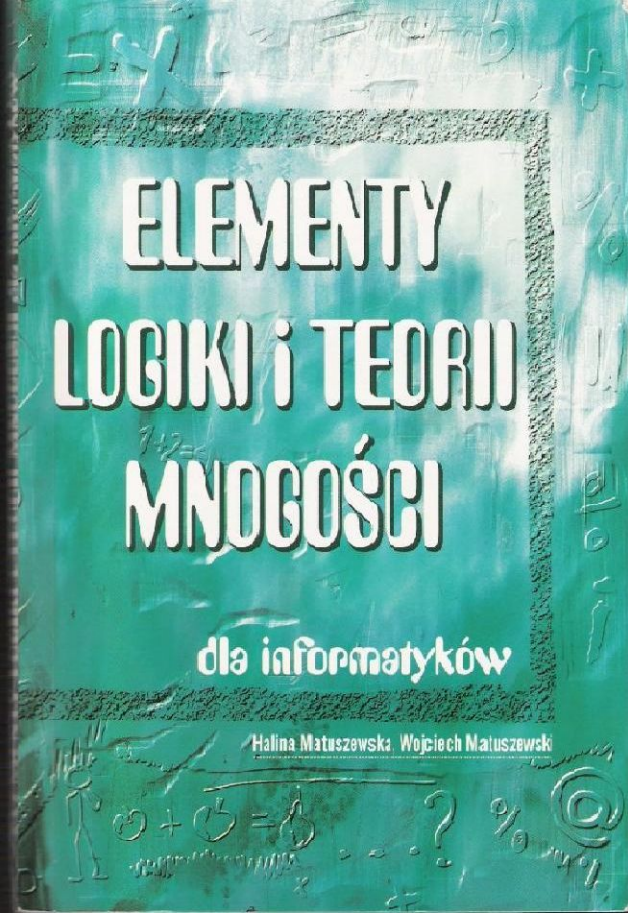


The book cover has a teal background with various mathematical symbols and a stick figure drawn in a lighter shade. At the top left, there is a large 'E' and an 'X'. Below it, the title 'ELEMENTY LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI' is written in large, bold, white letters with black outlines. To the right of the title, there is a vertical column of symbols including a plus sign, a percent sign, and a double vertical bar. At the bottom left, there is a stick figure standing next to the equation $\emptyset + \emptyset = \emptyset$. To the right of the figure, there is a question mark, a percent sign, and a copyright symbol. The authors' names 'Halina Matuszewska, Wojciech Matuszewski' are at the bottom center.

ELEMENTY LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

dla informatyków

Halina Matuszewska, Wojciech Matuszewski

Halina Matuszewska, Wojciech Matuszewski

ELEMENTY LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI dla informatyków

Książka jest przeznaczona dla studentów informatyki uczących się przedmiotu „Logika i teoria mnogości”. Zakres książki jest zgodny ze standardami nauczania dla kierunku studiów „Informatyka”. W zakres dziesięciu początkowych rozdziałów wchodzi: zdania, tautologie, reguły dowodzenia, funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, zbiory, relacje (w tym relacje równoważności i relacje porządku) oraz funkcje. Każdy z tych rozdziałów zawiera krótkie omówienie teorii, rozwiązane przykłady ilustrujące teorię, zadania do samodzielnego rozwiązania i odpowiedzi do zadań. Ostatnie cztery rozdziały dotyczą zagadnień trudniejszych: mocy zbioru, typów porządkowych, aksjomatyki teorii mnogości oraz teorii formalnych. Te rozdziały zawierają jedynie krótkie streszczenie wiadomości związanych z omawianymi tematami. Czytelnik pragnący pogłębić swą wiedzę w tym zakresie powinien sięgnąć do obszerniejszych pozycji literatury.

Przykłady i zadania znajdujące się w książce nie wymagają od Czytelnika zaawansowanej wiedzy matematycznej. Książka została napisana z myślą o studentach, którzy nie będąc studentami wydziału matematyki, potrzebują poznać najważniejsze pojęcia z logiki i teorii mnogości, by móc zdobyć wiedzę stosować np. przy pisaniu programów komputerowych. Książka może być z powodzeniem wykorzystana w liceach profilowanych i ogólnokształcących, w klasach realizujących program nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym – w tym w klasach o profilu informatycznym.

Druk wykonano z plików dostarczonych przez autora.

Projekt okładki: Maciek Mazurek

© Copyright by H. i W. Matuszewscy, Warszawa 2003

© Copyright by BEL Studio Sp. z o.o., Warszawa 2003

Wydanie I, Warszawa 2003

Realizacja wydawnicza: BEL Studio Sp. z o.o.
01-355 Warszawa, ul. Powstańców Śl. 67 B
tel./fax (0-22) 665 92 22, e-mail: studio@bel.com.pl
www.bel.com.pl



Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany, za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących i innych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

ISBN 83-88442-56-2

Spis treści

Rozdział 1 – Rachunek zdań	7
Zdania – 7. Zmienne zdaniowe – 7. Spójniki logiczne – 7.	
Tabele zerojedynekowe – 8. Stosowanie nawiasów – 10.	
Funkcje zdaniowe – 12. Zadania – 12.	
Odpowiedzi do zadań – 14.	
Rozdział 2 – Tautologie	15
Pojęcie tautologii – 15. Prawa de Morgana – 16.	
Alternatywa wykluczająca – 17. Zadania – 18.	
Odpowiedzi do zadań – 20.	
Rozdział 3 – Reguły wnioskowania	27
Matematyka jako nauka dedukcyjna – 27. Reguły wnioskowania – 27. Reguła odrywania (modus ponens) – 28.	
Modus tollens – 29. Sylogizm hipotetyczny – 30.	
Sylogizm alternatywny – 31. Dowód niewprost – 32.	
Inne reguły wnioskowania – 33. Kwadrat logiczny – 33.	
Zadania – 34. Odpowiedzi do zadań – 36.	
Rozdział 4 – Zbiory	38
Zbiór, element zbioru – 38. Sposoby określania zbiorów – 38. Równość zbiorów – 39. Zbiór pusty – 39.	
Zbiory liczbowe – 39. Podzbiory – 41. Część wspólna zbiorów – 42. Suma zbiorów – 42. Różnica zbiorów – 43.	
Własności działań na zbiorach – 43. Dopelnienie zbioru – 45.	
Iloczyn kartezjański zbiorów – 46. Zadania – 47.	
Odpowiedzi do zadań – 50.	
Rozdział 5 – Funkcje zdaniowe	53
Funkcja zdaniowa – 53. Wykres funkcji zdaniowej jednej zmiennej – 54. Wykres funkcji zdaniowej dwóch zmiennych – 55. Wykres funkcji zdaniowej n zmiennych – 56. Zadania – 57.	
Odpowiedzi do zadań – 58.	

Rozdział 6 – Kwantyfikatory 59

Kwantyfikator ogólny – 59. Kwantyfikator szczegółowy – 59. Zmienna swobodna, zmienna związana – 60. Kwantyfikatory o ograniczonym zasięgu – 61. Kwantyfikatory jako uogólnienie spójników logicznych – 61. Stosowanie nawiasów – 61. Tautologie rachunku kwantyfikatorów – 62. Prawa zaprzeczania – 63. Przetwarzanie kwantyfikatorów – 64. Zadania – 65. Odpowiedzi do zadań – 67.

Rozdział 7 – Relacje równoważności 69

Pojęcie relacji – 69. Relacje zwrotne – 71. Relacje symetryczne – 71. Relacje przechodnie – 72. Relacje równoważności – 73. Klasy abstrakcji relacji równoważności – 74. Zadania – 75. Odpowiedzi do zadań – 78.

Rozdział 8 – Relacje porządkujące 81

Relacje antysymetryczne – 81. Relacje porządku – 81. Element maksymalny, element minimalny – 82. Element największy, element najmniejszy – 83. Schemat relacji porządku – 84. Relacje spójne – 85. Relacje liniowego porządku – 86. Łańcuchy – 86. Relacje dobrego porządku – 87. Lemat Kuratowskiego-Zorna – 88. Zadania – 88. Odpowiedzi do zadań – 90.

Rozdział 9 – Funkcje 93

Pojęcie funkcji – 93. Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji – 94. Obraz zbioru – 96. Przeciwobraz zbioru – 96. Funkcje różnowartościowe – 97. Funkcje wzajemnie jednoznaczne – 97. Funkcja odwrotna – 98. Twierdzenia o funkcji odwrotnej – 100. Funkcja złożona – 101. Twierdzenia o funkcji złożonej – 101. Obcięcie i przedłużenie funkcji – 102. Wykres funkcji – 103. Zadania – 104. Odpowiedzi do zadań – 110.

Rozdział 10 – Uogólnione działania na zbiorach 114

Indeksowana rodzina zbiorów – 114. Uogólniony iloczyn zbiorów – 114. Uogólniona suma zbiorów – 115. Przypadki szczególne – 116. Zadania – 117. Odpowiedzi do zadań – 118.

Rozdział 11 – Moc zbioru 121

Równoliczność zbiorów – 121. Własności równoliczności zbiorów – 121. Moc zbioru – 122. Zbiory przeliczalne – 125. Zbiory nieprzeliczone – 126. Nierówności dla liczb kardynalnych – 127. Hipoteza continuum – 127. Zbiór potęgowy – 128. Uogólniona hipoteza continuum – 129. Działania na liczbach kardynalnych – 129.

Rozdział 12 – Typy porządkowe 130

Podobieństwo zbiorów liniowo uporządkowanych – 130. Własności podobieństwa zbiorów – 130. Typy porządkowe – 131. Twierdzenia o typach porządkowych – 131. Liczby porządkowe – 132.

Rozdział 13 – Aksjomaty teorii mnogości 133

Pojęcia pierwotne – 133. Aksjomaty Zermelo-Fraenkla – 133. Pewnik wyboru – 134.

Rozdział 14 – Teorie formalne 136

Antynomia Russella – 136. Formalizacja języka teorii – 136. Aparat logiczny teorii – 137. Dowód formalny – 137. Teorie niespreczne – 137. Teorie zupełne – 137. Teorie rozstrzygalne – 138.

Skorowidz nazw 139

Rozdział 1

Rachunek zdań

Zdania. Przez *zdanie* rozumiemy w logice wypowiedź oznajmującą i taką, której w ramach danej nauki można przypisać ocenę *prawdziwości* lub *falszu* (tzn. tylko jedną z tych dwóch ocen).

Przykład 1

Wypowiedź: „5 jest liczbą całkowitą” jest zdaniem prawdziwym.

Wypowiedź: „5 jest liczbą parzystą” jest zdaniem fałszywym.

Wypowiedź: „Czy 5 jest liczbą parzystą?” nie jest zdaniem, gdyż jest to pytanie, a nie – wypowiedź oznajmująca.

Wypowiedź: „5 jest liczbą szczęśliwą” nie jest zdaniem, gdyż nie można przypisać tej wypowiedzi jednoznacznej oceny (prawdziwości lub fałszu)

Zdania będziemy oznaczać literami, np. p , q , r . Jeżeli p jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że *wartość logiczna zdania p jest równa 1*, co zapisujemy:

$$w(p) = 1$$

Jeżeli p jest zdaniem fałszywym, to mówimy, że *wartość logiczna zdania p jest równa 0*, co zapisujemy:

$$w(p) = 0$$

Przedmiotem naszych rozważań będzie więc *logika dwuwartościowa* (poupszczamy tylko dwie wartości: 0 i 1).

Zmienne zdaniowe. Literę oznaczającą dowolne zdanie nazywamy *zmienną zdaniową*. Zmienna zdaniowa może mieć wartość logiczną 1 lub 0 (w zależności od tego, jakie zdanie oznacza). Jeżeli wiadomo, że zmienna zdaniowa p oznacza zdanie prawdziwe, to piszemy: $p = 1$, a jeżeli wiadomo, że zmienna zdaniowa p oznacza zdanie fałszywe, to piszemy: $p = 0$.

Spójniki logiczne. Za pomocą *spójników logicznych* ze zmiennych zdaniowych tworzymy *formuły rachunku zdań*. Formuły te

przyjmują wartości logiczne 0 lub 1, więc mogą być uważane za zmienne zdaniowe. Poznamy pięć najważniejszych spójników logicznych. Ich nazwy, symbole i sposoby odczytania są podane w poniższej tabeli.

