $x, y \in \mathbb{N} \wedge \text{seq } x = \text{seq } y \rightarrow x = y$
- IV. $x \in \mathbb{N} \rightarrow \text{seq } x \neq 0$
- V. $0 \in X \wedge \prod_x (x \in X \rightarrow \text{seq } x \in X) \rightarrow \mathbb{N} \subset X$

Ostatni aksjomat jest aksjomatem indukcji.

Niezmiernie ważny dla podstaw matematyki jest fakt, że pojęcia pierwotne arytmetyki Peany mogą być zdefiniowane przy pomocy pojęć teorii mnogości, aksjomaty zaś I-V mogą być na jej gruncie udowodnione. Arytmetyka Peany jest więc fragmentem teorii mnogości. Wiemy jednak, że ugruntowanie innych arytmetyk, np. arytmetyki liczb rzeczywistych, nie wymaga wprowadzenia nowych pojęć pierwotnych ani też przyjęcia nowych aksjomatów. Arytmetyki więc wszystkich rodzajów liczb, a tym samym też analiza matematyczna, są fragmentami teorii mnogości.

Definicje terminów „0”, „ $\mathbb{N}$ ” i „seq” w teorii typów logicznych i aksjomatycznej teorii mnogości są zasadniczo takie same, różnią się jednak szczegółami formalnymi. Aby uniknąć związanych z tym nieistotnych komplikacji, podamy tylko słowne, a więc z konieczności niedokładne, określenia rozważanych pojęć.

Zero definiujemy jako moc zbioru pustego, zbiór liczb naturalnych jako zbiór wszystkich liczb kardynalnych, nie będących liczbami pozaskończonymi**. Aby zdefiniować pojęcie następnika, wprowadzimy pomocniczą relację ρ , która zachodzi pomiędzy dwoma zbiorami wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy z tych zbiorów zawiera drugi, różnica zaś ich jest zbiorem jednoelementowym. Podajemy definicję następnika:

x jest następnikiem y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są mocami zbiorów, między którymi zachodzi relacja ρ .

Nie podamy dowodów aksjomatów I-V na gruncie teorii mnogości, lecz ograniczymy się do uwagi, że dla ugruntowania arytmetyki liczb naturalnych, zarówno w teorii typów logicznych, jak i w aksjomatycznej teorii mnogości, należy do teorii tych dołączyć aksjomat nieskończoności.

* W arytmetyce Peany zaliczamy więc liczbę 0 do liczb naturalnych.
** Por. § II rozdz. I.

§ 7. FILOZOFICZNE UWAGI O POJĘCIU ZBIORU

Pojęcie zbioru, gdy nie zastanawiamy się nad nim dokładniej, wydaje się całkowicie proste i jasne. Wiemy jednak, że posługiwanie się tym pojęciem w sposób niesprecyzowany prowadzić może do sprzeczności. Nie jest to jedyna nad filozoficznymi i intuicyjnymi podstawami teorii mnogości bierze dziś żywy udział wielu filozofów, logików i matematyków. Dyskusja ta nie doprowadziła dotąd do jednego, bezspornie przyjętego poglądu. Ograniczymy się więc tu do przedstawienia kilku ważniejszych stanowisk, przeważnie w postaci cytatów z wypowiedzi współczesnych logików i matematyków.

Zauważmy przede wszystkim, że słowo „zbiór” ma w języku potocznym dwa wyraźnie różne znaczenia, z których jedno nazywa się kolektywnym, a drugie dystrybutywnym*. W znaczeniu kolektywnym — zbiór pewnych przedmiotów jest całością złożoną z tych przedmiotów tak, jak łańcuch składa się z ogniw lub kupa piasku z ziarenek piasku. W tym znaczeniu zbiór konkretnych, zmysłowo spostrzegalnych przedmiotów jest też konkretnym, dostępnym spostrzeżeniu przedmiotem. Używając terminu „zbiór” w tym znaczeniu, rozumiemy wyrażenie „ x jest elementem zbioru A ” w tym samym sensie, co wyrażenie „ x jest częścią zbioru A ” (przy tym znaczeniu wyrazu „część”, przy którym noga stołu jest częścią stołu). Teoria tak rozumianych zbiorów została zbudowana przez St. Leśniewskiego pod nazwą mereologii. Używając terminu „zbiór” w sensie dystrybutywnym, uważamy zdanie „Mars jest elementem zbioru planet słonecznych” za równoważne ze zdaniem „Mars jest planetą słoneczną”. O różnicy obu tych znaczeń świadczy fakt, że pewne zdania prawdziwe przy jednym znaczeniu terminu „zbiór” są fałszywe przy drugim jego znaczeniu. Np. przy znaczeniu kolektywnym jest prawdą, że dziesiąta część Marsa jest elementem zbioru planet słonecznych, gdyż jest ona częścią całego tego układu; natomiast zdanie to jest fałszywe przy znaczeniu dystrybutywnym, gdyż dziesiąta część Marsa nie jest planetą słoneczną.

Nietrudno stwierdzić, że w teorii mnogości termin „zbiór” jest używany w sensie dystrybutywnym, a nie kolektywnym, zaś stosunek elementu do zbioru nie jest tu rozumiany jako stosunek części do całości. Ten ostatni stosunek ma nie jest tu rozumiany jako stosunek części do całości. Ten ostatni stosunek ma inne podstawowe własności, np. jest przechodni, podczas gdy prawo przechodniości nie jest ważne dla „ $\in$ ”. Świadczy o tym np. fakt, że wzory: $0 \in \{0\}$, $\{0\} \in \{\{0\}\}$ są prawdziwe, natomiast wzór: $0 \in \{\{0\}\}$ (równoważny ze wzorem: $0 = \{0\}$) jest fałszywy. Jak zauważa B. Russell, gdybyśmy zbiory traktowali jako agregaty czy konglomeraty (a więc jako zbiory w sensie kolektywnym), to „niepodobna zrozumieć, jak może istnieć taki zbiór, jak zbiór pusty, który

* Por. T. Kotarbiński *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Wyd. II, str. 23, 24.

w ogóle nie ma żadnego elementu i którego nie można uważać za agregat"; „trudno byłoby też zrozumieć, jak się to dzieje, że zbiór, który ma tylko jeden element, nie jest identyczny z tym jednym elementem" *. W. V. Quine pisze: „Fakt, że zbiory są bytami abstrakcyjnymi, jest niekiedy zaciemniony przez mówienie o zbiorach jako agregatach lub zbiorowiskach, przez co upodobnia się np. zbiór kamieni do stosu kamieni. Stos ten jest rzeczywiście konkretnym przedmiotem, tak konkretnym, jak kamienie, które go tworzą; jednakże zbiór kamieni w stosie nie może być utożsamiony z tym stosem. Gdyby tak bowiem było, to inny zbiór mógłby być utożsamiony z tym samym stosem; mianowicie zbiór molekuł kamieni w tym stosie. Lecz w istocie zbiory te muszą być odróżnione; chcemy bowiem powiedzieć, że jeden z nich ma na przykład sto elementów, podczas gdy drugi ma ich tryliony. Zbiory są więc przedmiotami abstrakcyjnymi" **.

Zagadnienie, czy i w jaki sposób istnieją zbiory w sensie dystrybutywnym, ma wiele wspólnego ze znanym z historii filozofii sporem o istnienie uniwersaliów (powszechników) ***.

Powszechnikami są przedmioty ogólne, takie jak „człowiek w ogóle" lub „koń w ogóle". Zamiast mówić o człowieku w ogóle i o koniu w ogóle można by mówić o gatunku ludzi i gatunku koni. Poszczególnych ludzi lub poszczególne konie możemy spostrzegać, natomiast człowiek w ogóle i koń w ogóle (czy też gatunek ludzi i gatunek koni) są to przedmioty dostępne tylko ujęciu pojęciowemu.

W sporze o uniwersalia, szczególnie żywym w średniowieczu, zarysowały się następujące stanowiska:

1. **Realizm skrajny**, sformułowany przez Platona, przyjmuje istnienie powszechników samodzielne, poza przedmiotami jednostkowymi. Poza poszczególnymi ludźmi istnieje idea człowieka, różna od każdego człowieka i istniejąca niezależnie od istnienia poszczególnych ludzi.
2. **Realizm umiarkowany**, sformułowany przez Arystotelesa, przyjmuje, że powszechniki nie istnieją samodzielnie, lecz jako istotne własności przedmiotów jednostkowych. „Człowiekiem w ogóle" jest więc cecha czy też zespół cech, tkwiących w poszczególnych ludziach i dla nich charakterystycznych, np. taka cecha, jak rozumność.
3. **Konceptualizm** odrzuca istnienie powszechników poza poznającym umysłem, przyznając im byt tylko pomyślany, przyjmując, że istnieją tylko pojęcia ogólne. Nie istnieje więc „człowiek w ogóle", istnieje tylko pojęcie człowieka.
4. **Nominalizm** odrzuca zarówno istnienie powszechników, jak i pojęć ogólnych, przyjmując istnienie tylko nazw ogólnych. Nie istnieje więc ani idea, ani pojęcie człowieka, lecz tylko nazwa ogólna „człowiek".

* B. Russell *Wstęp do filozofii matematyki*, str. 268.

** W. V. Quine *From a Logical Point of View*, str. 114.

*** Podane dalej uwagi o powszechnikach są wzorowane na uwagach K. Ajdukiewicza zawartych w książce *Zagadnienia i kierunki filozofii*, str. 120-124.

„Stary spór filozoficzny o istnienie uniwersaliów — pisze K. Ajdukiewicz w *Zagadnieniach i kierunkach filozofii* — występuje w filozofii nowszej pod inną nieco postacią. Współczesna postać tego zagadnienia wyraża się mianowicie w pytaniu, czy nauki aprioryczne, a więc takie nauki jak np. matematyka, świadczą w pełni rzeczywistości, choć zupełnie od świata danego nam w doświadczeniu zmysłowym odrębny świat tzw. tworów idealnych, jak np. liczby, funkcje matematyczne itp., który istnieje w sposób zupełnie od naszego umysłu niezależny, czy też świat taki w ogóle nie istnieje".

Wiemy, że pojęcia liczby, funkcji, jak też inne pojęcia matematyczne, mogą być sprowadzone do pojęcia zbioru. Zagadnienie można więc ograniczyć do pytania, czy istnieją zbiory, o ile zaś istnieją, to w jakim znaczeniu.

Na analogię pomiędzy zagadnieniem istnienia zbiorów a zagadnieniem istnienia powszechników zwrócili uwagę nie tylko filozofowie, lecz także logicy i matematycy.

W pracy poświęconej podstawom teorii mnogości, której autorami są A. A. Fraenkel, jeden z współtwórców aksjomatycznej teorii mnogości, i Y. Bar-Hillel, czytamy:

„Ponieważ zbiory, w zwykłym znaczeniu *, są tym, co filozofowie nazywają powszechnikami, problem istnienia zbiorów jest częścią dobrze znanego i obszernie dyskutowanego problemu istnienia powszechników. Trzy główne tradycyjne odpowiedzi na ogólny problem powszechników, pochodzące z średniowiecznych dyskusji, znane są jako realizm, nominalizm i konceptualizm..., ich współczesne odpowiedniki — jako platonizm, neonominalizm i neokonceptualizm" **. Te współczesne stanowiska charakteryzują autorzy w następujący sposób:

Platonista jest przekonany, że dla każdego poprawnie sformułowanego (jednoargumentowego) warunku istnieje zbiór wszystkich i tylko tych przedmiotów, które spełniają ten warunek, zbiór, który jest odrębnym bytem istniejącym podobnie jak jego elementy. Dla uniknięcia antynomii platonista przyjmuje pewne ograniczenia tej zasady, w postaci teorii typów lub aksjomatu podzbiorów, jest jednak przekonany, że prędzej czy później można będzie sformułować mniej radykalne ograniczenia. Niektórzy platonisci są przekonani, że przedmioty świata, w którym żyjemy, są rzeczywiście podzielne na typy, i przyjmują teorię typów nie jako *ad hoc* wprowadzony środek (dla uniknięcia antynomii), lecz jako wyraz poznania tego faktu.

Neonominalista oświadcza, że używanie zdań o zbiorach traktuje tylko jako pewien skrótowy sposób wyrażania się i że zdania te dają się interpretować jako zdania o indywidualach. Uważa on za zrozumiałe tylko takie zdanie molekularne, w których argumentami są nazwy indywidualne lub zmienne indywidualne. Wyrażenia zawierające wolne zmienne reprezentujące predykaty

* Tj. w znaczeniu dystrybutywnym.

** A. A. Fraenkel and Y. Bar-Hillel *Foundations of Set Theory*, str. 398.

traktuje jako schematy odpowiednich wyrażeń, w których na miejscu tych zmiennych występują stałe predykaty. Ogranicza on stosowanie kwantyfikacji zmiennych tylko do zmiennych indywidualnych. Wiele zdań o zbiorach da się istotnie przełożyć na zdania o indywidualach, np. zdanie „zbiór ludzi jest podzbiorem zbioru kręgowców” daje się przełożyć na zdanie „dla każdego x , jeśli x jest człowiekiem, to jest kręgowcem”. W wielu jednak wypadkach przekładu takiego nie da się uzyskać. Stąd: „Trudności przeformułowania całej klasycznej matematyki w terminach nominalistycznych wydają się, i prawdopodobnie są, nieprzezwyciężalne”. W tej sytuacji, nie chcąc zrezygnować z tych przynajmniej części matematyki, które znajdują zastosowanie w innych naukach, ma on do wyboru jedną z dwóch możliwości: bądź uciec się do nadziei — słabo zresztą ugruntowanej — że w przyszłości uda się dokonać przeformułowania matematyki na język nominalistyczny, bądź też traktować całą wyższą matematykę jako niezinterpretowany rachunek. Trudno jednak wtedy wyjaśnić, jak niezinterpretowany (i bezpośrednio nie dający się zinterpretować) rachunek daje się stosować do zinterpretowanych zdań empirycznych.

Neokonceptualiści zamiast dawnego przeciwstawienia istnienia w umyśle i istnienia poza umysłem w świecie realnym lub idealnym posługują się metaforycznym przeciwstawieniem konstruowania i odkrywania. Twierdzą oni, że istnieje zbiór wtedy tylko, gdy można skonstruować ten zbiór ze zbiorów, których istnienie jest intuicyjnie oczywiste lub które zostały uprzednio skonstruowane. Nie przyjmują natomiast aksjomatów lub twierdzeń, które zmuszałyby ich do przyjęcia istnienia zbiorów, nie dających się konstruktywnie scharakteryzować. Głównymi przedstawicielami tego stanowiska są zwolennicy tzw. intuicjonizmu, którego twórcą jest matematyk holenderski L. E. J. Brouwer.

W przytoczonym przeglądzie współczesnych stanowisk brak wzmianki o współczesnym odpowiedniku realizmu umiarkowanego. Stanowisko to przyjmowane jest wówczas, gdy predykaty jednoargumentowe interpretowane są jako nazwy jednostkowe cech. A więc wtedy, gdy wyrażenie „ $A(x)$ ” czytamy „cecha A przysługuje przedmiotowi x ”. Ta interpretacja wyrażeń o postaci „ $A(x)$ ” jest nieraz przyjmowana, a nieraz też wyrażenie „ x jest elementem zbioru przedmiotów o własności A ” uważane jest za równoznaczne z wyrażeniem „ x posiada własność A ”. Pojęcie zbioru sprowadza się wówczas do pojęcia własności (cechy, atrybutu). W rachunku kwantyfikatorów występuje jednak zasada ekstensjonalności: $\prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow A = B$. Natomiast cechy

przysługujące tym samym przedmiotom nie muszą być identyczne. Na przykład cechy równokątności i równoboczności przysługują tym samym trójkątom, nie uważamy ich jednak za identyczne cechy trójkątów. Interpretując więc rachunek kwantyfikatorów jako rachunek cech musimy zdawać sobie sprawę z tego, że niektóre jego prawa ważne są tylko dla takich cech, które spełniają zasadę ekstensjonalności.

Określając pierwsze z omawianych współczesnych stanowisk, dotyczących podstaw teorii mnogości, jako platońskie, nie przesadza się kwestią, czy idee mował, że np. nazwie „człowiek” odpowiada idea człowieka, pod którą podpadają poszczególni ludzie, tak stanowisko to przyjmuje, że nazwie „człowiek” odpowiada zbiór wszystkich ludzi, którego elementami są poszczególni ludzie. Przyjmując, że zbiory istnieją i że są różne od przedmiotów jednostkowych będących ich elementami, przyjmujemy — podobnie jak Platon — istnienie przedmiotów różnych od przedmiotów jednostkowych. Stanowisko to podzielane jest przez wielu wybitnych logików współczesnych. K. Gödel pisze np., że „przyjęcie istnienia takich przedmiotów jak zbiory jest równie uprawnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, i jest równie wiele racji dla wiary w ich istnienie”^{**}. Nietrudno chyba przytoczyć racje skłaniające do przyjmowania tego stanowiska na gruncie teorii mnogości. Wyrażenie „ $x \in y$ ” czytamy „ x jest elementem zbioru y ”, przy czym — jak poprzednio zauważyliśmy — termin „zbiór” nie można tu rozumieć w sensie kolektywnym. Wśród aksjomatów i twierdzeń teorii mnogości występują zdania stwierdzające istnienie zbiorów spełniających określone warunki (np. aksjomat zbioru pustego, aksjomat nieskończoności, aksjomat wyboru), a zdania te nie dają się przełożyć na zdania o indywidualach. W szczególności na zdania o indywidualach nie dają się przełożyć zdania, w których występują kwantyfikatory wiążące zmienne reprezentujące zbiory.

Zarówno stanowisko intuicjonizmu, jak i nominalizmu prowadzi do redukcji matematyki i logiki. W matematyce budowanej przez intuicjonistów odpadają różne twierdzenia matematyki klasycznej. Szczególnie silnie zaznacza się to w teorii mnogości. Nominaliści muszą zrezygnować z wielu wyników współczesnej logiki i matematyki, w których korzysta się w sposób istotny ze zmiennych wyższych typów i z kwantyfikatorów wiążących takie zmienne. Stanowisko zwane platonizmem nie natrafia na te trudności. Budzi ono jednak sprzeciwu natury filozoficznej jako stanowisko przyjmujące istnienie przedmiotów różnych od przedmiotów konkretnych^{***}.

* Por. ibidem, przypis 2 na str. 333.

** K. Gödel *Russell's Mathematical Logic* w książce: *The Philosophy of Bertrand Russell*, str. 137.

*** Obszerniejsze omówienie rozważanego zagadnienia i głównych stanowisk współczesnych znajdzie czytelnik np. w pracach:

A. A. Fraenkel and Y. Bar-Hillel *Foundations of Set Theory*. Ch. IV, § 8; *Philosophical Remarks*, str. 332-347.

P. Bernays *Sur le platonisme dans les mathématiques*. „L'Enseignement Mathématique”, XXXIV (1935).

W. V. Quine *Logic and the Reification of Universals. On What There Is*. W książce: *From a Logical Point of View*. 1953.

N. Goodman and W. V. Quine *Steps towards a Constructive Nominalism*. „The Journal of Symbolic Logic”, V, 12 (1947).

A. Grzegorzczak *O pewnych formalnych konsekwencjach reizmu*. „Fragmenty Filozoficzne”, V. E. W. Beth *Foundations of Mathematics*.