Nazwa spójnika	Symbol spójnika	Budowa formuły	Nazwa formuły	Sposób odczytania
nie	$\sim$	$\sim p$	negacja, zaprzeczenie	„nie p ”, „nieprawda, że p ”
i	$\wedge$	$p \wedge q$	koniunkcja	„ p i q ”
lub	$\vee$	$p \vee q$	alternatywa	„ p lub q ”
implikuje	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	implikacja	„jeżeli p to q ”, „ p implikuje q ”, „z p wynika q ”
jest równoważne	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	równoważność	„ p jest równoważne q ”, „ p wtedy i tylko wtedy gdy q ”

Spójniki logiczne są też nazywane *funktorami zdaniotwórczymi*. Ponieważ do zbudowania zdania złożonego za pomocą negacji wystarczy jedno zdanie składowe, więc ten functor nazywamy *funktorem jednoargumentowym*. Do zbudowania zdania złożonego za pomocą koniunkcji, alternatywy, implikacji oraz równoważności potrzebne są dwa zdania składowe. Te funktory nazywamy *funktorami dwuargumentowymi*. Zdania składowe, z których jest zbudowana formuła, nazywamy *czynnikami* w przypadku koniunkcji, *składnikami* w przypadku alternatywy, *poprzednikiem* i *następnikiem* w przypadku implikacji.

Tabele zerjedynkowe. Wartości logiczne formuł przedstawionych w powyższej tabeli definiujemy za pomocą *tabel zerjedynkowych*, które podają wartości logiczne formuł w zależności od wartości logicznych zdań składowych.

Tabela negacji

p	$\sim p$
1	0
0	1

Z tabeli tej odczytujemy, że negacja zdania p jest fałszywa, gdy zdanie p jest prawdziwe oraz że negacja zdania p jest prawdziwa, gdy zdanie p jest fałszywe.

Tabela koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Z tabeli tej odczytujemy, że koniunkcja jest prawdziwa, gdy oba czynniki tej koniunkcji są prawdziwe, a w pozostałych przypadkach koniunkcja jest fałszywa.

Tabela alternatywy

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Z tabeli tej odczytujemy, że alternatywa jest fałszywa, gdy oba składniki tej alternatywy są fałszywe, a w pozostałych przypadkach alternatywa jest prawdziwa.

Tabela implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Z tabeli tej odczytujemy, że implikacja jest fałszywa, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy. W pozostałych przypadkach implikacja jest prawdziwa.

Tabela równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Z tabeli tej odczytujemy, że równoważność jest prawdziwa, gdy oba zdania składowe mają te same wartości logiczne. W przeciwnym przypadku równoważność jest fałszywa.

Stosowanie nawiasów. W celu zapewnienia jednoznaczności odczytu formuły, której składowe są też formułami, wprowadza się – podobnie jak w arytmetyce – nawiasy np.

$$[p \Rightarrow (q \vee \sim p)] \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$$

Stosujemy przy tym zasadę, że symbolu negacji nie trzeba oddzielać od innych symboli nawiasem. Przyjmujemy też, że symbol negacji wiąże się ze zmienną zdaniową mocniej niż pozostałe symbole, np. napis $\sim p \wedge q$ oznacza koniunkcję, w której jednym czynnikiem jest $\sim p$, a drugim czynnikiem jest q . Gdybyśmy chcieli zapisać negację koniunkcji p oraz q , należałoby użyć nawiasów i napisać: $\sim(p \wedge q)$

Przykład 2

Wyznaczyć wartość logiczną formuły

$$p \Rightarrow (q \vee \sim p)$$

przy podstawieniu $p=1, q=0$.

Rozwiązanie

Ponieważ p ma wartość logiczną 1, więc $\sim p$ ma wartość logiczną 0 (zob. tabela negacji). Oba składniki alternatywy $q \vee \sim p$ mają wartość logiczną 0, więc ta alternatywa ma też wartość logiczną 0 (zob. tabela alter-

natywy). W implikacji $p \Rightarrow (q \vee \sim p)$ poprzednik p ma wartość logiczną 1, a następnik $q \vee \sim p$ ma wartość logiczną 0, więc implikacja ma wartość logiczną 0 (zob. tabela implikacji). Wartością logiczną formuły $p \Rightarrow (q \vee \sim p)$ przy podstawieniu $p=1, q=0$ jest 0.

Uwaga.

W celu skrócenia zapisu przedstawionego w rozwiązaniu rozumowania, przedstawimy to rozumowanie w następującej formie:

$$w[1 \Rightarrow (0 \vee \sim 1)] = w[1 \Rightarrow (0 \vee 0)] = w[1 \Rightarrow 0] = 0.$$

Przykład 3

Wyznaczyć wartość logiczną formuły

$$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$$

przy podstawieniu $p=0, q=1$.

Rozwiązanie

$$w[(0 \wedge \sim 1) \Leftrightarrow (0 \vee \sim 1)] = w[(0 \wedge 0) \Leftrightarrow (0 \vee 0)] = w[0 \Leftrightarrow 0] = 1$$

Przykład 4

Wyznaczyć wartość logiczną formuły

$$(p \wedge q) \vee (\sim r \Rightarrow q)$$

przy podstawieniu $p=0, q=1, r=1$.

Rozwiązanie

$$w[(0 \wedge 1) \vee (\sim 1 \Rightarrow 1)] = w[0 \vee (0 \Rightarrow 1)] = w[0 \vee 1] = 1.$$

Przykład 5

Wyznaczyć wartość logiczną formuły

$$p \Rightarrow [((q \vee (\sim r \Leftrightarrow q)) \Rightarrow (p \vee (r \Rightarrow q)))]$$

przy podstawieniu $p=0, q=1, r=1$.

Rozwiązanie

Możemy ten przykład rozwiązać podobnie jak poprzednie przykłady. Wystarczy jednak zauważyć, że dana for-

muła jest implikacją o poprzedniku p , który ma wartość logiczną 0. W takim przypadku implikacja ma wartość logiczną 1 (bez względu na wartość logiczną następnika). Odp. Wartość logiczna tej formuły jest równa 1.

Funkcje zdaniowe. Jeżeli pewne wyrażenie zawiera zmienną i wyrażenie to staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy za tę zmienną podstawimy określoną wartość, to takie wyrażenie nazywamy *funkcją zdaniową*.

Przykład 6

Wyrażenie: „Liczba x jest większa niż 2.” jest funkcją zdaniową. Podstawiając np. $x=3$ otrzymujemy zdanie prawdziwe: „Liczba 3 jest większa niż 2.”, a podstawiając np. $x=1$ otrzymujemy zdanie fałszywe: „Liczba 1 jest większa niż 2.”

Funkcjom zdaniowym będzie poświęcony osobny rozdział.

Zadania

Zadanie 1

Ustalić, czy podana wypowiedź jest zdaniem. Jeżeli podana wypowiedź jest zdaniem – ocenić jaka jest wartość logiczna tego zdania.

- Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2.
- Czy liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2?
- Sprawdź, czy liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2.
- Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od liczby naturalnej x .
- Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od każdej liczby naturalnej.
- Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od pewnej liczby naturalnej.
- Liczba $\sqrt{3}$ jest większa od pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 2

Oceń wartość logiczną zdania

- $(2 < 3) \wedge (2 > 3)$
- $(2 < 3) \vee (2 > 3)$
- $(2 < 3) \Rightarrow (2 > 3)$
- $(2 > 3) \Rightarrow (2 < 3)$

- $(2 < 3) \Leftrightarrow (2 > 3)$
- $(2 = 3) \wedge (2 > 3)$
- $(2 = 3) \vee (2 > 3)$
- $(2 = 3) \Rightarrow (2 > 3)$
- $(2 > 3) \Rightarrow (2 = 3)$
- $(2 = 3) \Leftrightarrow (2 > 3)$

Zadanie 3

Wyznaczyć wartość logiczną podanej formuły przy podstawieniu $p=1$, $q=0$.

- $\sim p \vee q$
- $p \wedge \sim q$
- $\sim p \Rightarrow \sim q$
- $\sim (p \Leftrightarrow q)$
- $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$
- $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- $[p \vee (q \Rightarrow p)] \vee (p \Leftrightarrow q)$
- $[(p \vee q) \Rightarrow p] \wedge (p \Leftrightarrow q)$
- $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Zadanie 4

Wyznaczyć wartość logiczną każdej formuły z zadania 3 przy podstawieniu $p=0$, $q=1$.

Zadanie 5

Wyznaczyć wartość logiczną podanej formuły przy podstawieniu $p=1$, $q=0$, $r=1$.

- $(\sim p \wedge q) \vee r$
- $(\sim p \vee q) \wedge r$
- $\sim (p \wedge q) \vee r$
- $\sim (p \vee q) \wedge r$
- $\sim p \wedge (q \vee r)$
- $\sim p \vee (q \wedge r)$
- $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- $\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
- $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$
- $[(p \Rightarrow r) \vee \sim q] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (r \wedge \sim q)]$
- $[(p \Leftrightarrow r) \vee \sim p] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (r \vee q)]$

Zadanie 6

Wyznaczyć wartość logiczną każdej formuły z zadania 5 przy podstawieniu $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$.

Zadanie 7

Wyznaczyć wartość logiczną każdej formuły z zadania 5 przy podstawieniu $p = 0$, $q = 1$, $r = 0$.

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

Wypowiedzi a), f), g) są zdaniami prawdziwymi (wartość logiczna 1).

Wypowiedź e) jest zdaniem fałszywym (wartość logiczna 0).

Wypowiedzi b), c), d) nie są zdaniami.

Zadanie 2

Zdania b), d), h), i), j) mają wartość logiczną 1.

Zdania a), c), e), f), g) mają wartość logiczną 0.

Zadanie 3

Formuły b), c), d), e), f), g), h), i), k), m), n) mają wartość logiczną 1.

Formuły a), j), l) mają wartość logiczną 0.

Zadanie 4

Formuły a), d), f), h), i), j), m), n) mają wartość logiczną 1.

Formuły b), c), e), g), k), l) mają wartość logiczną 0.

Zadanie 5

Formuły a), c), g), h), i), j), k), m), n) mają wartość logiczną 1.

Formuły b), d), e), f), l) mają wartość logiczną 0.

Zadanie 6

Formuły a), b), c), e), f), g), h), i), j), k), m) mają wartość logiczną 1.

Formuły d), l), n) mają wartość logiczną 0.

Zadanie 7

Formuły a), c), e), f), i), m) mają wartość logiczną 1.

Formuły b), d), g), h), j), k), l), n) mają wartość logiczną 0.

Rozdział 2 Tautologie

Pojęcie tautologii. Tautologia jest to formuła rachunku zdań, która przyjmuje wartość logiczną 1 przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych za zmienne zdaniowe występujące w tej formule.

Aby udowodnić, że dana formuła jest tautologią wystarczy podać ją *sprawdzianowi zerowejnkowemu*, tzn. sprawdzić czy jej wartość logiczna jest równa 1 dla wszystkich możliwych wartości logicznych zmiennych zdaniowych występujących w danej formule.

Przykład 1

Wykazać, że formuła

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

jest tautologią.

Rozwiązanie

Zbudujemy tabelę, w której dwóch pierwszych kolumnach zestawimy wszystkie wariacje wartości logicznych zmiennych p i q , zaś w następnych kolumnach ocenimy wartości formuł, będących członami badanej formuły (litera F w tabeli oznacza całą badaną formułę):

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	F
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Ponieważ w ostatniej kolumnie (odpowiadającej badanej formule) wszystkie wartości są równe 1, więc dana formuła jest tautologią.

Przykład 2

Wykazać, że formuła

$$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$$

jest tautologią.

Rozwiązanie

Zbudujemy tabelę, w której trzech pierwszych kolumnach zestawimy wszystkie wariacje wartości logicznych zmiennych p , q i r , zaś w następnych kolumnach ocenimy wartości formuł, będących członami badanej formuły (litera F w tabeli oznacza całą badaną formułę):

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	F
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Ponieważ w ostatniej kolumnie (odpowiadającej badanej formule) wszystkie wartości są równe 1, więc dana formuła jest tautologią.