DEFINICJE

Część I. Rozdział II

$$D1. \quad \vdash \sum_a \phi(a) = \sum_a \phi(a) \wedge \prod_{a \in \alpha} \prod_{a \in \beta} a = \beta$$

Część II. Rozdział I

$$D1.1. \quad X = Y = \prod_x (x \in X \equiv x \in Y)$$

$$D1.2. \quad X \subset Y = \prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

$$D1.3a. \quad x \in \{y\} = x = y$$

$$b. \quad x \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = x = y_1 \vee x = y_2 \vee \dots \vee x = y_n$$

$$D1.4. \quad x \in X + Y = x \in X \vee x \in Y$$

$$D1.5. \quad x \in X \cdot Y = x \in X \wedge x \in Y$$

$$D1.6. \quad x \in X - Y = x \in X / x \notin Y$$

$$D1.7. \quad x \in X' = x \notin X$$

$$D1.8. \quad x \in 0 = x \in 1'$$

$$D1.9. \quad X \subsetneq Y = X \subset Y \wedge X \neq Y$$

$$D4.1. \quad x \in \bigcup_{i \in I} \varphi(X_i) = \sum_{i \in I} [x \in \varphi(X_i)]$$

$$D4.2. \quad x \in \bigcap_{i \in I} \varphi(X_i) = \prod_{i \in I} [x \in \varphi(X_i)]$$

$$D4.3. \quad x \in \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X) = \sum_{X \in \mathcal{X}} [x \in \varphi(X)]$$

$$D4.4. \quad x \in \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X) = \prod_{X \in \mathcal{X}} [x \in \varphi(X)]$$

$$D5.1. \quad \langle x, y \rangle \in X \times Y = x \in X \wedge y \in Y$$

$$D5.2. \quad x \in \sum_a \phi(a) = \phi(x)$$

$$D5.3. \quad a \in \sum_{z, t} \phi(a, b) = \sum_z \sum_t [a = \langle z, t \rangle \wedge \phi(z, t)]$$

$$D6.1. \quad R \in \text{funke} = \prod_x \prod_y \prod_z (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$$

$$D6.2a. \quad x \in D_f(R) = \sum_y xRy$$

$$b. \quad y \in D_g(R) = \sum_x xRy$$

$$D6.3. \quad R \in \text{funke} \wedge x \in D_f(R) \rightarrow [y = R(x) = xRy]$$

$$D6.4. \quad y \in R(X) = \sum_{x \in X} xRy$$

$$D6.5. \quad xR^{-1}y = yRx$$

$$D6.6. \quad R \in 1-1 = R, R^{-1} \in \text{funke}$$

$$D6.7. \quad xR_x y = xRy \wedge x \in X$$

$$D6.8. \quad xR; Sy = \sum_z (xRz \wedge zSy)$$

$$D6.9. \quad \text{Relacja typu równoważności jest to relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia. Przy tym:}$$

$$\text{relacja } R \text{ jest zwrotna} = \prod_x xRx$$

$$\text{relacja } R \text{ jest symetryczna} = \prod_x \prod_y (xRy \rightarrow yRx)$$

$$\text{relacja } R \text{ jest przechodnia} = \prod_x \prod_y \prod_z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

$$D6.10. \quad R = S = \prod_x \prod_y (xRy = xSy)$$

$$D6.11. \quad xR - Sy = xRy / xSy$$

$$D7.1. \quad X \sim_Z Y = R \in 1-1 / X = D_f(R) \wedge Y = D_g(R)$$

$$D7.2. \quad X \sim Y = \sum_Z X \sim_Z Y$$

$$D7.3. \quad m \in Lk = \sum_X m = \bar{X}$$

$$D7.4. \quad \text{Zbiór } A \text{ jest zapasem ciągu } \{a_n\} = \prod_n [a \in A = \sum_{i \in \mathbb{N}} a = a_i]$$

$$D8.1. \quad X \cdot Y = 0 \rightarrow \bar{X} + \bar{Y} = \overline{X + Y}$$

$$D8.2. \quad \bar{X} \cdot \bar{Y} = \overline{X \times Y}$$

$$D8.3. \quad R \in X^Y = R \in \text{funke} / D_f(R) = Y \wedge R(Y) \subset X$$

$$D8.4. \quad \bar{X}^Y = (\bar{X}^Y)$$

$$D9.1. \quad \bar{X} \leq \bar{Y} = \sum_{Z \in I} X \sim Z$$

$$D9.2. \quad \bar{X} < \bar{Y} = \bar{X} \leq \bar{Y} \wedge \bar{X} \neq \bar{Y}$$

$$D10.1. \quad X \in 2^Y = X \subset Y$$

$$D10.2. \quad R \in \text{funke} \rightarrow [x \in Z(R) = x \in D_f(R) \wedge x \in R(a)]$$

$$D10.3. \quad \text{Funkcja } \varphi_A(m) \text{ jest funkcją charakterystyczną zbioru } A \subset M = \\ = \text{dla każdego } m \in M: \varphi_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \in A \\ 0, & \text{gdy } m \notin A \end{cases}$$

$$D11.1. \quad X \text{ jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda} = \sum_{Y \subsetneq X} X \sim Y$$

$$D11.2. \quad \text{Liczby kardynalne porządkowane są to moce zbiorów nieskończonych w sensie Dedekinda.}$$

$$D14.1. \quad a \in \mathfrak{M}_X = \sum_{M \in \mathcal{X}} (a = \{M\} \times M)$$

Część II. Rozdział II

- D1.1. $P(R) = D_I(R) + D_P(R)$
D1.2. $\langle X, S \rangle \text{ iz}_R \langle Y, T \rangle \equiv R \in 1-1 \wedge D_I(R) = X \wedge D_P(R) = Y \wedge$
 $\bigwedge \prod_{x \in X} \prod_{y \in Y} \prod_{z \in X} \prod_{u \in Y} [xRz \wedge yRu \rightarrow (xSy \equiv zTu)]$
D1.3. $\langle X, S \rangle \text{ iz } \langle Y, T \rangle \equiv \sum_R (\langle X, S \rangle \text{ iz}_R \langle Y, T \rangle)$
D2.1a. $R \in \text{sp}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} [x \neq y \rightarrow (xRy \vee yRx)]$
b. $R \in \text{przech}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} \prod_{z \in A} (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
c. $R \in \text{asym}(A) \equiv \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} [xRy \rightarrow \sim(yRx)]$
D2.2. $R \in \text{porz}(A) \equiv A = P(R) \wedge R \in \text{sp}(A) \cdot \text{przech}(A) \cdot \text{asym}(A)$
D2.3. $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym $\equiv R \in \text{porz}(A)$
D2.4. $A^0 \simeq_R B^0 \equiv A \sim_R B \wedge \prod_{x \in A} \prod_{y \in B} [x \prec_A y \equiv R(x) \prec_B R(y)]$
D2.5. $A^0 \simeq B^0 \equiv \sum_R (A^0 \simeq_R B^0)$
D2.6. $a \in \text{Tp} \equiv \sum_{A^0} a = \overline{A^0}$
D3.1. $A \cdot B = 0 \rightarrow \{A^0 + B^0 = C^0 \equiv C = A + B \wedge \prod_{x \in A} \prod_{y \in B} [x \prec_C y \equiv (x \prec_A y \vee$
 $\vee x \prec_B y \vee x \in A \wedge y \in B)]\}$
D3.2. $A^0 \cdot B^0 = C^0 \equiv C = A \times B \wedge \prod_{a \in A} \prod_{b \in B} \prod_{x \in A} \prod_{y \in B} [\langle a, b \rangle \prec_C \langle x, y \rangle \equiv (b \prec_B y \vee$
 $\vee b = y \wedge a \prec_A x)]$
D3.3. $A \cdot B = 0 \rightarrow \overline{A^0 + B^0} = \overline{A^0 + B^0}$
D3.4. $\overline{A^0 \cdot B^0} = \overline{A^0 \cdot B^0}$
D4.1. $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest przekrojem zbioru uporządkowanego $C^0 \equiv A \neq 0 \wedge$
 $\wedge B \neq 0 \wedge A \cdot B = 0 \wedge A^0 + B^0 = C^0$
D4.2a. x jest pierwszym elementem zbioru uporządkowanego $A^0 \equiv x \in A \wedge$
 $\wedge \prod_{y \in A} (x \neq y \rightarrow x \prec_A y)$
b. x jest ostatnim elementem zbioru uporządkowanego $A^0 \equiv x \in A \wedge$
 $\wedge \prod_{y \in A} (x \neq y \rightarrow y \prec_A x)$
D4.3a. Przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest skokiem $\equiv$ istnieje ostatni element zbioru A^0
i pierwszy element zbioru B^0 .
b. Przekrój $\langle A^0, B^0 \rangle$ jest luką $\equiv$ nie istnieje ostatni element zbioru A^0
i nie istnieje pierwszy element zbioru B^0 .
D4.4a. Zbiór uporządkowany jest gęsty $\equiv$ żaden jego przekrój nie jest
skokiem.
b. Zbiór uporządkowany jest ciągły $\equiv$ żaden jego przekrój nie jest
skokiem ani luką.
D4.5. $A^0 \subset B^0 \equiv A \subset B \wedge \prod_{x \in A} \prod_{y \in A} (x \prec_A y \equiv x \prec_B y)$
D5.1. $\omega = \overline{A^0} =$ zbiór A^0 spełnia warunki a-c twierdzenia T5.3.

- D5.2. $\eta = \overline{A^0} =$ zbiór A^0 spełnia warunki a'-c' twierdzenia T5.4.
D5.3. $\lambda = \overline{A^0} =$ zbiór A^0 spełnia warunki a''-c'' twierdzenia T5.5.
D5.4. $\beta = \alpha^* \equiv \sum_{x \in R} (\alpha = \langle \overline{x}, R \rangle \wedge \beta = \langle \overline{x}, R^{-1} \rangle)$
D6.1. Zbiór uporządkowany A^0 jest zbiorem dobrze uporządkowanym $\equiv$
 $\equiv \prod_{0 \neq B^0 \subset A^0} \sum_b (b \text{ jest elementem pierwszym zbioru } B^0)$
D6.2. $a \in \text{Lp} \equiv \sum_{A^0} (A^0 \text{ jest zbiorem dobrze uporządkowanym } \wedge a = \overline{A^0})$
D7.1. $X^+ \doteq A(a) \equiv X^+ \subset A^+ \wedge \prod_{x \in X} (x \in X \equiv x \prec_A a)$
D7.2. $a_1, a_2 \in A^+ \rightarrow [A(a_1) < A(a_2) \equiv a_1 \prec_A a_2]$
D7.3. $R \in \text{fr}(A^+) \equiv R \in A^+ \wedge \prod_{x \in A^+} \prod_{y \in A^+} [x \prec_A y \rightarrow R(x) \prec_A R(y)]$
D8.1. $\overline{A^+} < \overline{B^+} \equiv \sum_b [A^+ \simeq B(b)]$
D8.2. $a \in \text{Lg} \equiv a \in \text{Lp} \wedge a \neq 0 \wedge \prod_{\beta \in \text{Lp}} a \neq \beta + 1$
D9.1a. $\alpha^0 = 1$
b. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot a$
c. Jeśli $\gamma \in \text{Lg}$, to $\alpha^\gamma = 0$ dla $a = 0$, zaś dla $a \neq 0$ liczba α^γ jest naj-
mniejszą liczbą porządkową równą lub większą od każdej liczby α^β ,
gdzie β jest liczbą porządkową mniejszą od γ .
D9.2. Ciąg pozaskończony typu a jest to funkcja, której lewą dziedziną
jest zbiór wszystkich liczb porządkowych mniejszych od a , gdzie
 $a \geq \omega$.
D10.1. $\overline{a} = \overline{A^+} \equiv a = \overline{A^+}$
D10.2. $a \in Z(m) \equiv \overline{a} = m$
D10.3a. a jest liczbą początkową zbioru $Z(m) \equiv m \geq \kappa_0 \wedge a$ jest najmniej-
szą liczbą porządkową zbioru $Z(m)$.
b. a jest liczbą początkową $\equiv \sum_m [a \text{ jest liczbą początkową zbioru } Z(m)]$
D10.4. $a = \omega_\xi \equiv a$ jest liczbą początkową i zbiór wszystkich liczb po-
czątkowych $< a$, uporządkowany przez relację mniejszości, jest
typu ξ .
D10.5. $m = \kappa_\xi = \omega_\xi$ jest liczbą początkową zbioru $Z(m)$.

TEZY

Część I

Rachunek zdań

T1.	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T1a.	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r]$
T2b.	$p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
T3.	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$
T4.	$p \vee q \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$
T4b.	$\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$
T5b.	$\sim \sim p \equiv p$
T6.	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
T7.	$p \wedge q \rightarrow r \equiv p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$
T8.	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
T9.	$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
T10.	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$
T11.	$p \rightarrow p$
T11a.	$p \equiv p$
T12.	$(p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$
T13.	$(p \equiv q) \wedge (q \equiv r) \rightarrow (p \equiv r)$
T14.	$(p \equiv q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T15.	$(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$
T15a.	$(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$
T15b.	$(p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
T15c.	$(\sim p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow p$
T15d.	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p$
T16b.	$p \rightarrow q \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
T17.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$
T18.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q) \rightarrow r$
T19.	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
T20.	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
T21.	$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

T22.	$\sim(p \wedge \sim p)$
T23.	$p \vee \sim p$
T24.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$
T25.	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$
T26.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$
T27.	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$
T28.	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r \rightarrow q \vee s)$
T29.	$\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$
T29a.	$p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$
T30.	$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$
T31.	$p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T32.	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s) \rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$
T33a.	$(p \equiv q) \rightarrow (\sim p \equiv \sim q)$
b.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \wedge r \equiv q \wedge r)$
c.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \wedge p \equiv r \wedge q)$
d.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \vee r \equiv q \vee r)$
e.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \vee p \equiv r \vee q)$
f.	$(p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow r \equiv q \rightarrow r)$
g.	$(p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow p \equiv r \rightarrow q)$
h.	$(p \equiv q) \rightarrow [(p \equiv r) \equiv (q \equiv r)]$
i.	$(p \equiv q) \rightarrow [(r \equiv p) \equiv (r \equiv q)]$
T34.	$p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$
T35.	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
T36.	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
T37.	$p \vee q \equiv q \vee p$
T38.	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
T39.	$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv p \wedge r \vee p \wedge s \vee q \wedge r \vee q \wedge s$
T40.	$p \wedge q \vee r \wedge s \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Węższy rachunek kwantyfikatorów

T1.	$\prod_x A(x) \rightarrow A(y)$
T2.	$A(y) \rightarrow \sum_x A(x)$
T3.	$\sim \prod_x A(x) \equiv \sum_x \sim A(x)$
T4.	$\sim \sum_x A(x) \equiv \prod_x \sim A(x)$
T5.	$\prod_x [A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\prod_x A(x) \rightarrow \prod_x B(x)]$
T6.	$\prod_x [A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\sum_x A(x) \rightarrow \sum_x B(x)]$
T7.	$\prod_x [A(x) \wedge B(x)] \equiv \prod_x A(x) \wedge \prod_x B(x)$

- T8. $\prod_x A(x) \vee \prod_x B(x) \rightarrow \prod_x [A(x) \vee B(x)]$
 T9. $\sum_x [A(x) \wedge B(x)] \rightarrow \sum_x A(x) \wedge \sum_x B(x)$
 T10. $\sum_x [A(x) \vee B(x)] \equiv \sum_x A(x) \vee \sum_x B(x)$
 T11. $\prod_x [p \rightarrow A(x)] \equiv p \rightarrow \prod_x A(x)$
 T12. $\sum_x [p \rightarrow A(x)] \equiv p \rightarrow \sum_x A(x)$
 T13. $\prod_x [A(x) \rightarrow p] \equiv \sum_x A(x) \rightarrow p$
 T14. $\sum_x [A(x) \rightarrow p] \equiv \prod_x A(x) \rightarrow p$
 T15. $\prod_x [p \vee A(x)] \equiv p \vee \prod_x A(x)$
 T16. $\sum_x [p \wedge A(x)] \equiv p \wedge \sum_x A(x)$
 T17. $\prod_x [p \wedge A(x)] \equiv p \wedge \prod_x A(x)$
 T18. $\sum_x [p \vee A(x)] \equiv p \vee \sum_x A(x)$
 T19. $\prod_x \prod_y xRy \equiv \prod_y \prod_x xRy$
 T20. $\sum_x \sum_y xRy \equiv \sum_y \sum_x xRy$
 T21. $\sum_x \prod_y xRy \rightarrow \prod_y \sum_x xRy$
 T22. $\prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow [\prod_x A(x) \equiv \prod_x B(x)]$
 T23. $\prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow [\sum_x A(x) \equiv \sum_x B(x)]$
 T24. $\prod_x A(x) \equiv \sim \sum_x \sim A(x)$
 T25. $\sum_x A(x) \equiv \sim \prod_x \sim A(x)$
 T3*. $\sim \prod_{A(x)} B(x) \equiv \sum_{A(x)} \sim B(x)$
 T4*. $\sim \sum_{A(x)} B(x) \equiv \prod_{A(x)} \sim B(x)$
 T13*. $\prod_{B(x)} [A(x) \rightarrow p] \equiv \sum_{B(x)} A(x) \rightarrow p$
 T16*. $\sum_{B(x)} [p \wedge A(x)] \equiv p \wedge \sum_{B(x)} A(x)$
 T19*. $\prod_{A(x)} \prod_{B(x)} xRy \equiv \prod_{B(y)} \prod_{A(x)} xRy$
 T20*. $\sum_{A(x)} \sum_{B(y)} xRy \equiv \sum_{B(y)} \sum_{A(x)} xRy$
 T21*. $\sum_{A(x)} \prod_{B(y)} xRy \rightarrow \prod_{B(y)} \sum_{A(x)} xRy$

Identyczność

- A1. $x = x$
 T1. $x = y \rightarrow y = x$
 T2. $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$
 T2a. $x = z \wedge y = z \rightarrow x = y$
 T3. $x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$
 T3a. $A(x) \wedge \sim A(y) \rightarrow x \neq y$
 T4. $A(x) \equiv \sum_{y=x} A(y)$
 T5. $A(x) \equiv \prod_{y=x} A(y)$
 T6. $\sim \sum_x A(x) \equiv \sim \sum_x A(x) \vee \sum_{A(x)} \sum_{A(y)} x \neq y$
 T7. $\prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow [\sum_x A(x) \equiv \sum_x B(x)]$
 T8. $\sum_x A(x) \rightarrow [A(y) \equiv y = \iota A(x)]$
 T9. $\sum_x A(x) \rightarrow [B(\iota A(x)) \equiv \sum_{B(x) \wedge A(x)} \prod_{A(y)} y = x]$
 T10. $\sum_x A(x) \wedge \prod_x [A(x) \equiv B(x)] \rightarrow \iota A(x) = \iota B(x)$
 TVI. § 6. $x = y \equiv \prod_A [A(x) \equiv A(y)]$

Część II

Ogólna teoria mnogości

- A1.1. $x \in 1$
 T1.1. $X \subset 1$
 T1.4a. $X \subset X$
 b. $X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z$
 T1.5. $x = y \equiv \prod_x (x \in X \equiv y \in X)$
 A1.2. $X \neq Y \rightarrow X \neq Y$
 T1.7. $X \neq Y \equiv X \neq Y$
 T1.9. $x \notin 0$
 A5.1. $\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \equiv x = z \wedge y = t$
 T5.1a. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$
 b. $X \cdot Y = 0 \rightarrow (X \times Z) \cdot (Y \times Z) = 0$
 c. $\{1, 2, \dots, n\} \times X = \{1\} \times X + \{2\} \times X + \dots + \{n\} \times X$
 d. $X \subset Y \rightarrow X \times Z \subset Y \times Z$
 e. $X \neq 0 \rightarrow \{X\} \times X \neq 0$
 f. $\{X\} \times X \neq \{Y\} \times Y \rightarrow (\{X\} \times X) \cdot (\{Y\} \times Y) = 0$
 T5.2. $\langle x, y \rangle \in \prod_{a,b} \Phi(a, b) \equiv \Phi(x, y)$