Uwaga. Formułę z przykładu 2 nazywamy **prawem łączności alternatywy**.

Prawa de Morgana

Przykład 3

Wykazać, że formuła

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

jest tautologią.

Rozwiązanie

Budujemy tabelę:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	F
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Stwierdzamy, że dana formuła jest tautologią.

Uwaga. Formułę z przykładu 3 możemy odczytać następująco: „**Zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń**”. Jest to **pierwsze prawo de Morgana**.

Przykład 4

Wykazać, że formuła

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

jest tautologią.

Rozwiązanie

Tabela:

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	F
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Stwierdzamy, że dana formuła jest tautologią.

Uwaga. Formułę z przykładu 4 możemy odczytać następująco: „**Zaprzeczenie alternatywy jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń**”. Jest to **drugie prawo de Morgana**.

Alternatywa wykluczająca. Wprowadźmy nowy spójnik logiczny o nazwie **albo**, oznaczony symbolem $\underline{\vee}$. Formułę $p \underline{\vee} q$ nazywamy **alternatywą wykluczającą** i odczytujemy: „ p albo q ”.

Wartości logiczne alternatywy wykluczającej określamy za pomocą tabeli:

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Z tabeli tej odczytujemy, że alternatywa wykluczająca jest prawdziwa, gdy dokładnie jeden jej składnik jest prawdziwy. W pozostałych przypadkach alternatywa wykluczająca jest fałszywa.

Przykład 5

Wykazać, że formuła

$$(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$$

jest tautologią.

Rozwiązanie

Tabela:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	F
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1

Dana formuła jest tautologią.

Zadania

Zadanie 1

Wykazać, że dana formuła jest tautologią

- a) $p \vee \sim p$ prawo wyłączonośnego środka (tertium non datur)
 b) $\sim (p \wedge \sim p)$ prawo niesprzeczności

- c) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ idempotentność koniunkcji
 d) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ idempotentność alternatywy
 e) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia
 f) $p \Rightarrow p$
 g) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$ pierwsze prawo Claviusa
 h) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ drugie prawo Claviusa

Zadanie 2

Wykazać, że dana formuła jest tautologią

- a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ przemienność koniunkcji
 b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ przemienność alternatywy
 c) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
 d) $p \Rightarrow (p \vee q)$
 e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$
 f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ kontrapozycja
 g) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$ prawo Pierce'a
 h) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ prawo Duns-Scotusa
 i) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ prawo symplifikacji
 j) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
 k) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
 l) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
 m) $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p$

Zadanie 3

Wykazać, że dana formuła jest tautologią

- a) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ łączność koniunkcji
 b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
 c) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
 d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ przechodność implikacji

- e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ importacja
 f) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ eksportacja
 g) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
 prawo łączenia poprzedników w alternatywę
 h) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$
 prawo łączenia następników w koniunkcję
 i) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
 j) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
 k) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

a)

p	$\sim p$	F
1	0	1
0	1	1

b)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	F
1	0	0	1
0	1	0	1

c)

p	$p \wedge p$	F
1	1	1
0	0	1

d)

p	$p \vee p$	F
1	1	1
0	0	1

e)

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	F
1	0	1	1
0	1	0	1

f)

p	F
1	1
0	1

g)

p	$\sim p$	$p \Rightarrow \sim p$	F
1	0	0	1
0	1	1	1

h)

p	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow p$	F
1	0	1	1
0	1	0	1

Zadanie 2

a)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	F
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

b)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	F
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

c)

p	q	$p \wedge q$	F
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

d)

p	q	$p \vee q$	F
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

e)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$q \vee \sim p$	F
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

f)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	F
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

g)

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	F
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

h)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	F
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

i)

p	q	$q \Rightarrow p$	F
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

j)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	a $p \Rightarrow q$	b $q \Rightarrow p$	$a \wedge b$	F
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

k)

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	F
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1

l)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	F
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

m)

p	q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$p \Rightarrow (q \wedge \sim q)$	$\sim p$	F
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1

Zadanie 3

a)

p	q	r	a $q \wedge r$	b $p \wedge a$	c $p \wedge q$	d $c \wedge r$	F $b \Leftrightarrow d$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

b)

p	q	r	a $q \vee r$	b $p \wedge a$	c $p \wedge q$	d $p \wedge r$	$c \vee d$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

c)

p	q	r	a $q \wedge r$	b $p \vee a$	c $p \vee q$	d $p \vee r$	$c \wedge d$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

d)

p	q	r	a $p \Rightarrow q$	b $q \Rightarrow r$	c $a \wedge b$	d $p \Rightarrow r$	F $c \Rightarrow d$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

e)

p	q	r	a $q \Rightarrow r$	b $p \Rightarrow a$	c $p \wedge q$	$b \vee c$	$b \Rightarrow c$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

f) Skorzystaj z poprzedniej tabeli.

g)

p	q	r	a $p \Rightarrow r$	b $q \Rightarrow r$	c $a \wedge b$	$p \vee q$	$c \Rightarrow r$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

h)

p	q	r	a $p \Rightarrow q$	b $p \Rightarrow r$	c $a \wedge b$	d $q \wedge r$	$p \Rightarrow c$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

Rozdział 3

Reguły wnioskowania

i)

p	q	r	a $p \wedge q$	$a \Rightarrow r$	b $p \Rightarrow r$	c $q \Rightarrow r$	$b \vee c$	F
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

j) Skorzystaj z tabeli g).

k) Skorzystaj z tabeli h).

Matematyka jako nauka dedukcyjna. Nowe pojęcia wprowadzamy do matematyki za pomocą ich *definicji*, czyli *określeń*. W definicjach wyjaśniamy treść nowego pojęcia za pomocą pojęć uprzednio wprowadzonych oraz podajemy nazwę nowego pojęcia.

Przykład 1

„Kwadratem nazywamy prostokąt, którego wszystkie boki są jednakowej długości.” – to zdanie jest definicją kwadratu. W tej definicji użyto pojęć: prostokąt, bok, długość boku. Te pojęcia powinny być wprowadzone przed podaniem definicji kwadratu.

Najprostsze pojęcia (np. punkt, płaszczyzna, zbiór) są używane bez podawania ich definicji. Są to *pojęcia pierwotne*.

Własności zdefiniowanych pojęć oraz związki między nimi formułujemy w *twierdzeniach*. Twierdzenia matematyczne udowadniamy posługując się wcześniej udowodnionymi twierdzeniami oraz *aksjomatami* czyli *pewnnikami*. Aksjomaty są to zdania, które uważamy za prawdziwe bez dowodzenia ich prawdziwości.

Przy dowodzeniu twierdzeń posługujemy się *regułami wnioskowania*.

Reguły wnioskowania. Przystępując do dowodu twierdzenia T (a właściwie zdania, które będziemy mogli nazwać twierdzeniem, gdy zakończymy dowód) dysponujemy pewnym zbiorem zdań $P_1, P_2, \dots, P_n$ uznanych za prawdziwe (mogą to być aksjomaty lub wcześniej udowodnione twierdzenia). Z prawdziwości zdań $P_1, P_2, \dots, P_n$ chcemy wywnioskować prawdziwość zdania T .

Zdania $P_1, P_2, \dots, P_n$ nazywamy *przesłankami*, zaś zdanie T nazywamy *konkluzją* lub *wnioskiem*.

Dowody twierdzeń polegają więc na tym, by z faktu, że przesłanki są prawdziwe, tzn.

$$w(P_1) = w(P_2) = \dots = w(P_n) = 1$$

wywnioskować prawdziwość konkluzji:

$$w(T) = 1.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $P_1, P_2, \dots, P_n, T$ mogą być zmiennymi zdaniowymi lub formułami rachunku zdań, to możemy zbudować schematy zwane **regułami wnioskowania** albo **regułami dowodzenia**.

Reguły wnioskowania zapisujemy w postaci:

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{T}$$

Powyższy zapis rozumiemy następująco: „Jeżeli prawdziwe są przesłanki $P_1, P_2, \dots, P_n$, to można wnioskować, że konkluzja T także jest prawdziwa.”.

Reguła odrywania (modus ponens)

Przykład 2

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w(P) = w(P \Rightarrow Q) = 1$.

W tabeli implikacji (zob. rozdział „Tautologie”) taka sytuacja występuje tylko w pierwszym z czterech wierszy tej tabeli. W tym wierszu odczytujemy, że $w(Q) = 1$.

Uwaga. Reguła z przykładu 2 jest to tzw. **reguła odrywania** czyli **modus ponens**. Zastosowanie tej reguły przedstawimy w przykładzie 3.

Przykład 3

Załóżmy, że prawdziwe są zdania:

„Student otrzymał w teście ponad 20 pkt.”

oraz

„Jeżeli student otrzymał w teście ponad 20 pkt., to student zaliczył przedmiot.”

Te dwa zdania to przesłanki. Wyciągając z tych przesłanek wniosek: „Student zaliczył przedmiot.” zastosowaliśmy regułę odrywania.

Rzeczywiście: przyjmując

P – „Student otrzymał w teście ponad 20 pkt.”,

Q – „Student zaliczył przedmiot.”

zakładaliśmy, że $w(P) = w(P \Rightarrow Q) = 1$ i stąd wywnioskowaliśmy, że $w(Q) = 1$.

Modus tollens

Przykład 4

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{P \Rightarrow Q, \sim Q}{\sim P}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w(P \Rightarrow Q) = w(\sim Q) = 1$.

Z tego, że $w(\sim Q) = 1$ wynika, że $w(Q) = 0$.

W tabeli implikacji jedynym wierszem, w którym $w(Q) = 0$ i $w(P \Rightarrow Q) = 1$ jest wiersz czwarty, z którego odczytujemy, że $w(P) = 0$, zatem (zob. tabela negacji) $w(\sim P) = 1$.

Uwaga. Reguła z przykładu 4 jest to tzw. **modus tollens**. Zastosowanie tej reguły przedstawimy w przykładzie 5.

Przykład 5

Załóżmy, że prawdziwe są zdania:

„Jeżeli student otrzymał w teście ponad 20 pkt., to student zaliczył przedmiot.”

oraz

„Student nie zaliczył przedmiotu.”

Te dwa zdania to przesłanki. Wyciągając z tych przesłanek wniosek: „Student nie otrzymał w teście ponad 20 pkt.” zastosowaliśmy regułę modus tollens.

Rzeczywiście: przyjmując

P – „Student otrzymał w teście ponad 20 pkt.”,

Q – „Student zaliczył przedmiot.”
zakładaliśmy, że $w(P \Rightarrow Q) = w(\sim Q) = 1$ i stąd wywnioskowaliśmy, że $w(\sim P) = 1$.

Sylogizm hipotetyczny

Przykład 6

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w(P \Rightarrow Q) = w(Q \Rightarrow R) = 1$.

Założenie $w(P \Rightarrow Q) = 1$ oznacza, że zachodzi jeden z trzech przypadków:

Przypadek I: $w(P) = 1$ i $w(Q) = 1$. Aby $w(Q \Rightarrow R) = 1$, musi być $w(R) = 1$. Wtedy $w(P \Rightarrow R) = 1$.

Przypadek II: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 1$. Ponieważ $w(P) = 0$, więc dla dowolnego R jest $w(P \Rightarrow R) = 1$.

Przypadek III: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 0$ - jak w przypadku II.

Zatem we wszystkich możliwych przypadkach
 $w(P \Rightarrow R) = 1$.

Uwaga. Reguła z przykładu 6 jest to tzw. **sylogizm hipotetyczny**. Zastosowanie tej reguły przedstawimy w przykładzie 7.

Przykład 7

Założmy, że prawdziwe są zdania:

„Jeżeli student otrzymał w teście ponad 20 pkt., to student zaliczył przedmiot.”

oraz

„Jeżeli student zaliczył przedmiot, to jest dopuszczony do egzaminu.”

Te dwa zdania to przesłanki. Wyciągając z tych przesłanek wniosek: „Jeżeli student otrzymał w teście ponad 20 pkt., to

student jest dopuszczony do egzaminu.” zastosowaliśmy sylogizm hipotetyczny.

Rzeczywiście: przyjmując

P – „Student otrzymał w teście ponad 20 pkt.”,

Q – „Student zaliczył przedmiot.”