- T6.1a. $X \subset Y \rightarrow R(X) \subset R(Y)$
 b. $R(X+Y) = R(X) + R(Y)$
 c. $R \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} R(X_i)$
 d. $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_{i+1} = R(X_i) \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 + R(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$
- L6.1a. $D_l(R) = D_p(R^{-1})$
 b. $D_p(R) = D_l(R^{-1})$
 L6.2. $R \in 1-1 \rightarrow R^{-1} \in 1-1$
 L6.3b. $R \in 1-1 \wedge x, y \in D_l(R) \wedge x \neq y \rightarrow R(x) \neq R(y)$
 L6.4. $R \in 1-1 \rightarrow R_X \in 1-1$
 L6.5a. $X \subset D_l(R) \rightarrow D_l(R_X) = X$
 b. $X \subset D_l(R) \rightarrow D_p(R_X) = R(X)$
 L6.6. $R, S \in 1-1 \rightarrow R; S \in 1-1$
 L6.7a. $D_p(R) = D_l(S) \rightarrow D_l(R; S) = D_l(R)$
 b. $D_p(R) = D_l(S) \rightarrow D_p(R; S) = D_p(S)$
 A6.1. $R \doteq S \rightarrow R = S$
 T6.4. $R \doteq S \equiv R = S$
 T6.5. $R, S \in 1-1 \wedge [(D_l(R)) \cdot (D_l(S))] = 0 \wedge [(D_p(R)) \cdot (D_p(S))] = 0 \rightarrow R + S \in 1-1$
 L6.8. $X = D_l(R) \rightarrow R_X = R$
 L6.9a. $D_l(R+S) = D_l(R) + D_l(S)$
 b. $D_p(R+S) = D_p(R) + D_p(S)$
 T7.1a. $X \sim X$
 b. $X \sim Y \rightarrow Y \sim X$
 c. $X \sim Y \wedge Y \sim Z \rightarrow X \sim Z$
 L7.2. $X \sim_R Y \rightarrow Y = R(X)$
 L7.3. $R \in 1-1 \wedge X \subset D_l(R) \rightarrow X \sim_{R_X} R(X)$
 A7.1. $\bar{X} = \bar{Y} \equiv X \sim Y$
 T7.2a. $\bar{X} \in \text{Lk}$
 b. $\prod_X \sum_{m \in \text{Lk}} m = \bar{X}$
 c. $\prod_{m \in \text{Lk}} \sum_X m = \bar{X}$
 L7.4. $\prod_A \prod_B \sum_{A_1 B_1} (A_1 \sim A \wedge B_1 \sim B \wedge A_1 \cdot B_1 = 0)$
 L7.5a. $A \sim B \wedge A_1 \sim B_1 \wedge A \cdot A_1 = B \cdot B_1 = 0 \rightarrow A + A_1 \sim B + B_1$
 b. $A \sim B \wedge A_1 \sim B_1 \rightarrow A \times A_1 \sim B \times B_1$
 T7.3. $\bar{A} = \aleph_0 = \sum_{(a_n)} \prod_{i,j} (i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j) \wedge A \text{ jest zapasem ciagu } \{a_n\}$
 T8.3. $n \cdot \bar{X} = \underbrace{\bar{X} + \bar{X} + \dots + \bar{X}}_n \quad (n \in \mathbb{N})$
 T8.4. $\bar{X}^n = \underbrace{\bar{X} \cdot \bar{X} \cdot \dots \cdot \bar{X}}_n \quad (n \in \mathbb{N})$

- T8.5. $\bar{X}^{\bar{Y}+\bar{Z}} = \bar{X}^{\bar{Y}} \cdot \bar{X}^{\bar{Z}}$
 T8.6. $(\bar{X}^{\bar{Y}})^{\bar{Z}} = \bar{X}^{\bar{Y} \cdot \bar{Z}}$
 L9.1. $X \sim X_1 \wedge Y \sim Y_1 \wedge \sum_{Z \subset Y} (X \sim Z) \rightarrow \sum_{U \subset Y_1} (X_1 \sim U)$
 Wn.9.1. $X \subset Y \rightarrow \bar{X} \leq \bar{Y}$
 T9.1. $m \leq n \equiv m = n \vee m < n$
 T9.2b. $m \leq n \wedge n \leq m \rightarrow m = n$
 T9.4. $m \leq n \vee n \leq m$
 T9.5a. $\aleph_0 \leq c$
 b. $n \in \mathbb{N} \rightarrow n < \aleph_0$
 L9.3a. $m < n \rightarrow m \cdot \bar{t} \leq n \cdot \bar{t}$
 b. $m < n \rightarrow m^t \leq n^t$
 T10.1. $\bar{M} < (2^{\bar{M}})$
 T10.2. $2^{\bar{M}} = (2^{\bar{M}})$
 T10.3. $\bar{M} < 2^{\bar{M}}$
 L11.1. $P \subset X \wedge \bar{P} = \aleph_0 \rightarrow \sum_{Y \subsetneq X} X \sim Y$
 L11.2. $\sum_{Y \subsetneq X} (X \sim Y) \rightarrow \sum_{P \subset X} \bar{P} = \aleph_0$
 T11.1. Zbiór X jest nieskończony w sensie Dedekinda $\equiv \sum_{P \subset X} \bar{P} = \aleph_0$
 L11.3. $\bar{X} = \bar{Y} = \aleph_0 \rightarrow \overline{X+Y} = \aleph_0$
 L11.4. $\bar{X} = \aleph_0 \wedge \bar{Y} = n \rightarrow \overline{X+Y} = \aleph_0 \quad (n \in \mathbb{N})$
 T11.2. Jeśli X jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda i $\bar{Y} = n$ lub $\bar{Y} = \aleph_0$, to $\overline{X+Y} = \bar{X} \quad (n \in \mathbb{N})$
 T11.3. $(\bar{Y} = n \vee \bar{Y} = \aleph_0) \wedge X - Y \text{ jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda} \rightarrow \overline{X-Y} = \bar{X} \quad (n \in \mathbb{N})$
 T12.1. $\aleph_0 \neq c$
 T12.3. $a < b \rightarrow \overline{\bigcup_x (a < x < b)} = c$
 T12.4a. $\aleph_0 + n = \aleph_0 \quad (n \in \mathbb{N})$
 b. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
 c. $c + n = c \quad (n \in \mathbb{N})$
 d. $c + \aleph_0 = c$
 e. $c + c = c$
 T12.5. $\prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{Z}_i = \aleph_0 \wedge \prod_{i,j} (i \neq j \rightarrow Z_i \cdot Z_j = 0) \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{Z}_i = \aleph_0$
 T12.6. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
 T12.7. Jeśli n jest liczbą naturalną ≥ 2 , to $n^{\aleph_0} = c$
 T12.9a. $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad (n \in \mathbb{N})$
 b. $\aleph_0^n = \aleph_0 \quad (n \in \mathbb{N})$
 c. $n \cdot c = c \quad (n \in \mathbb{N})$

- d. $c \cdot c = c$
 e. $c^n = c \quad (n \in \mathbb{N})$
 f. $c^{\aleph_0} = c$
 g. $\aleph_0 \cdot c = c$
 h. $\aleph_0^{\aleph_0} = c$
 A14.1. $Z \neq 0 \wedge 0 \in Z \wedge \prod_{P \in Z} \prod_{Q \in Z} (P \neq Q \rightarrow P \cdot Q = 0) \rightarrow$
 $\rightarrow \sum_Y \prod_{M \in Z} \sum_x (x \in M \cdot Y)$
 T14.1. $X \neq 0 \wedge \prod_{n \in \mathbb{N}} (\bar{X} \neq n) \rightarrow \sum_{Y \subset X} (\bar{Y} = \aleph_0)$

Zbiory uporządkowane

- T2.1a. $A^0 \simeq A^0$
 b. $A^0 \simeq B^0 \rightarrow B^0 \simeq A^0$
 c. $A^0 \simeq B^0 \wedge B^0 \simeq C^0 \rightarrow A^0 \simeq C^0$
 A2.1. $\overline{A^0} = \overline{B^0} \equiv A^0 \simeq B^0$
 T2.2a. $A^0 \in \text{Tp}$
 b. $\prod_{A^0} \sum_{a \in \text{Tp}} a = \overline{A^0}$
 c. $\prod_{a \in \text{Tp}} \sum_{A^0} a = \overline{A^0}$
 L2.1. $\prod_{A^0} \prod_{B^0} \sum_{A_1^0} \sum_{B_1^0} (A_1^0 \simeq A^0 \wedge B_1^0 \simeq B^0 \wedge A_1 \cdot B_1 = 0) \rightarrow A^0 + A_1^0 \simeq B^0 + B_1^0$
 L3.1a. $A^0 \simeq B^0 \wedge A_1^0 \simeq B_1^0 \wedge A \cdot A_1 = B \cdot B_1 = 0 \rightarrow A^0 + A_1^0 \simeq B^0 + B_1^0$
 L3.1b. $A^0 \simeq B^0 \wedge A_1^0 \simeq B_1^0 \rightarrow A^0 \cdot A_1^0 \simeq B^0 \cdot B_1^0$
 T4.1. $A^0 \subset B^0 \wedge B^0 \subset C^0 \rightarrow A^0 \subset C^0$
 T4.2a. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i istnieje element pierwszy zbioru A^0 , to istnieje też element pierwszy zbioru B^0 .
 b. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i istnieje element ostatni zbioru A^0 , to istnieje też element ostatni zbioru B^0 .
 c. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i zbiór A^0 jest gęsty, to gęsty jest też zbiór B^0 .
 d. Jeśli $A^0 \simeq B^0$ i zbiór A^0 jest ciągły, to ciągły jest też zbiór B^0 .
 T4.3. Zbiór uporządkowany A^0 jest gęsty $\equiv \prod_x \prod_y \sum_z (x \prec_A y \rightarrow x \prec z \prec_A y)$
 T5.1. Jeśli skończone zbiory uporządkowane A^0 i B^0 są równoliczne, to zbiory te są podobne.
 T5.3. Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki:
 a. Zbiór uporządkowany X^0 ma element pierwszy;
 b. Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu ostatniego;
 c. Każdy przekrój zbioru X^0 jest skokiem,
 to zbiory te są podobne.