R – „Student jest dopuszczony do egzaminu.”

zakładaliśmy, że $w(P \Rightarrow Q) = w(Q \Rightarrow R) = 1$ i stąd wywnioskowaliśmy, że $w(P \Rightarrow R) = 1$.

Sylogizm alternatywny

Przykład 8

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{P \vee Q, \sim P}{Q}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w(P \vee Q) = w(\sim P) = 1$.

Założenie $w(\sim P) = 1$ oznacza, że $w(P) = 0$.

Skoro $w(P) = 0$ i $w(P \vee Q) = 1$, to musi być $w(Q) = 1$.

Uwaga. Reguła z przykładu 8 jest to tzw. **sylogizm alternatywny**. Zastosowanie tej reguły przedstawimy w przykładzie 9.

Przykład 9

Założmy, że prawdziwe są zdania:

„Student otrzymał z egzaminu ocenę 4 lub ocenę 5.”

oraz

„Nieprawda, że student otrzymał z egzaminu ocenę 4”

Te dwa zdania to przesłanki. Wyciągając z tych przesłanek wniosek: „Student otrzymał z egzaminu ocenę 5.” zastosowaliśmy sylogizm alternatywny.

Rzeczywiście: przyjmując

P – „Student otrzymał z egzaminu ocenę 4.”,

Q – „Student otrzymał z egzaminu ocenę 5.”,

zakładaliśmy, że $w(P \vee Q) = w(\sim P) = 1$ i stąd wywnioskowaliśmy, że $w(Q) = 1$.

Dowód niewprost

Przykład 10

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)}{P \Rightarrow Q}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w((P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)) = 1$.

Ponieważ dla każdego R mamy: $w(R \wedge \sim R) = 0$, więc – aby implikacja $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)$ miała wartość logiczną 1 – musi być: $w((P \wedge \sim Q)) = 0$. Taka sytuacja ma miejsce w dokładnie trzech przypadkach:

Przypadek I: $w(P) = 1$ i $w(Q) = 1$

Przypadek II: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 1$

Przypadek III: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 0$

W każdym z powyższych przypadków $w(P \Rightarrow Q) = 1$.

(Sprawdź!).

Uwaga. Reguła z przykładu 10 jest to tzw. **dowód niewprost**. Niekiedy przez dowód niewprost rozumie się regułę:

$$\frac{(P \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q}$$

Przykład 11

Sprawdzić, że schemat

$$\frac{(P \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q}$$

jest regułą wnioskowania.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $w((P \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P) = 1$.

Taka sytuacja ma miejsce w dokładnie trzech przypadkach:

Przypadek I: $w(P) = 1$ i $w(Q) = 1$

Przypadek II: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 1$

Przypadek III: $w(P) = 0$ i $w(Q) = 0$

(Sprawdź samodzielnie!) W każdym z powyższych przypadków $w(P \Rightarrow Q) = 1$. (Sprawdź!).

Inne reguły wnioskowania. Na koniec podamy kilka innych reguł wnioskowania:

$$\frac{P \Rightarrow Q, \sim P \Rightarrow Q}{Q}$$

dylemat konstrukcyjny

$$\frac{P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \sim Q}{\sim P}$$

dylemat destrukcyjny

$$\frac{P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S}{(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)}$$

prawo kompozycji dla koniunkcji

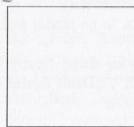
$$\frac{P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S}{(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)}$$

prawo kompozycji dla alternatywy

Kwadrat logiczny. Kolejną serię reguł wnioskowania łatwo zapamiętać korzystając z następującego schematu zwanego **kwadratem logicznym**:

Implikacja prosta
 $P \Rightarrow Q$

Implikacja odwrotna
 $Q \Rightarrow P$



$\sim P \Rightarrow \sim Q$

Implikacja przeciwna

$\sim Q \Rightarrow \sim P$

Implikacja przeciwstawna

Reguła kwadratu logicznego brzmi: Aby udowodnić dowolną z powyższych implikacji, wystarczy udowodnić dowolne dwie z pozostałych implikacji, położone przy sąsiadujących ze sobą wierzchołkach kwadratu logicznego, np.:

$$\frac{P \Rightarrow Q, \sim P \Rightarrow \sim Q}{Q \Rightarrow P}, \quad \frac{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P}{\sim Q \Rightarrow \sim P}, \quad \frac{Q \Rightarrow P, \sim Q \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q} \text{ itd.}$$

Zadania

Zadanie 1

Stosując regułę odrywania (modus ponens) wyciągnij wniosek z podanych przesłanek

- „Jest ujemna temperatura.”, „Jeżeli jest ujemna temperatura, to woda zamarza.”
- „Wygrałem główną nagrodę w toto-lotku.”, „Jeżeli wygrałem główną nagrodę w toto-lotku, to jestem bogaty.”
- „Pada deszcz.”, „Jeżeli pada deszcz, to na jezdni stoi woda.”
- „Ostatnią cyfrą danej liczby jest 0.”, „Jeżeli ostatnią cyfrą danej liczby jest 0, to ta liczba dzieli się przez 10.”

Zadanie 2

Stosując regułę modus tollens wyciągnij wniosek z podanych przesłanek

- „Jeżeli jest ujemna temperatura, to woda zamarza.”, „Woda nie zamarza.”
- „Jeżeli wygrałem główną nagrodę w toto-lotku, to jestem bogaty.”, „Nie jestem bogaty.”
- „Jeżeli pada deszcz, to na jezdni stoi woda.”, „Na jezdni nie stoi woda.”
- „Jeżeli ostatnią cyfrą danej liczby jest 0, to ta liczba dzieli się przez 10.”, „Dana liczba nie dzieli się przez 10.”

Zadanie 3

Stosując sylogizm hipotetyczny wyciągnij wniosek z podanych przesłanek

- „Jeżeli jest ujemna temperatura, to woda w stawie zamarza.”, „Jeżeli woda w stawie zamarza, to rybom brakuje tlenu.”
- „Jeżeli wygram główną nagrodę w toto-lotku, to będę bogaty.”, „Jeżeli będę bogaty, to kupię mercedesa.”
- „Jeżeli pada deszcz, to na jezdni stoi woda.”, „Jeżeli na jezdni stoi woda, to można wpaść w poślizg.”
- „Jeżeli ostatnią cyfrą danej liczby jest 0, to ta liczba dzieli się przez 10.”, „Jeżeli dana liczba dzieli się przez 10, to jest liczbą parzystą.”

Zadanie 4

Stosując sylogizm alternatywny wyciągnij wniosek z podanych przesłanek

- „Pada deszcz lub pada śnieg.”, „Nie pada deszcz.”
- „Wygram w toto-lotka lub muszę iść do pracy.”, „Nie wygrałem w toto-lotka.”
- „Na wakacje pojadę do Honolulu albo do Pcimia.”, „Nie pojadę na wakacje do Honolulu.”
- „Na tablicy jest napisana cyfra 0 lub litera O.”, „Na tablicy nie jest napisana litera O.”

Zadanie 5

Którą z reguł wnioskowania zastosowano wyciągając wniosek z podanych przesłanek?

- Przesłanki: „Jeżeli pada śnieg, to lepimy bałwana.”, „Jeżeli lepimy bałwana, to z szafy znika jeden kapelusz.”
Wniosek: „Jeżeli pada śnieg, to z szafy znika jeden kapelusz.”
- Przesłanki: „Jeżeli liczba x jest nieparzysta, to liczba $x+1$ jest parzysta.”, „Liczba $x+1$ jest nieparzysta.”
Wniosek: „Liczba x jest parzysta.”
- Przesłanki: „Będę logikiem lub informatykiem.”, „Nie będę logikiem.” Wniosek: „Będę informatykiem.”
- Przesłanki: „Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to ten czworokąt jest rombem.”, „Jeżeli czworokąt jest rombem, to ten czworokąt jest równoległobokiem.” Wniosek:

„Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to ten czworokąt jest równoległobokiem.”

- e) Przesłanki: „Pada śnieg.”, „Jeżeli pada śnieg, to lepimy bałwana.”. Wniosek: „Lepimy bałwana.”
- f) Przesłanki: „Jeżeli pracowałem systematycznie, to zdam egzamin.”, „Nie zdałem egzaminu.” Wniosek: „Nie pracowałem systematycznie.”
- g) Przesłanki: „Zdam egzamin z logiki lub będę miał nieciekawe wakacje.”, „Nie zdałem egzaminu z logiki.” Wniosek: „Będę miał nieciekawe wakacje.”
- h) Przesłanki: „Liczba x jest nieparzysta.”, „Jeżeli liczba x jest nieparzysta, to liczba $x+1$ jest parzysta.” Wniosek: „Liczba $x+1$ jest parzysta.”

Zadanie 6

Wypisać wszystkie reguły wnioskowania wynikające z kwadratu logicznego.

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- a) „Woda zamarzła.”
- b) „Jestem bogaty.”
- c) „Na jezdni stoi woda.”
- d) „Dana liczba dzieli się przez 10.”

Zadanie 2

- a) „Nie ma ujemnej temperatury.”
- b) „Nie wygrałem głównej nagrody w toto-lotku.”
- c) „Nie pada deszcz.”
- d) „Ostatnią cyfrą danej liczby nie jest 0.”

Zadanie 3

- a) „Jeżeli jest ujemna temperatura, to rybom brakuje tlenu.”
- b) „Jeżeli wygram główną nagrodę w toto-lotku, to kupię mercedesa.”
- c) „Jeżeli pada deszcz, to można wpaść w poślizg.”
- d) „Jeżeli ostatnią cyfrą danej liczby jest 0, to ta liczba jest liczbą parzystą.”

Zadanie 4

- a) „Pada śnieg.”
- b) „Muszę iść do pracy.”
- c) „Na wakacje pojadę do Pcimia.”
- d) „Na tablicy jest napisana liczba 0.”

Zadanie 5

- a), d) – sylogizm hipotetyczny,
- b), f) – modus tollens,
- c), g) – sylogizm alternatywny,
- e), h) – modus ponens

Zadanie 6

Oprócz trzech reguł wypisanych pod schematem kwadratu logicznego (w tekście rozdziału) są to:

$$\begin{array}{l}
 \frac{P \Rightarrow Q, \sim P \Rightarrow \sim Q}{\sim Q \Rightarrow \sim P} \qquad \frac{\sim P \Rightarrow \sim Q, \sim Q \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q} \\
 \frac{\sim P \Rightarrow \sim Q, \sim Q \Rightarrow \sim P}{Q \Rightarrow P} \qquad \frac{Q \Rightarrow P, \sim Q \Rightarrow \sim P}{\sim P \Rightarrow \sim Q} \\
 \frac{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P}{\sim P \Rightarrow \sim Q}
 \end{array}$$

Rozdział 4

Zbiory

Zbiór, element zbioru. Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym. Przypomnijmy, że oznacza to, iż będziemy używać tego pojęcia bez podawania jego definicji. Obiekty, które należą do pewnego zbioru nazywamy **elementami** tego zbioru. Pojęcie elementu zbioru też jest pojęciem pierwotnym. Zbiory będziemy oznaczać wielkimi literami, a elementy zbioru będziemy oznaczać małymi literami.

Zdanie orzekające: „*Element a należy do zbioru A* ” zapisujemy:

$$a \in A$$

Zdanie to możemy też odczytać: „ *a jest elementem zbioru A* ”. Zaprzeczenie tego zdania, tzn. zdanie „element a nie należy do zbioru A ” lub inaczej „ a nie jest elementem zbioru A ” zapisujemy:

$$a \notin A$$

Dział matematyki badający zbiory nazywamy **teorią mnogości**. Podstawy teorii mnogości stworzył niemiecki matematyk Georg Cantor w latach 1871-1883.

Sposoby określania zbiorów. Zbiór możemy określić wymieniając wszystkie jego elementy. Elementy te wypisujemy w nawiasach klamrowych $\{ \}$, oddzielając je przecinkami.

Przykład 1

Zbiór, którego elementami są litery: a, b, c, d zapiszemy:

$$\{a, b, c, d\}$$

Jeżeli ten zbiór oznaczmy literą A , to napiszemy:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Innym sposobem określania zbioru jest podanie warunku, jaki spełniają elementy tego zbioru (i tylko one) np. „ A jest zbiorem państw mających dostęp do Morza Bałtyckiego”. O każdym przedmiocie możemy orzec, czy należy do zbioru A , np.: Polska należy do zbioru A , bo ma dostęp do Morza Bałtyckiego, Czechy

nie należą do zbioru A , bo nie mają dostępu do Morza Bałtyckiego, Warszawa nie jest elementem zbioru A , bo nie jest państwem.

Równość zbiorów. Dwa zbiory są równe, gdy mają te same elementy. Powyższą umowę nazywamy **zasadą ekstensjonalności**.

Przykład 2

- Zbiory $\{a, b, c, d\}$ oraz $\{c, b, d, a\}$ są równe, bo mają te same elementy. Możemy napisać:
 $\{a, b, c, d\} = \{c, b, d, a\}$.
- Zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{a, a, b, b, b\}$ są równe, bo mają te same elementy. Możemy napisać: $\{a, b\} = \{a, a, b, b, b\}$.

Zbiór pusty. Zbiór, do którego nie należy żaden element nazywamy **zbiorem pustym**. Z zasady ekstensjonalności wynika, że istnieje tylko jeden taki zbiór. Oznaczamy go symbolem $\emptyset$.

Zbiory liczbowe. Zbiory, których elementami są liczby nazywamy zbiorami liczbowymi. Niektóre z tych zbiorów oznaczamy w specjalny sposób.

Zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ oznaczamy literą N . Kropki ... odczytujemy „itd.”. W niektórych podręcznikach do liczb naturalnych jest też zaliczane zero. W tym podręczniku przyjęto umowę, że zero nie jest liczbą naturalną.

Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą Z . Elementami zbioru liczb całkowitych są wszystkie liczby naturalne, wszystkie liczby przeciwne do liczb naturalnych (tzn. $-1, -2, -3, \dots$) oraz liczba zero.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą Q . Elementami zbioru liczb wymiernych są wszystkie liczby, które można przedstawić w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, zaś n jest liczbą naturalną. Przykłady:

$$\frac{3}{4} \in Q \quad (m=3, n=4),$$

$$0,7 \in Q \quad \text{ponieważ } 0,7 = \frac{7}{10} \quad (m=7, n=10),$$

$$-5 \in \mathbb{Q} \text{ ponieważ } -5 = \frac{-5}{1} \quad (m = -5, n = 1),$$

$$0 \in \mathbb{Q} \text{ ponieważ } 0 = \frac{0}{1} \quad (m = 0, n = 1),$$

$$\sqrt{9} \in \mathbb{Q} \text{ ponieważ } \sqrt{9} = \frac{3}{1} \quad (m = 3, n = 1).$$

Zbiór liczb niewymiernych jest to zbiór, którego elementami są wszystkie liczby nie dające się przedstawić w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, zaś n jest liczbą naturalną.

Ponieważ warunek ten jest negacją warunku występującego w określeniu liczby wymiernej, więc nie ma potrzeby wprowadzania symbolu literowego dla zbioru liczb niewymiernych. Jeżeli chcemy napisać, że x jest liczbą niewymierną, to piszemy: $x \notin \mathbb{Q}$. Przykłady:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}, \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy literą R . Elementami zbioru liczb rzeczywistych są wszystkie liczby wymierne oraz wszystkie liczby niewymierne.

Dla dalszych określeń przyjmijmy że a oraz b oznaczają liczby rzeczywiste takie, że $a < b$.

Przedział otwarty oznaczamy symbolem $(a; b)$. Jest to zbiór tych liczb rzeczywistych, które są jednocześnie większe od a i mniejsze od b . Powyższe określenie zapisujemy następująco:

$$(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

Przedział domknięty oznaczamy symbolem $<a; b>$. Jest to zbiór tych liczb rzeczywistych, które są większe od a lub równe a i jednocześnie są mniejsze od b lub równe b . Powyższe określenie zapisujemy następująco:

$$<a; b> = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

Przedział lewostronnie domknięty oznaczamy symbolem $<a; b]$. Jest to zbiór tych liczb rzeczywistych, które są większe od a lub

równe a i jednocześnie są mniejsze od b . Powyższe określenie zapisujemy następująco:

$$<a; b] = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

Przedział prawostronnie domknięty oznaczamy symbolem $[a; b>$. Jest to zbiór tych liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie są mniejsze od b lub równe b . Powyższe określenie zapisujemy następująco:

$$[a; b> = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

Ponadto rozpatruje się **przedziały nieograniczone**. Ich określenia podamy tylko w zapisie symbolicznym:

$$(a; \infty) = \{x \in R : a < x\}$$

$$<a; \infty) = \{x \in R : a \leq x\}$$

$$(-\infty; a) = \{x \in R : x < a\}$$

$$(-\infty; a] = \{x \in R : x \leq a\}$$

Podzbiory. Mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B (albo inaczej: zbiór A zawiera się w zbiorze B), gdy każdy element zbioru A jest także elementem zbioru B . Piszemy: $A \subset B$.

Przykład 2

$$a) N \subset Z, N \subset \mathbb{Q}, N \subset R, Z \subset \mathbb{Q}, Z \subset R, \mathbb{Q} \subset R.$$

$$b) (a; b) \subset <a; b), <a; b) \subset [a; b>$$

$$c) \text{ Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru: } \emptyset \subset A \text{ dla dowolnego } A.$$

Następująca równoważność wyraża związek między zawieraniem się zbiorów i równością zbiorów:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$

Uzasadnienie. Prawa strona powyższej równoważności oznacza, że każdy element zbioru A jest także elementem zbioru B i odwrotnie: każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A . Oznacza to, że zbiory A i B mają te same elementy, więc są to zbiory równe. Zatem: z prawej strony równoważności wynika lewa strona.

Załóżmy teraz, że $A = B$. Zbiory A i B mają te same elementy, zatem: każdy element zbioru A jest także elementem

zbioru B i każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A , co oznacza prawdziwość strony prawej. Wykazaliśmy, że z prawej strony wynika lewa i odwrotnie. Oznacza to, że lewa i prawa strona są faktycznie równoważne (zob. zad. 3f rozdz. „Tautologie”).

Część wspólna zbiorów. Częścią wspólną czyli iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B . Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy:

$$A \cap B$$

Zatem:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Przykład 3

- Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \cap B = \{b, c\}$.
- Jeżeli $A = \{-3, 2, 0, 5, \pi\}$, to $A \cap \mathbb{N} = \{2, 5\}$.
- Jeżeli $A = \{-3, 2, 0, 5, \pi\}$, to $A \cap \mathbb{Z} = \{-3, 2, 0, 5\}$.
- $(1; 5) \cap (-2; 7) = (-2; 5)$
- $(1; 5) \cap \mathbb{N} = \{2, 3, 4\}$
- $(1; 5) \cap (7; 9) = \emptyset$
- $\emptyset \cap A = \emptyset$ dla dowolnego zbioru A .

Zbiory, których część wspólna jest zbiorem pustym nazywamy *zbiorami rozłącznymi*.

Suma zbiorów. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy:

$$A \cup B$$

Zatem:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Przykład 4

- Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- $(1; 5) \cup (-2; 7) = (-2; 7)$
- $\{2\} \cup (2; 4) = (2; 4)$

- $\{2, 4\} \cup (2; 4) = (-2; 4)$
- $(-\infty; 0) \cup (0; \infty) = \mathbb{R}$
- $\emptyset \cup A = A$ dla dowolnego zbioru A .

Różnica zbiorów. Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy:

$$A \setminus B \quad \text{lub} \quad A - B$$

Zatem:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Przykład 5

- Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \setminus B = \{a, d\}$.
- $(1; 5) \setminus (-2; 7) = (1; 2)$
- $(-2; 7) \setminus (1; 5) = (-2; 1)$
- $(-2; 7) \setminus \{2\} = (-2; 2) \cup (2; 7)$
- $(2; 4) \setminus (7; 8) = (2; 4)$
- $(2; 4) \setminus (1; 8) = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$ dla dowolnego zbioru A .
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$ dla dowolnego zbioru A .

Własności działań na zbiorach. Wyznaczanie części wspólnej, sumy i różnicy zbiorów nazywamy wykonywaniem działań na tych zbiorach. Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące równości wyrażające własności działań na zbiorach.

- $A \cap B = B \cap A$ przemienność iloczynu zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$ łączność iloczynu zbiorów
- $A \cup B = B \cup A$ przemienność sumy zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B$ łączność sumy zbiorów
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ rozdzielność iloczynu zbiorów względem sumy zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ rozdzielność sumy zbiorów względem iloczynu zbiorów

Udowodnimy przykładowo dwie z tych własności:

Dowód własności a)

Z określenia części wspólnej: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Z przemienności koniunkcji (zad.2a, rozdz. „Tautologie”) wynika, że $\{x: x \in A \wedge x \in B\} = \{x: x \in B \wedge x \in A\}$. Ostatni zbiór jest określeniem części wspólnej $B \cap A$. Zatem: $A \cap B = B \cap A$.

Uwaga. Dowody twierdzeń, w których występują wyłącznie symbole zbiorów, spójniki logiczne i symbole $=, \subset, \cap, \cup, \setminus$ można przeprowadzać w następujący sposób:

1. Każdy symbol zbioru zamieniamy na symbol zmiennej zdaniowej
 2. Symbol $=$ zamieniamy na symbol $\Leftrightarrow$, symbol $\subset$ na $\Rightarrow$, symbol $\cap$ na $\wedge$, symbol $\cup$ na $\vee$, zaś symbol $\setminus$ na dwa symbole $\wedge \sim$.
 3. Sprawdzamy, czy otrzymana formuła jest tautologią.
- Na przykład na dowodzie własności a) po wykonaniu czynności 1 i 2 otrzymamy formułę $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, czyli przemienność koniunkcji, która jest tautologią.

Dowód własności e)

Po wykonaniu czynności 1 i 2 otrzymamy formułę:

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Jest to tautologia zwana rozdzielnością koniunkcji względem alternatywy (zob. zad.3b rozdz. „Tautologie”).

Ćwiczenie. Udowodnić samodzielnie pozostałe cztery własności.

Następujące twierdzenia wyrażają związki działań na zbiorach z zawieraniem się zbiorów:

- a) Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$
- b) Jeżeli $A \subset B$, to $A \cup B = B$
- c) Jeżeli $A \subset B$, to $A \setminus B = \emptyset$

Udowodnimy przykładowo dwa z tych twierdzeń:

Dowód twierdzenia a)

Budujemy odpowiednią formułę F rachunku zdań:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow p)$$

Sprawdzamy, czy jest ona tautologią:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$	F
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Formuła F jest tautologią, co kończy dowód.

Ćwiczenie. Udowodnić samodzielnie twierdzenie b).

Dowód twierdzenia c)

Założmy, że $A \subset B$ i $A \setminus B \neq \emptyset$.

Zbiór, który nie jest pusty ma przynajmniej jeden element. Oznaczmy ten element literą x . Mamy: $x \in A \setminus B$, tzn. $x \in A$ i $x \notin B$. Z założenia $A \subset B$ wynika, że jeżeli $x \in A$ to $x \in B$. Otrzymaliśmy dwa zdania wykluczające się: $x \in B$ i $x \notin B$, zatem założenie, że $A \setminus B \neq \emptyset$ jest fałszywe, więc $A \setminus B = \emptyset$.

Uwaga. Powyższy dowód został przeprowadzony w oparciu o regułę wnioskowania niewprost. Przypomnijmy (zob. rozdz. „Reguły wnioskowania”), że jest to reguła

$$\frac{(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)}{P \Rightarrow Q},$$

w której przyjęto:

P – zdanie $A \subset B$

Q – zdanie $A \setminus B \neq \emptyset$

R – zdanie $x \in B$

Najpierw pokazaliśmy, że ze zdania $P \wedge \sim Q$ wynika zdanie $R \wedge \sim R$. Zgodnie z regułą dowodu niewprost pozwala to na sformułowanie wniosku $P \Rightarrow Q$, będącego treścią twierdzenia c).