- Wn5.2. $\omega = \langle \mathbb{N}, < \rangle$
 T5.4. Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki:
 a'. Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu pierwszego ani ostatniego;
 b'. Zbiór uporządkowany X^0 jest przeliczalny;
 c'. Zbiór uporządkowany X^0 jest gęsty,
 to zbiory te są podobne.
 Wn.5.3. $\eta = \langle \mathbb{B}, < \rangle$
 Jeśli zbiory uporządkowane A^0 i B^0 spełniają warunki:
 a''. Zbiór uporządkowany X^0 nie ma elementu pierwszego ani ostatniego;
 b''. Zbiór uporządkowany X^0 jest ciągły;
 c''. $\sum_W \{W^0 \subset X^0 \wedge \bar{W} = \aleph_0 \wedge \prod_x \prod_y [x \prec_{xy} \rightarrow \sum_{w \in W} (x \prec_{xw} \prec_{xy})]\}$,
 to zbiory te są podobne.
 Wn.5.4. $\lambda = \langle \mathbb{R}, < \rangle$
 T5.6. Jeśli zbiór uporządkowany A^0 jest gęsty, to zbiór $\mathfrak{W}$ wszystkich jego przekrojów właściwych uporządkowany przez relację R , określoną wzorem: $\langle A_1^0, B_1^0 \rangle R \langle A_2^0, B_2^0 \rangle \equiv A_1 \subsetneq A_2$, jest ciągły.
 T6.1. Każdy podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego jest dobrze uporządkowany.
 T6.2. Suma i iloczyn zbiorów dobrze uporządkowanych są zbiorami dobrze uporządkowanymi.
 T7.1. Relacja, przyporządkowująca każdemu elementowi a zbioru dobrze uporządkowanego A^+ odcinek $A(a)$, ustala podobieństwo zbioru A^+ i zbioru wszystkich jego odcinków, uporządkowanych przez relację mniejszości.
 L7.1. $A^+ \simeq B^+ \rightarrow \prod_{a \in B} \sum_{b \in B} [A(a) \simeq B(b)]$
 L7.3. $\sim[A^+ \simeq A(a)]$
 L7.4. $a_1, a_2 \in A^+ \wedge A(a_1) \simeq A(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$
 L7.5. $\prod_{a \in A^+} \sum_{b \in B^+} [A(a) \simeq B(b)] \wedge \prod_{b \in B^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq B(b)] \rightarrow A^+ \simeq B^+$
 L7.6. Jeśli b_0 jest pierwszym elementem zbioru B^+ , spełniającym warunek $\prod_{a \in A} \sim[A(a) \simeq B(b)]$, i jeśli $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ oraz $A(a_1) \simeq B(b_1)$, to $b_1 \in B(b_0)$.
 L7.7. $\prod_{a \in A^+} \sum_{b \in B^+} [A(a) \simeq B(b)] \vee \prod_{b \in B^+} \sum_{a \in A^+} [A(a) \simeq B(b)]$
 T7.2. $A^+ \simeq B^+ \vee \sum_{b \in B} [A^+ \simeq B(b)] \vee \sum_{a \in A} [B^+ \simeq A(a)]$
 L7.8. $A^+ \simeq A_1^+ \wedge B^+ \simeq B_1^+ \rightarrow \sum_{b \in B_1} [A_1^+ \simeq B_1(b)]$
 T8.1. Relacja mniejszości porządkuje zbiór liczb porządkowych.

- T8.2. Jeśli zbiór $E(\beta < \alpha)$ jest uporządkowany przez relację mniejszości, to $\alpha = \overline{E(\beta < \alpha)}$ ($\alpha, \beta \in Lp$)
- T8.4. Dowolny zbiór liczb porządkowych, uporządkowany przez relację mniejszości, jest zbiorem dobrze uporządkowanym.
- T8.5. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \in Lg \wedge \alpha \in \mathfrak{N} \rightarrow \sum_{\beta \in Lg} \sum_{n \in \mathfrak{N}} \alpha = \beta + n$
- T10.1. Dla każdego zbioru A istnieje zbiór dobrze uporządkowany, którego zapasem jest zbiór A .
- T10.2. $m \in Lk \rightarrow Z(m) \neq 0$
- T10.3. Dla każdej liczby kardynalnej $m \geq \kappa_0$ istnieje taka liczba porządkowa ξ , że $m = \kappa_\xi$.
- T10.4. $\kappa_\xi = \overline{E(\alpha < \omega_\xi)}$
- T10.6. $\kappa_1 \leq c$

SKOROWIDZ ZNAKÓW*

~	znak negacji 7, znak równoliczności zbiorów 173	z. dow.	dodatkowe założenie dowodu 32
^	znak koniunkcji 7	NA	reguła negowania alternatywy 35
v	znak alternatywy 7	//	znak zastępowania 42-43
→	znak implikacji 7	1	prawdziwość zdania 46, zbiór pełny 137
≡	znak równoważności 7	0	falszywość zdania 46, zbiór pusty 142
RO	reguła odrywania 12	∃	znak alternatywy wykluczającej 48
DK	reguła dołączania koniunkcji 13	/	znak dysjunkcji 54, znak podstawiania 84
OK	reguła opuszczania koniunkcji 13	+	znak łącznej negacji 54
DA	reguła dołączania alternatywy 14	=	znak równości definicyjnej 54, 67
OA	reguła opuszczania alternatywy 14, 24, 27	<	znak implikacji ścisłej 59
DE	reguła dołączania równoważności 14	◇	funktor możliwości 59
OE	reguła opuszczania równoważności 15	∏	kwantyfikator ogólny 78, 81
zał.	założenia 21	Σ	kwantyfikator szczegółowy 78, 81
z.d.n.	założenie dowodu nie wprost 22	OH	reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego 85
sprz.	sprzeczność 22	DH	reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego 85
⊢	"⊢ φ" znaczy: "φ jest tezą" 23	DE	reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego 85
	"φ ₁ , ..., φ _{n-1} ⊢ φ _n " znaczy: φ _n jest konsekwencją wyrażeni φ ₁ , ..., φ _{n-1} 71	OE	reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego 87
ON	reguła opuszczania podwójnej negacji 26	OH*	reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego o ograniczonym zakresie 88
DN	reguła dołączania podwójnej negacji 27	DH*	reguła dołączania kwantyfikatora
Tol.	reguła modus tollendo tollens 28		
RO ₂	reguła odrywania dla równoważności 31		

* Z pominięciem symboli matematycznych użytych w znaczeniu znanym z kursu matematyki w zakresie szkoły średniej.
W skorowidzu podane są stroniczki, na których wyjaśnione jest znaczenie danego znaku.

$D\Sigma^*$	katora ogólnego o ograniczonym zakresie 88	$X - Y$	rów uporządkowanych 219, znak iloczynu typów porządkowych 220
$O\Sigma^*$	reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego o ograniczonym zakresie 88	X'	różnica zbiorów X i Y 142
Π	reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego o ograniczonym zakresie 88	R'	dopełnienie zbioru X 142
Π	reguła negowania kwantyfikatora ogólnego 91	$\subseteq$	dopełnienie relacji R 172
Σ	reguła negowania kwantyfikatora szczegółowego 92	$X \dot{-} Y$	„jest częścią właściwą“ 143
$=$	znak identyczności 108	$\equiv$	różnica symetryczna zbiorów X i Y 150
EI	reguła ekstensjonalności dla identyczności 109	$\bigcup_{i=1}^{\infty}$	znak negacji równoważności 154
$\neq$	„jest różny od“ 111	$\bigcap_{i=1}^{\infty}$	znak sumy wyrazów nieskończonego ciągu zbiorów 158
$\sum_i$	kwantyfikator jednostkowy 112	$\bigcup$	znak iloczynu wyrazów nieskończonego ciągu zbiorów 158
$'$	operator deskrypcyjny 113	$\bigcap$	znak sumy rodziny zbiorów 159
D_i	reguła dołączania operatora deskrypcyjnego 115	$\langle x, y \rangle$	znak iloczynu rodziny zbiorów 159
$'$	„jest elementem“ 137, „jest elementem zbioru uporządkowanego“ 215	$X \times Y$	para uporządkowana x, y 160
$\mathfrak{N}$	zbiór wszystkich liczb naturalnych 137	$E_a \Phi(a)$	iloczyn kartezjański zbiorów X i Y 161
$\mathfrak{B}$	zbiór wszystkich liczb wymiernych 137	funkc	zbiór tych a , że $\Phi(a)$ 162
$\mathfrak{R}$	zbiór wszystkich liczb rzeczywistych 137	D_i	funkcje 163
$=$	równość zakresowa zbiorów 139, równość zakresowa relacji 170	D_p	lewa dziedzina relacji 164
$\subset$	zawieranie się zbiorów 139, zawieranie się zbiorów uporządkowanych 223	$R(x)$	prawa dziedzina relacji 164
$\{x\}$	zbiór jednostkowy o elemencie x 140	$R(X)$	wartość funkcji R dla argumentu x 164
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	zbiór złożony z elementów $x_1, x_2, \dots, x_n$ 140	R^{-1}	R -owy obraz zbioru X 164
$\bar{}$	„nie jest elementem“ 142	$1-1$	konwers relacji R 166
$+$	znak sumy zbiorów 142, znak sumy relacji 171, znak sumy liczb kardynalnych 179, znak sumy zbiorów uporządkowanych 219, znak sumy typów porządkowych 220	R_x	relacje doskonałe 167
	znak iloczynu zbiorów 142, znak iloczynu relacji 172, znak iloczynu liczb kardynalnych 179, znak iloczynu zbiorów	$R; S$	relacja R ograniczona do zbioru X 168
		$\bar{X}$	iloczyn względny relacji R i S 168
		Lk	moc zbioru X 176
		$\aleph_0$	zbiór liczb kardynalnych 176
		ϵ	moc zbioru liczb naturalnych 177
		X^Y	moc zbioru liczb rzeczywistych 177
		m^n	odwzorowania zbioru Y w zbiór X 179
		$<$	potęga liczb kardynalnych 179
			relacja mniejszości liczb kardynalnych 184, relacja mniej-