Dopełnienie zbioru. Jeżeli rozważamy zbiory będące podzbiorem jednego, ustalonego zbioru X , to zbiór X nazywamy *przestrzenią*. Jeżeli zbiór X jest dla zbioru A przestrzenią, to zbiór $X \setminus A$ na-

zywamy **dopełnieniem zbioru** A (do przestrzeni X) i oznaczamy symbolem A' .

Dla dowolnego zbioru A zawierającego się w przestrzeni X prawdziwe są następujące równości:

$$a) A \cap A' = \emptyset \quad b) A \cup A' = X$$

Dowód równości a) metodą nieprost:

Załóżmy, że $A \subset X$ i $A \cap A' \neq \emptyset$. Niech $x \in A \cap A'$. Wówczas $x \in A \wedge x \in A'$. Skoro $x \in A'$, to $x \in X \setminus A$, więc $x \notin A$. Jest to sprzeczne z faktem: $x \in A$. Zgodnie z regułą wnioskowania nieprost wnioskujemy, że jeżeli $A \subset X$, to $A \cap A' = \emptyset$, co należało udowodnić.

Ćwiczenie. Udowodnić samodzielnie równość b).

Wskazówka. Wykazać, że $A \cup A' \subset X$ i że $X \subset A \cup A'$.

Iloczyn kartezjański zbiorów. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych¹ (a, b) , w których pierwszy wyraz $a \in A$, zaś drugi wyraz $b \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Zatem:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Przykład 6

Dane są zbiory $A = \{a, b\}$ oraz $B = \{1, 2, 3\}$. Wyznamy iloczyn kartezjański zbiorów A i B . Tworzymy wszystkie pary, w których pierwszym wyrazem jest a lub b , zaś drugim wyrazem jest 1, 2 lub 3:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Wyznamy teraz iloczyn kartezjański zbiorów B i A . Tworzymy wszystkie pary, w których pierwszym wyrazem jest 1, 2 lub 3, zaś drugim wyrazem jest a lub b :

¹ Para uporządkowana (a, b) jest to zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Ta definicja pochodzi od Kazimierza Kuratowskiego (1921). Wynika z niej m.in., że para (a, b) nie jest równa parze (b, a) o ile $a \neq b$, tzn. kolejność wyrazów w parze uporządkowanej jest istotna.

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące równości.

$$\begin{aligned} a) A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) && \text{rozdzielność iloczynu} \\ &&& \text{kartezjańskiego względem części wspólnej zbiorów} \\ b) A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) && \text{rozdzielność iloczynu} \\ &&& \text{kartezjańskiego względem sumy zbiorów} \end{aligned}$$

Dowód równości a)

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x, y) : x \in A \wedge y \in (B \cap C)\} = \\ &= \{(x, y) : x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) : (x \in A \wedge y \in B) \wedge y \in C\} = \\ &= \{(x, y) : (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} \cap \{(x, y) : x \in A \wedge y \in C\} = \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Ćwiczenie. Udowodnij samodzielnie równość b)

Zadania

Zadanie 1

Z ilu elementów składa się zbiór

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $\{x : x \in N \wedge x < 7\}$ | b) $\{x : x \in N \wedge x^2 < 7\}$ |
| c) $\{x : x \in Z \wedge x < 7\}$ | d) $\{x : x \in Z \wedge x^2 < 7\}$ |
| e) $\{x : x \in Z \wedge x^2 = 7\}$ | f) $\{x : x \in Z \wedge x^2 = 9\}$ |
| g) $\emptyset$ | h) $\{\emptyset\}$ |
| i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | j) $\{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$ |

Zadanie 2

Wypisać wszystkie relacje zawierania między zbiorami:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, g\}, \quad B = \{e, f, h\}, \quad C = \{a, d, f\}, \\ D &= \{c, g\}, \quad E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad G = \{a\} \end{aligned}$$

Zadanie 3

Wypisać wszystkie podzbiory zbioru

- a) $\{a\}$ b) $\{a, b\}$ c) $\{a, b, c\}$ d) $\{a, b, c, d\}$

Zadanie 4

Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są związki:

- a) $A \subset A$
b) $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

Zadanie 5

Dane są zbiory: A – zbiór prostokątów, B – zbiór rombów, C – zbiór czworokątów, D – zbiór kwadratów, E – zbiór wielokątów, F – zbiór równoległokątów. Wypisać wszystkie relacje zawierania między tymi zbiorami.

Zadanie 6

Dane są zbiory: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i, j\}$, $C = \{b, c, d, e, f\}$, $D = \{i, j, k\}$. Wyznaczyć zbiory:

- a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$
b) $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$
c) $A \cap D$, $A \cup D$, $A \setminus D$, $D \setminus A$
d) $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$
e) $B \cap D$, $B \cup D$, $B \setminus D$, $D \setminus B$
f) $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$

Zadanie 7

Dane są przedziały: $A = \langle 2; 5 \rangle$, $B = (1; 4)$, $C = (3; 7 \rangle$, $D = \langle 1; 2)$. Wyznaczyć zbiory:

- a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$
b) $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$
c) $A \cap D$, $A \cup D$, $A \setminus D$, $D \setminus A$
d) $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$
e) $B \cap D$, $B \cup D$, $B \setminus D$, $D \setminus B$

- f) $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$

Zadanie 8

Wyznaczyć zbiory

- a) $N \cap \langle 3; 6 \rangle$ b) $N \cap \langle -3; 2 \rangle$
c) $Z \cap \langle -3; 2 \rangle$ d) $N \setminus (0; 12)$
e) $\langle 2; 4 \rangle \setminus N$ f) $(3; 4) \setminus N$

Zadanie 9

Sprawdzić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwa jest równość

- a) $A \cup (A \cap B) = A$
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Zadanie 10

Sprawdzić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C

- a) Jeżeli $A = A \cap B$, to $A \subset B$.
b) Jeżeli $A = A \cup B$, to $B \subset A$.
c) Jeżeli $A \subset B$, to $C \setminus B \subset C \setminus A$.
d) Jeżeli $A \setminus B = B \setminus A$, to $A = B$.
e) Jeżeli $A \subset B$, to $B = A \cup (B \setminus A)$.
f) Jeżeli $B = A \cup (B \setminus A)$, to $A \subset B$.

Zadanie 11

Dane są zbiory $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{b, c, d\}$. Wyznaczyć zbiory

- a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times C$ d) $C \times A$
e) $B \times C$ f) $C \times B$ g) $A \times A$ h) $B \times B$
i) $C \times C$

Zadanie 12

W układzie współrzędnych Oxy zaznaczyć zbiór A na osi Ox , zbiór B na osi Oy , a następnie na płaszczyźnie Oxy wyznaczyć zbiór $A \times B$.

- a) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle 2; 4 \rangle$ b) $A = \{1; 3\}$, $B = \{2; 4\}$
 c) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \{2; 4\}$ d) $A = \{2\}$, $B = \langle 2; 4 \rangle$
 e) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \{2; 4\}$ f) $A = \{1; 3\}$, $B = \{2; 4\}$
 g) $A = \{2\}$, $B = \{1; \infty\}$ h) $A = \{2\}$, $B = R$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- a) 6, b) 2, c) nieskończenie wiele, d) 5, e) 0, f) 2,
 g) 0, h) 1, i) 2, j) 1

Zadanie 2

$A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D \subset E$, $G \subset E$, $D \subset A$, $G \subset A$, $G \subset C$

Zadanie 3

- a) $\emptyset$, $\{a\}$ b) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
 c) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$
 d) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$,
 $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$

Zadanie 4

- a) Zdanie „Jeżeli a jest elementem zbioru A , to a jest elementem zbioru A ” ma postać $p \Rightarrow p$. Jest to tautologia (zad.1f, rozdz. „Tautologie”).
 b) Skorzystać z przechodniości implikacji (zad.3d, rozdz. „Tautologie”).

Zadanie 5

$D \subset A \subset F \subset C \subset E$, $D \subset B \subset F$ (z tego wynika, że także $D \subset F$, $D \subset C$, $D \subset E$, $A \subset E$ itd.)

Zadanie 6

- a) $A \cap B = \{d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$,
 $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{f, g, h, i, j\}$
 b) $A \cap C = \{b, c, d, e\}$, $A \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$
 $A \setminus C = \{a\}$, $C \setminus A = \{f\}$

- c) $A \cap D = \emptyset$, $A \cup D = \{a, b, c, d, e, i, j, k\}$,
 $A \setminus D = A$, $D \setminus A = D$
 d) $B \cap C = \{d, e, f\}$, $B \cup C = \{b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$,
 $B \setminus C = \{g, h, i, j\}$, $C \setminus B = \{b, c\}$
 e) $B \cap D = \{i, j\}$, $B \cup D = \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$,
 $B \setminus D = \{d, e, f, g, h\}$, $D \setminus B = \{k\}$
 f) $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = \{b, c, d, e, f, i, j, k\}$,
 $C \setminus D = C$, $D \setminus C = D$

Zadanie 7

- a) $A \cap B = \langle 2; 4 \rangle$, $A \cup B = \{1; 5 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 4; 5 \rangle$, $B \setminus A = \{1; 2\}$
 b) $A \cap C = \{3; 5 \rangle$, $A \cup C = \langle 2; 7 \rangle$
 $A \setminus C = \langle 2; 3 \rangle$, $C \setminus A = \{5; 7 \rangle$
 c) $A \cap D = \emptyset$, $A \cup D = \langle 1; 5 \rangle$, $A \setminus D = A$, $D \setminus A = D$
 d) $B \cap C = \{3; 4\}$, $B \cup C = \{1; 7 \rangle$,
 $B \setminus C = \{1; 3 \rangle$, $C \setminus B = \langle 4; 7 \rangle$
 e) $B \cap D = \{1; 2\}$, $B \cup D = \langle 1; 4 \rangle$
 $B \setminus D = \langle 2; 4 \rangle$, $D \setminus B = \{1\}$
 f) $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = \langle 1; 2 \rangle \cup \{3; 7 \rangle$,
 $C \setminus D = C$, $D \setminus C = D$

Zadanie 8

- a) $\{3, 4, 5\}$ b) $\{1\}$ c) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$
 d) $\{12, 13, 14, \dots\}$ e) $(2; 3) \cup (3; 4)$ f) $(3; 4)$

Zadanie 9

Wystarczy sprawdzić, że poniższe formuły są tautologiami

- a) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$
 b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge \sim r)]$
 c) $[(p \vee q) \wedge \sim r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim r)]$
 d) $[(p \wedge \sim q) \wedge \sim r] \Leftrightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)]$
 e) $[p \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)]$

Zadanie 10

Wystarczy sprawdzić, że poniższe formuły są tautologiami

- a) $[p \Leftrightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

- b) $[p \Leftrightarrow (p \vee q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim p)]$
- d) $[(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (q \wedge \sim p)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
- e) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \sim p))]$
- f) $\{q \Leftrightarrow [p \vee (q \wedge \sim p)]\} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Zadanie 11

- a) $\{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$
- b) $\{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b)\}$
- c) $\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$
- d) $\{(b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$
- e) $\{(a, b), (a, c), (a, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$
- f) $\{(b, a), (b, c), (c, a), (c, c), (d, a), (d, c)\}$
- g) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
- h) $\{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$
- i) $\{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

Zadanie 12

- a) Kwadrat o wierzchołkach (1,2), (1,4), (3,2), (3,4) wraz z brzegiem.
- b) Kwadrat o wierzchołkach (1,2), (1,4), (3,2), (3,4) bez brzegu.
- c) Kwadrat o wierzchołkach (1,2), (1,4), (3,2), (3,4); boki równoległe do osi Ox nie należą do zbioru, a boki równoległe do osi Oy należą do zbioru. Wierzchołki nie należą do zbioru.
- d) Odcinek o końcach (2,2) i (2,4).
- e) Dwa odcinki: jeden o końcach (1,2) i (3,2), drugi o końcach (1,4) i (3,4).
- f) Cztery punkty: (1,2), (1,4), (3,2), (3,4)
- g) Półprosta o początku (2,1) przechodząca przez punkt (2,2).
- h) Prosta o równaniu $x = 2$.

Rozdział 5

Funkcje zdaniowe

Funkcja zdaniowa jest to wyrażenie zawierające zmienne, które staje się zdaniem (prawdziwym bądź fałszywym), gdy za te zmienne podstawimy konkretne elementy. Podając funkcję zdaniową należy także wskazać zbiory, z których możemy czerpać te elementy. Zbiory te nazywamy **zakresami zmienności** poszczególnych zmiennych.

Przykład 1

W zapisie:

$$x^2 - 5 > 0, x \in N$$

wyrażenie $x^2 - 5 > 0$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej x . Napis $x \in N$ oznacza, że do tej funkcji zdaniowej będziemy podstawiać w miejsce zmiennej x tylko liczby naturalne (tzn. zakresem zmienności zmiennej x jest zbiór N). Jeżeli przykładowo podstawimy $x = 3$, to otrzymamy zdanie prawdziwe: $4 > 0$. Jeżeli podstawimy np. $x = 2$, to otrzymamy zdanie fałszywe: $-1 > 0$.

Przykład 2

W zapisie:

$$x^2 - y > 0, x \in R, y \in Z$$

wyrażenie $x^2 - y > 0$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych: x i y . Napis $x \in R, y \in Z$ oznacza, że do tej funkcji zdaniowej będziemy podstawiać w miejsce zmiennej x dowolne liczby rzeczywiste, zaś w miejsce zmiennej y tylko liczby całkowite (zakresem zmienności zmiennej x jest zbiór R , a zakresem zmienności zmiennej y jest zbiór Z).

Jeżeli przykładowo podstawimy $x = \sqrt{3}, y = 2$, to otrzymamy zdanie prawdziwe: $1 > 0$. Jeżeli podstawimy np. $x = \sqrt{3}, y = 3$, to otrzymamy zdanie fałszywe: $0 > 0$.

Umowa. Mówiąc „funkcja zdaniowa” będziemy mieli na myśli odpowiednie wyrażenie wraz z zakresami zmienności wszystkich zmiennych występujących w tym wyrażeniu.

Jeżeli wyrażenie będące zmienną zdaniową zmiennej x oznaczmy literą, np. Φ , to fakt, że Φ jest funkcją jednej zmiennej x wyrażamy pisząc: $\Phi(x)$.

Wypowiedź: „Element a podstawiony do zmiennej zdaniowej Φ w miejsce zmiennej x daje zdanie prawdziwe”, wyrażamy krótko: „ a spełnia Φ ”. Jeżeli element a podstawiony do zmiennej zdaniowej Φ w miejsce zmiennej x daje zdanie fałszywe, to powiemy „ a nie spełnia Φ ”.

Wypowiedź „ a spełnia Φ ” zapisujemy: $\Phi(a)$, zaś wypowiedź „ a nie spełnia Φ ” zapisujemy: $\sim \Phi(a)$.

Przykład 3

Dana jest funkcja zdaniowa: $x < 5, x \in N$

Oznaczmy tę zmienną zdaniową literą Φ . Ten fakt zapisujemy:

$$\Phi(x) \equiv (x < 5 \wedge x \in N)$$

Mamy: $\Phi(1), \Phi(2), \Phi(3), \Phi(4), \sim \Phi(5), \sim \Phi(6), \sim \Phi(7), \dots$

Podobnych oznaczeń używamy dla funkcji dwóch i więcej zmiennych.

Przykład 4

Dana jest funkcja zdaniowa: $xy > 0, x \in Z, y \in Z$

Oznaczmy tę zmienną zdaniową literą Φ . Ten fakt zapisujemy:

$$\Phi(x, y) \equiv (xy > 0 \wedge x \in Z \wedge y \in Z)$$

Mamy: $\Phi(2, 5), \Phi(-1, -7), \sim \Phi(2, -1), \sim \Phi(0, 5)$ itd.

Wykres funkcji zdaniowej jednej zmiennej. Zbiór elementów należących do zakresu zmienności funkcji zdaniowej jednej zmiennej i spełniających tę funkcję zdaniową nazywamy *wykresem* tej

funkcji zdaniowej. Wykres funkcji zdaniowej Φ będziemy oznaczać $W_{\Phi(x)}$.

Zatem:

$$W_{\Phi(x)} = \{x : \Phi(x)\}$$

Przykład 5

$$\Phi(x) \equiv (x^2 < 1 \wedge x \in R)$$

$$W_{\Phi(x)} = \{x : x^2 < 1 \wedge x \in R\} = (-1; 1)$$

Wykresem jest przedział $(-1; 1)$.

W przypadku, gdy zakres zmiennej x jest zbiorem liczbowym, wykres można ilustrować na osi liczbowej.

Przykład 6

$$\Phi(x) \equiv (x^2 = 5 \wedge x \in R)$$

$$W_{\Phi(x)} = \{x : x^2 = 5 \wedge x \in R\} = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

Wykresem jest zbiór dwuelementowy.

Przykład 7

$$\Phi(x) \equiv (x^2 = 5 \wedge x \in N)$$

$$W_{\Phi(x)} = \{x : x^2 = 5 \wedge x \in N\} = \emptyset$$

Wykresem jest zbiór pusty.

Przykład 8*

$\Phi(f) \equiv (f \text{ nie ma miejsc zerowych} \wedge f \text{ jest funkcją kwadratową})$

Za zmienną f do tej funkcji zdaniowej wstawiamy nie liczby, lecz funkcje kwadratowe.

Wykresem jest zbiór funkcji kwadratowych mających ujemny wyróżnik Δ .

Wykres funkcji zdaniowej dwóch zmiennych. Zbiór par elementów należących do odpowiednich zakresów zmienności funkcji zdaniowej dwóch zmiennych i spełniających tę funkcję zdaniową

nazywamy **wykresem** tej funkcji zdaniowej. Wykres funkcji zdaniowej $\Phi(x, y)$ będziemy oznaczać $W_{\Phi(x, y)}$.

Zatem: $W_{\Phi(x, y)} = \{(x, y) : \Phi(x, y)\}$

Przykład 9

$$\Phi(x, y) \equiv (xy > 0 \wedge x \in R \wedge y \in R)$$

$$W_{\Phi(x, y)} = \{(x, y) : xy > 0 \wedge x \in R \wedge y \in R\}$$

W przypadku, gdy zakres obu zmiennych jest zbiorem liczbowym, wykres można przedstawić w układzie współrzędnych Oxy . W przykładzie 9 do wykresu należą te punkty, które mają obie współrzędne jednakowych znaków (wtedy ich iloczyn jest dodatni), tzn. wszystkie punkty pierwszej i trzeciej ćwiartki układu (bez punktów na osiach).

Przykład 10

$$\Phi(x, y) \equiv (x + y = 6 \wedge x \in N \wedge y \in N)$$

$$W_{\Phi(x, y)} = \{(x, y) : x + y = 6 \wedge x \in N \wedge y \in N\} = \\ = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

W układzie Oxy jest to pięć punktów o powyższych współrzędnych.

Wykres funkcji zdaniowej n zmiennych. Zbiór ciągów n -wyrazowych, o wyrazach należących do odpowiednich zakresów zmienności funkcji zdaniowej n zmiennych i spełniających tę funkcję zdaniową, nazywamy **wykresem** tej funkcji zdaniowej. Wykres funkcji zdaniowej $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będziemy oznaczać

$$W_{\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Zatem:

$$W_{\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

Zadania

Zadanie 1

Wyznacz wykres $W_{\Phi(x)}$ funkcji zdaniowej jednej zmiennej, gdy

- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 \leq 4 \wedge x \in R\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 \leq 4 \wedge x \in Z\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 \leq 4 \wedge x \in N\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 > 4 \wedge x \in R\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 = 4 \wedge x \in Z\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : x^2 = -4 \wedge x \in Z\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : |x| > 0 \wedge x \in R\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : |x| \geq -5 \wedge x \in R\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : (x+2)(x-\pi)(x-3) = 0 \wedge x \in Z\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : (x+2)(x-\pi)(x-3) = 0 \wedge x \in R\}$
- $\Phi(x) \equiv \{x : (x+2)(x-\pi)(x-3) = 0 \wedge x \in N\}$

Zadanie 2

Wyznacz wykres $W_{\Phi(x, y)}$ funkcji zdaniowej dwóch zmiennych, gdy

- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy \leq 0 \wedge x \in R \wedge y \in R\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy \leq 0 \wedge x \in N \wedge y \in N\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy < 0 \wedge x \in Z \wedge y \in Z\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 0 \wedge x \in R \wedge y \in R\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 0 \wedge x \in R \wedge y \in N\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 0 \wedge x \in N \wedge y \in N\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 1 \wedge x \in N \wedge y \in N\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 6 \wedge x \in N \wedge y \in N\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : xy = 6 \wedge x \in Z \wedge y \in Z\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : |xy| = 6 \wedge x \in Z \wedge y \in Z\}$
- $\Phi(x, y) \equiv \{(x, y) : |x| = x^2 \wedge x \in R \wedge y \in R\}$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $<-2; 2>$ | b) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ |
| c) $\{1, 2\}$ | d) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ |
| e) $\{-2, 2\}$ | f) $\emptyset$ |
| g) $R \setminus \{0\}$ czyli $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ | |
| h) R | i) $\{-2, 3\}$ |
| j) $\{-2, 3, \pi\}$ | k) $\{3\}$ |

Zadanie 2

- II i IV ćwiartka układu Oxy wraz z osiami układu
- $\emptyset$
- Punkty z II i IV ćwiartki układu Oxy o obu współrzędnych całkowitych (bez punktów na osiach)
- Osie układu Oxy
- Oś Oy bez punktu $(0, 0)$
- $\emptyset$
- $\{(1, 1)\}$ (zbiór jednoelementowy)
- $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$
- $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1)\}$
- $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-1, -6), (1, -6), (2, -3), (3, -2), (6, -1), (-1, 6), (-2, 3), (-3, 2), (-6, 1)\}$
- $\{-1, 0, 1\}$

Rozdział 6 Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny. Jeżeli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x o zakresie zmienności X , to wypowiedź „dla każdego x należące do X jest $\Phi(x)$ ” zapisujemy symbolicznie:

$$\bigwedge_{x \in X} \Phi(x)$$

Symbol $\bigwedge$ oznacza: „dla każdego” i jest symbolem funktora zdaniotwórczego zwanego **kwantyfikatorem ogólnym** (inna nazwa: **kwantyfikator duży**). W wyniku działania tego funktora funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym).

W niektórych podręcznikach zamiast symbolu $\bigwedge$ jest używany symbol $\forall$.

Przykład 1

- Zapis: $\bigwedge_{x \in R} x^2 \geq 0$ odczytujemy: „dla każdej liczby rzeczywistej x jest $x^2 \geq 0$ ”. Jest to zdanie prawdziwe.
- Zapis: $\bigwedge_{x \in R} x^2 > 0$ odczytujemy: „dla każdej liczby rzeczywistej x jest $x^2 > 0$ ”. Jest to zdanie fałszywe, gdyż np. $x = 0$ nie spełnia funkcji zdaniowej $x^2 > 0$.

Kwantyfikator szczegółowy. Jeżeli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x o zakresie zmienności X , to wypowiedź „istnieje x należący do X taki, że $\Phi(x)$ ” zapisujemy symbolicznie:

$$\bigvee_{x \in X} \Phi(x)$$

Symbol $\bigvee$ oznacza: „istnieje” i jest symbolem funktora zdaniotwórczego zwanego **kwantyfikatorem szczegółowym** (inne

nazwy: *kwantyfikator mały*, *kwantyfikator egzystencjalny*). W wyniku działania tego funktora funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym).

W niektórych podręcznikach zamiast symbolu $\forall$ jest używany symbol $\exists$.

Przykład 2

- a) Zapis: $\forall_{x \in R} x^2 \leq 0$ odczytujemy: „istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^2 \leq 0$ ”. Jest to zdanie prawdziwe, gdyż np. $x = 0$ spełnia funkcję zdaniową $x^2 \leq 0$.
- b) Zapis: $\forall_{x \in R} x^2 < 0$ odczytujemy: „istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^2 < 0$ ”. Jest to zdanie fałszywe, gdyż żadna liczba rzeczywista x nie spełnia funkcji zdaniowej $x^2 < 0$.