2^X	szości odcinków zbioru dobrze uporządkowanego 238, relacja mniejszości liczb porządkowych 244	$\approx$	relacja podobieństwa zbiorów uporządkowanych 216
$Z(R)$	zbiór podzbiorów zbioru X 187	A^*	typ porządkowy zbioru uporządkowanego A^* 217
φ_A	zbiór tych wartości argumentu funkcji R , które nie są elementami odpowiadających im wartości tej funkcji 188	Tp	zbiór typów porządkowych 217
$P(R)$	funkcja charakterystyczna zbioru A 189	ω	229
iz_R	pole relacji R 208	η	231
iz	izomorfizm ustalony przez relację R 208	λ	233
$sp(A)$	relacja izomorfizmu 209	a^*	typ porządkowy odwrotny względem typu porządkowego a 235
$przech(A)$	relacje spójne w zbiorze A 213	Lp	zbiór liczb porządkowych 237
$asym(A)$	relacje przechodnie w zbiorze A 213	A^+	zbiór dobrze uporządkowany o zapasie A (analogicznie: B^+ , C^+ itd.) 238
$porz(A)$	relacje asymetryczne w zbiorze A 213	$A(a)$	odcinek zbioru dobrze uporządkowanego A^+ wyznaczony przez element a 238
A^0	relacje porządkujące zbiór A 214	$fr(A^+)$	funkcje rosnące określone w zbiorze A^+ 239
$x \rightarrow_A y$	zbiór uporządkowany o zapasie A (analogicznie: B^0 , C^0 itd.) 215	Lg	zbiór liczb granicznych 246
$\approx_R$	„ x poprzedza y w zbiorze A^0 “ 215	a^b	potęga liczb porządkowych 249
	podobieństwo zbiorów uporządkowanych ustalone przez relację R 215	$\bar{a}$	liczba kardynalna liczby porządkowej a 255
		$Z(m)$	zbiór wszystkich liczb porządkowych, których liczba kardynalna jest równa m 255
		ω_ξ	256
		$\aleph_\xi$	256
		Ω	256

SKOROWIDZ NAZW

Aksjomat 65—66, — ekstensjonalności dla relacji 170, — ekstensjonalności dla zbiorów 141, 273, — nieskończoności 266, 274, — podzbiorów 274, — wyboru (Zermeli) 202; *-y* Peany arytmetyki liczb naturalnych 278, — teorii mnogości 273—274
Aksjomatyczna teoria mnogości 272; *-e* ujęcie rachunku zdań 65, — — — węższego rachunku kwantyfikatorów 104
Alef zero 177
Alefy 256
Algebra Boole'a 154, — zbiorów 138
Alternatywa 7, — wykluczająca 48
Antynomia 259, — Burali-Fortiego 260, — Russella 259, — zbioru wszystkich liczb porządkowych 260, — zbioru wszystkich zbiorów 259
Argumenty funktora 8, 261
Błędne koło w definiowaniu 118
Ciało zbiorów 157
Ciąg nieskończony 166, — pozaskończony 249, — skończony 166
Część właściwa zbioru 143, — zbioru 139, — zbioru uporządkowanego 223
Definicje 117, — indukcyjne 121, 249, — normalne 118, — przez abstrakcję 269, — warunkowe 119, — w rachunku zdań 54, 67
Definiendum 117
Definiens 117
Deskrypt 113
Dodawanie, p. suma
Dolna klasa przekroju 222
Dopełnienie zbioru 142
Dowód założeniowy nie wprost 18, — założeniowy wprost 17, — zwykły nie wprost 18, — zwykły wprost 17

Dwoiste wzory 155
Dysjunkcja 53
Dystrybutywne znaczenie terminu „zbiór” 279
Działania dwuargumentowe 172
Dziedzina relacji 164, — lewa 164, — prawa 164
Element zbioru uporządkowanego pierwszy 222, — — — ostatni 222, — późniejszy 214, — wcześniejszy 214
Forma logiczna zdania 59—60, — — wnioskowania 59—60
Funkcja 163, — charakterystyczna zbioru 189, — dwu zmiennych 172, — rosnąca 239, — zdaniowa 80
Funktory 8, — modalne 75, — nazwotwórcze 118, 261, — prawdziwościowe 46, — rzędu 1-go 128, — rzędów wyższych 128, 130, — zdaniotwórcze 8, 262
Górna klasa przekroju 222
Hipoteza continuum 257
Identyczność 108; *-ci* definicja 131
Iloczyn kartezjański 161, — liczb kardynalnych 179, — typów porządkowych 220, — wyrazów nieskończonego ciągu zbiorów 158, — względny relacji 168—169, — zbiorów 142, — — — uporządkowanych 219
Implikacja 7, — materialna 56, — odwrotna 15, — prosta 15, — ścisła 56
Indywidual 138
Interpretacja teorii 157
Intuicjonizm 282
Izomorfizm 208
Jednorodność definicji 118

Kategorie semantyczne 260
Klasy abstrakcji 269
Kolektywne znaczenie terminu „zbiór” 279
Konceptualizm 281
Koniunkcja 7
Koniunkcyjna postać normalna 62
Konwers relacji 166
Kres zbioru uporządkowanego dolny 226, — — — górny 225
Kwantyfikator 78, — jednostkowy 112, — ogólny 78, — szczegółowy 78; *-y* o ograniczonym zakresie 81
Lewa dziedzina relacji 164
Liczba algebraiczna 202, — graniczna 246, — kardynalna 176, — — — liczby porządkowej 255, — — — pozaskończona 190, — początkowa 256, — początkowa zbioru $Z(m)$ 256, — porządkowa 237, — przestępna 202
Logiki wielowartościowe 76
Luka 223
Metasystem 9
Metateza 23
Metoda aksjomatyczna 10, 65—66, — diagramów Venna 143, — przekątniowa 199, — założeniowa 10, — zerojedynkowa 45
Mnożenie, p. iloczyn
Moc zbioru 176, — — — uporządkowanego 226
Najmniejszy zbiór o danej własności 122
Nazwy 261, — jednostkowe 77, 261, — ogólne 261, — puste 261
Negacja 7, — łączna 53
Neokonceptualizm 281
Neonominizm 281
Niesprzeczność systemu 62, 69
Niezależność aksjomatów 69, — terminów 70
Nominalizm 281
Odcinki zbioru dobrze uporządkowanego 238
Odwzorowania zbioru X w zbiór Y 179
Ogólna zasada wyboru 207
Operator deskrypcyjny 113
Operatory 262
Para uporządkowana 160
Parametry 125
Pełność systemu 64
Pewnik wyboru (Zermeli) 202

Platonizm 281
Podobieństwo zbiorów uporządkowanych 216, — — — ustalone przez relację R 215
Podstawianie, p. reguła podstawiania
Podstawowe twierdzenie Descartes'a 112, — — — uogólnione 112
Podzbiór zbioru 139, — — — uporządkowanego 223
Pole relacji 208
Potęgowanie liczb kardynalnych 179, — — — porządkowych 249
Powszechniki 280
Prawa De Morgana 35, — — — dla zbiorów 153, — — — — — uogólnione 160, — — — rachunku kwantyfikatorów 91, — ekstensjonalności dla równoważności 42, — łączności alternatywy i koniunkcji 43, — negowania kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie 108, — przenoszenia kwantyfikatorów 95, — — — o ograniczonym zakresie 108, — przedstawiania kwantyfikatorów 97, — — — o ograniczonym zakresie 108, — rozkładania kwantyfikatorów 92, — — — o ograniczonym zakresie 108
Prawa dziedzina relacji 164
Prawo dodawania implikacji 38, — — — poprzedników 33, — Dunsa Szkota 29, — dylematu konstrukcyjnego prostego 34, — — — złożonego 38, — eksportacji 21, — importacji 21, — komutacji 22, — logiczne 56, — mnożenia implikacji 36, — — — następników 31, — modus tollendo tollens 28, — negowania alternatywy 34, — — — implikacji 35, — — — koniunkcji 35, — — — kwantyfikatora szczegółowego 91, — — — ogólnego 91, — nowego czynnika 36, — — — składnika 37, — odwracania implikacji 41, — podwójnej negacji 27, — rozdzielnosci alternatywy względem koniunkcji 40, — — — koniunkcji względem alternatywy 40, — sylogizmu hipotetycznego (warunkowego) 16, 21, — sprzeczności 35, — symplifikacji 30, — tożsamości dla implikacji 30, — — — równoważności 30, — transpozycji 27, — — — złożonej 28, — — — wyłączonego środka 35, — związku między alternatywą a implikacją 26
Prawdziwe wyrażenia rachunku zdań 51, — — — węższego rachunku kwantyfikatorów 106

Predykaty 77, — zależne od parametrów 125
Produkt zbiorów 161
Protetyka 75
Przeciwności relacji 164
Przedmioty typu *i-go* 267, — — zerowego 266
Przekroje zbioru uporządkowanego 222,
 — właściwe zbioru uporządkowanego 233
Rachunek funkcyjny 77, — kwantifikatorów
 77, — — rzędu 1-go 78, — — rzędów
 wyższych 128, 131, — — stosowany 107,
 — — węższy 78, — — predykatów 77,
 — — zdań 7, — — dwuwartościowy 75,
 — — intuicjonistyczny 76, — — klasy-
 czny 75, — — stosowany 107, — — trój-
 wartościowy 76, — — wielowartościowy
 76
Realizm skrajny 280, — umiarkowany 280
Reguła deficyjnego zastępowania 68, — dołą-
 czania alternatywy 14, — — definicji do
 dowodu 122, — — implikacji do dowodu
 31, — — koniunkcji 13, — — kwanty-
 fikatora ogólnego 85, — — — szczegóło-
 wego 85, — — podwójnej negacji 27,
 — — równoważności 14, — — dylematu de-
 strukcyjnego prostego 38, — — — złożo-
 nego 38, — — ekstensjonalności dla identycz-
 ności 109, — — rachunku zdań 42—43,
 — — w rachunku kwantifikatorów 100 —
 101, — — modus tollendo tollens 28—29, — ne-
 gowania alternatywy 35, — — kwanty-
 fikatora ogólnego 91, — — — szczegóło-
 wego 92, — — odwracania implikacji 41,
 — — odrywania 12, — — dla równoważ-
 ności 31, — — opuszczania alternatywy 14,
 24, 27, — — koniunkcji 13, — — kwan-
 tyfikatora ogólnego 85, — — — szcze-
 gółowego 86—87, — — równoważności
 15, — — podwójnej negacji 26, — — pod-
 stawiania za zmienne nazwowe 103,
 — — — — — reprezentujące predykaty
 103, — — — — — zdaniowe 25,
 — — — — — wyrażenia funkcyjne 122—126,
 — — przemianowywania zmiennych zwią-
 zanych 103, — — tworzenia dowodów roz-
 gałęzionych z dołączeniem dodatkowych
 założeń 36, — — założeniowego dowodu
 nie wprost 17—18, — — — — — wprost
 16—17
Reguły dołączania i opuszczania kwantyfika-
 torów o ograniczonym zakresie 88,

— — nowych wierszy do dowodu 12,
 pierwotne 12, — — tworzenia dowodu 12,
 — — wtórne 12, — — — dołączania nowych
 wierszy do dowodu 24, — — — tworzenia
 dowodu 18
Relacja asymetryczna w zbiorze *A* 213, — do-
 skonala 167, — jedno-jednoznaczna 167,
 — — mniejszości liczb kardynalnych 184,
 — — — — — mniejszości liczb porządkowych 244,
 — — — — — mniejszości odcinków zbioru dobrze
 uporządkowanego 238, — — nierówności
 liczb kardynalnych 183, — — ograniczona
 do zbioru *X* 168, — — określona i wykonalna
 w zbiorze 172, — — poprzedzania w zbiorze
 uporządkowanym 215, — — porządkująca
 zbiór *A* 214, — — przechodnia 109,
 — — — w zbiorze *A* 213, — — spójna w zbio-
 rze *A* 213, — — symetryczna 109, — — typu
 równoważności 170, — — zwrotna 109
Rodzina zbiorów 138, 273
R-owy obraz zbioru 164
Rozstrzygalność systemu 106
Rozwinięcie liczby rzeczywistej niewłaściwe
 194, — — — — — właściwe 194
Równoliczność zbiorów 174, — — ustalona
 przez relację *R* 173
Równość zakresowa relacji 170, — — zbio-
 rów 139
Równoważność 7, — — logiczna 57, — — mate-
 rialna 57, — — ścisła 57, — — systemów 66
Różnica zbiorów 142, — — symetryczna 150
Skok 223
Spełnianie 106
Sprzeczne wyrażenia 18
Stale logiczne 56
Suma liczb kardynalnych 179, — — relacji 171,
 — — rodziny zbiorów 159, — — — — — upo-
 rządkowanych 226, — — — — — typów porządko-
 wych 220, — — — — — wyrazów nieskończonego
 ciągu zbiorów 158, — — — — — zbiorów 142,
 — — — — — uporządkowanych 219
System aksjomatyczny 65, — — założeniowy 10
Tabela matrycowa 46, — — alternatywy 47,
 — — — — — wykluczającej 48, — — — — — dysjunkcji 54,
 — — — — — implikacji 49, — — — — — koniunkcji 47, — — — — — ne-
 gacji 46, — — — — — łącznej 54, — — — — — równoważ-
 ności 49
Teoria kategorii semantycznych 260—264,
 — — — — — typów logicznych 264—268

Termin pierwotny 66

Teza 20

Twierdzenie Cantora-Bernsteina 185—186,
 — — — — — o dedukcji dla rachunku zdań 71—72,
 — — — — — dla rachunku kwantyfikatorów
 105, — — Zermeli 250

Typ porządkowy odwrotny 235, — — — — — zbioru
 uporządkowanego 217

Typikalna wieloznaczność 269

Uniwersalia 280

Wartość logiczna zdania 46

Warunek istnienia i jedyności 119

Wynikanie logiczne 56

Wyrażenia atomowe 78, — — molekularne węż-
 szego rachunku kwantyfikatorów 78,
 — — — — — rzędu 1-go 128, — — — — — rzędów wyż-
 szych 128, 131, — — — — — sensowne aksjomatycz-
 nej teorii mnogości 272, — — — — — zdaniowe ra-
 chunku zdań 8, — — — — — węższego rachunku
 kwantyfikatorów 78—79

Zagadnienie continuum 257

Założenia dowodu 18, — — — — — dodatkowe dowodu
 31, — — — — — twierdzenia 16—17

Założenie dowodu nie wprost 18

Zapas ciągu 178, — — — — — zbioru uporządkowanego
 214

Zasada indukcji 134, 247—248, — — — — — minimum
 249, — — — — — trychotomii 186—187

Zasadnicze twierdzenie o izomorfizmie 212

Zasięg kwantifikatora 79

Zastępowanie 42—43

Zawieranie się zbiorów 139, — — — — — upo-
 rządkowanych 223

Zbiór dobrze uporządkowany 236, — — — — — jedno-
 elementowy (jednostkowy) 141, — — — — — nie-
 skończony w sensie Dedekinda 190,
 — — — — — pełny 137, — — — — — typu *i-go* 267,
 — — — — — — — — — — — 1-go 266, — — — — — potęgowy 187,
 — — — — — — — — — — — przeliczalny 178, — — — — — pusty 142, — — — — — upo-
 rządkowany 214, — — — — — — — — — — — ograniczony od
 dołu 226, — — — — — — — — — — — góry 225,
 — — — — — — — — — — — skończony 226, — — — — — — — — — — — wartość funkcji
 164, — — — — — — — — — — — zamknięty ze względu na daną
 operację 121

Zbiory rozłączne 143

Zdanie 7, 260, — — — — — jednostkowe 111

Zerojedynkowa metoda sprawdzania 46

Zmienna indywidualna (nazwowa) 77, — — — — — re-
 prezentująca predykaty 77, — — — — — wolna 80,
 — — — — — zdaniowa 7, — — — — — związana 80

Zupełność systemu 64

SPIS RZECZY

Wstęp	5
-----------------	---

Część I

PODSTAWOWE RACHUNKI LOGICZNE

Rozdział I. Rachunek zdań	
§ 1. Symbole i wyrażenia	7
§ 2. Reguły pierwotne	10
§ 3. Tezy i reguły wtórne	21
§ 4. Sprawdzanie zerojedynkowe. Funktory prawdziwościowe	45
§ 5. niesprzeczność, pełność i zupełność założeniowego systemu rachunku zdań	61
§ 6. Aksjomatyczne ujęcie rachunku zdań	65
Rozdział II. Rachunek kwantyfikatorów	
§ 1. Symbole i wyrażenia węższego rachunku kwantyfikatorów	77
§ 2. Reguły pierwotne węższego rachunku kwantyfikatorów	84
§ 3. Tezy i reguły wtórne węższego rachunku kwantyfikatorów	89
§ 4. Identyczność	108
§ 5. Definicje	117
§ 6. Rachunek kwantyfikatorów wyższych rzędów	127
§ 7. Przykłady sformalizowanych dowodów matematycznych	132

Część II

ELEMENTY TEORII MNOGOŚCI

Rozdział I. Ogólna teoria mnogości	137
§ 1. Algebra zbiorów	151
§ 2. Związek pomiędzy rachunkiem zdań a algebrą zbiorów	154
§ 3. Algebra Boolo'a	158
§ 4. Działania nieskończone	160
§ 5. Iloczyn kartezjański zbiorów	163
§ 6. Elementy teorii relacji	173
§ 7. Równoliczność zbiorów. Liczby kardynalne	179
§ 8. Arytmetyka liczb kardynalnych	183
§ 9. Nierówności	20

§ 10 Zbiór potęgowy	187
§ 11 Zbiory nieskończone w sensie Dedekinda	190
§ 12. Liczby kardynalne $\aleph_i$ i c	194
§ 13. Dowód Cantora istnienia liczb przestępnych	202
§ 14. Pewnik wyboru	202
Rozdział II. Zbiory uporządkowane	
§ 1. Izomorfizm	208
§ 2. Zbiory podobne. Typy porządkowe	213
§ 3. Arytmetyka typów porządkowych	219
§ 4. Przekroje. Zbiory gęste i ciągłe	222
§ 5. Skończone zbiory uporządkowane. Typy porządkowe ω, η, λ . Typy odwrotne	226
§ 6. Zbiory dobrze uporządkowane. Liczby porządkowe	236
§ 7. Odcinki zbioru dobrze uporządkowanego	238
§ 8. Nierówności. Liczby graniczne	244
§ 9. Zasada indukcji	247
§ 10. Twierdzenie Zermeli. Alefy. Hipoteza continuum	250
Dodatek	
§ 1. Antynomie teorii mnogości	259
§ 2. Kategorie semantyczne	260
§ 3. Teoria typów logicznych	264
§ 4. Definicje niektórych pojęć teorii mnogości na gruncie logiki	268
§ 5. Aksjomatyczna teoria mnogości	272
§ 6. Teoria mnogości a arytmetyka	277
§ 7. Filozoficzne uwagi o pojęciu zbioru	279
Definicje	284
Tezy	288
Skorowidz znaków	297
Skorowidz nazw	300

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Wydanie czwarte Nakład 5800 + 200 egzemplarzy.
 Arkuszy wydawniczych 21,25. Arkuszy drukarskich 19,25.
 Papier drukowy satynowany kl. III. 70 g, 70 × 100.
 Oddano do reprodukcji w grudniu 1983 r.
 Podpisano do druku w grudniu 1983 r.
 Druk ukończono w lutym 1984 r.
 Zam. 49/84. L-4. Cena zł 140,-

Zakład Graficzny Wydawnictw Naukowych
 Łódź, ul. Zwirki 2