Zmienna swobodna, zmienna związana. O zmiennej występującej pod symbolem kwantyfikatora mówimy, że jest *związana z kwantyfikatorem*. Jeżeli kwantyfikator dotyczy funkcji zdaniowej wielu zmiennych, to zmienne nie występujące pod symbolem kwantyfikatora nazywamy *zmiennymi swobodnymi*.

Przykład 2

W zapisie: $\forall_{x \in R} x^2 \geq y$ litera x oznacza zmienną związaną,

zaś litera y oznacza zmienną swobodną.

Zauważmy, że w przypadku kwantyfikatora nie jest zdanie, lecz funkcja zdaniowa. W rozpatrywanym przykładzie:

$x^2 \geq y$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych: x i y ,

$\forall_{x \in R} x^2 \geq y$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej y .

Jeżeli oznaczymy $\Phi(y) \equiv \forall_{x \in R} x^2 \geq y$, to mamy np.

$\Phi(0)$, $\Phi(-2)$, $\sim \Phi(1)$, $\sim \Phi(0,00001)$ itd.

Kwantyfikatory o ograniczonym zasięgu. Jeżeli wypowiedź nie dotyczy całego zakresu zmienności X zmiennej związanej z kwantyfikatorem, lecz pewnego podzbioru A tego zakresu, to wypowiedź tę możemy zapisać na dwa równoważne sposoby:

$$\bigwedge_{x \in X} (x \in A \wedge \Phi(x)) \quad \text{albo} \quad \bigwedge_{x \in A} \Phi(x)$$

Podobną zasadę przyjmujemy w przypadku kwantyfikatora $\forall$. Jeżeli podzbiór A jest określony za pomocą warunku logicznego, to ten warunek możemy umieścić pod symbolem kwantyfikatora np. napisy

$$\bigwedge_{x \in R} (x < 0 \wedge x^2 = 1) \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{\substack{x \in R \\ x < 0}} x^2 = 1$$

oznaczają to samo.

Kwantyfikatory jako uogólnienie spójników logicznych. W przypadku gdy zbiór X jest skończony i składa się z n elementów:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

mamy następujące równoważności zdań:

$$\bigwedge_{x \in X} \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge \dots \wedge \Phi(x_n))$$

$$\bigvee_{x \in X} \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(x_1) \vee \Phi(x_2) \vee \dots \vee \Phi(x_n))$$

Z tego powodu kwantyfikator ogólny możemy uważać za uogólnienie koniunkcji, zaś kwantyfikator szczegółowy – za uogólnienie alternatywy (zwróćmy uwagę na podobieństwo symboli kwantyfikatorów i spójników $\wedge$ i $\vee$).

Stosowanie nawiasów. Przyjmujemy umowę, że kwantyfikator dotyczy tylko funkcji zdaniowej napisanej bezpośrednio za nim. Jeżeli chcemy, by kwantyfikator dotyczył wyrażenia złożonego (np.

konjunkcji kilku funkcji zdaniowych), należy to wyrażenie ująć w nawiasy.

Tautologie rachunku kwantyfikatorów określa się podobnie jak dla zdań. Poniżej podajemy kilka tautologii rachunku kwantyfikatorów. Zakładamy, że Φ i Ψ są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o tym samym zakresie zmienności X . Przy takim założeniu pod symbolem kwantyfikatora można pisać jedynie literę x (zamiast $x \in X$).

$$a) \bigvee_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Leftrightarrow \left[\bigvee_x \Phi(x) \vee \bigvee_x \Psi(x) \right]$$

$$b) \bigvee_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Leftrightarrow \left[\bigvee_x \Phi(x) \wedge \bigvee_x \Psi(x) \right]$$

$$c) \bigwedge_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Leftrightarrow \left[\bigwedge_x \Phi(x) \wedge \bigwedge_x \Psi(x) \right]$$

Zauważmy, że równoważności b) i c) tworzą parę: jeżeli w jednej z nich „odwrócimy” wszystkie kwantyfikatory, to otrzymamy drugą równoważność. Jeżeli w podobny sposób postąpimy z równoważnością a), to otrzymamy formułę

$$\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Leftrightarrow \left[\bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x) \right]$$

która **nie jest** tautologią!

Jeżeli np. przyjmiemy

$$\Phi(x) \equiv x \leq 0, \quad \Psi(x) \equiv x > 0, \quad x \in R,$$

to lewa strona rozpatrywanej równoważności stanie się zdaniem:

$$\bigwedge_x (x \leq 0 \vee x > 0)$$

Jest to zdanie prawdziwe (każda liczba rzeczywista jest niedodatnia lub dodatnia). Prawa strona rozpatrywanej równoważności stanie się zdaniem:

$$\bigwedge_x x \leq 0 \vee \bigwedge_x x > 0$$

Jest to zdanie fałszywe, gdyż oba składniki tej alternatywy są fałszywe.

Następująca formuła natomiast jest tautologią:

$$d) \left[\bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x) \right] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$$

Prawa zaprzeczania. Poniższe dwie tautologie rachunku kwantyfikatorów nazywamy **prawami zaprzeczania** albo **prawami de Morgana** w rachunku kwantyfikatorów:

$$a) \sim \bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim \Phi(x)$$

$$b) \sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x)$$

Prawa de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów są uogólnieniem praw de Morgana dla zdań (zob. rozdział „Tautologie”).

Przykład 3

$$\text{Zaprzeczenie zdania:} \quad \bigwedge_{x \in R} x^2 \geq 0,$$

$$\text{czyli zdanie:} \quad \sim \bigwedge_{x \in R} x^2 \geq 0$$

zgodnie z a) jest równoważne zdaniu:

$$\bigvee_{x \in R} \sim (x^2 \geq 0)$$

$$\text{które można zapisać prościej:} \quad \bigvee_{x \in R} x^2 < 0$$

Przykład 4

$$a) \sim \bigvee_{x \in R} x^2 = -1 \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in R} x^2 \neq -1$$

$$b) \sim \left(\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} x \cdot y > 0 \right) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} \left(\sim \bigwedge_{y \in R} x \cdot y > 0 \right) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x \cdot y \leq 0$$

Uwaga. Użycie nawiasów nie było konieczne.

$$c) \sim \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x \cdot y > 0 \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} \sim \bigvee_{y \in R} x \cdot y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} x \cdot y \leq 0$$

Prawa de Morgana łatwo zapamiętać: *aby zaprzeczyć zdaniu z kwantyfikatorami należy „odwrócić” kwantyfikatory i utworzyć zaprzeczenie funkcji zdaniowej objętej tymi kwantyfikatorami.*

Przestawianie kwantyfikatorów. Wartość logiczna zdania z kwantyfikatorami nie zmienia się, jeżeli przestawimy (tzn. zamienimy miejscami) sąsiadujące ze sobą kwantyfikatory ogólne lub kwantyfikatory szczegółowe. Oznacza to, że poniższe dwie równoważności są tautologiami:

$$a) \bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x \Phi(x, y)$$

$$b) \bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y) \Leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x \Phi(x, y)$$

Przestawienie sąsiadujących ze sobą kwantyfikatorów ogólnego i szczegółowego może zmienić wartość logiczną zdania. Przykład 5

Zdanie: $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x < y$ jest zdaniem prawdziwym (dla dowolnej liczby x znajdziemy liczbę y od niej większą), natomiast po przestawieniu kwantyfikatorów otrzymujemy zdanie

$\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} x < y$, które jest fałszywe (bowiem nie istnieje liczba y większa od każdej liczby rzeczywistej x).

Związek między zdaniem, w którym przestawiono kwantyfikator ogólny i szczegółowy wyraża następująca tautologia:

$$c) \bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x, y)$$

Zadania

Zadanie 1

Oceń wartość logiczną zdania

$$a) \bigwedge_{x \in R} |x| > 0$$

$$b) \bigvee_{x \in R} |x| \leq 0$$

$$c) \bigwedge_{x \in N} 2x+1 \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

$$d) \bigwedge_{x \in N} 3x+1 \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

$$e) \bigwedge_{x \in Z} \frac{x}{2} \notin Z$$

$$f) \bigvee_{x \in Z} \frac{x}{2} \notin Z$$

$$g) \bigvee_{x \in Z} \frac{x}{2} \in Z$$

$$h) \bigwedge_{x \in N} x^2 > x$$

$$i) \bigwedge_{x \in N} 2x > x$$

$$j) \bigwedge_{x \in Z} 2x > x$$

$$k) \bigwedge_{x \in Z} x^2 \geq x$$

$$l) \bigwedge_{x \in R} x^2 \geq x$$

$$m) \bigvee_{x \in N} \pi \cdot x \in N$$

$$n) \bigvee_{x \in R} x = 100x$$

Zadanie 2

Oceń wartość logiczną zdania

$$a) \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 \geq 0$$

$$b) \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 = 0$$

$$c) \bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 = 0$$

$$d) \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y = 0$$

$$e) \bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} x^2 + y = 0$$

$$f) \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x \cdot y = 0$$

$$g) \bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} x \cdot y = 0$$

$$h) \bigwedge_{x \in N} \bigvee_{y \in N} x = 2y$$

$$i) \bigwedge_{y \in N} \bigvee_{x \in N} x = 2y$$

$$j) \bigvee_{x \in N} \bigwedge_{y \in N} x = 2y$$

$$k) \bigvee_{x \in N} \bigvee_{y \in N} x = 2y$$

$$l) \bigwedge_{y \in Z} \bigvee_{x \in N} x = 2y$$

Zadanie 3

Zapisać używając symboli kwantyfikatorów następujące zdania

- Każda liczba naturalna jest całkowita.
 - Kwadrat liczby naturalnej też jest liczbą naturalną.
 - Istnieje liczba naturalna, której pierwiastek też jest liczbą naturalną.
 - Iloraz liczb naturalnych nie musi być liczbą naturalną.
 - Iloraz liczb naturalnych może być liczbą naturalną.
 - Iloczyn dowolnych dwóch liczb naturalnych też jest liczbą naturalną.
 - Do każdej liczby wymiernej można dobrać taką liczbę całkowitą, że iloczyn tych liczb jest liczbą całkowitą.
 - Istnieje taka liczba wymierna, że iloczyn tej liczby i dowolnej liczby całkowitej jest liczbą całkowitą.
 - Istnieje taka liczba całkowita, że iloczyn tej liczby i dowolnej liczby wymiernej jest liczbą całkowitą.
 - Do każdej liczby całkowitej można dobrać taką liczbę wymierną, że iloczyn tych liczb jest liczbą całkowitą.
- Oceń wartość logiczną każdego z powyższych zdań.

Zadanie 4

Napisać zaprzeczenie poniższego zdania tak, by nie było w nim znaku negacji (zakresem zmienności x i y jest zbiór R).

$$a) \bigwedge_x |x| = \sqrt{x^2}$$

$$b) \bigvee_x x \geq 3$$

$$c) \bigvee_x (x > 3 \wedge x < 5)$$

$$d) \bigwedge_x (x > 3 \vee x < 5)$$

$$e) \bigvee_x (x = 2 \vee x \in Q)$$

$$f) \bigvee_x (x = 2 \wedge x \in Q)$$

$$g) \bigwedge_x \bigwedge_y x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$h) \bigvee_x \bigvee_y x + y \neq xy$$

$$i) \bigwedge_x \bigvee_y xy \leq x + y$$

$$j) \bigvee_x \bigwedge_y (x < 2y \vee x > 3y)$$

$$k) \bigwedge_x \bigvee_y (x = y \wedge xy > 0)$$

$$l) \bigwedge_a \bigvee_b \bigwedge_x (x > b \Rightarrow x > a)$$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- a) 0 b) 1 c) 1 d) 0 e) 0 f) 1 g) 1 h) 0
i) 1 j) 0 k) 1 l) 0 m) 0 n) 1

Zadanie 2

- a) 1 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) 1 g) 1 h) 0
i) 1 j) 0 k) 1 l) 0

Zadanie 3

$$a) \bigwedge_{x \in N} x \in Z$$

$$b) \bigwedge_{x \in N} x^2 \in N$$

$$c) \bigvee_{x \in N} \sqrt{x} \in N$$

$$d) \bigvee_{x \in N} \bigvee_{y \in N} \frac{x}{y} \notin N$$

$$e) \bigvee_{x \in N} \bigvee_{y \in N} \frac{x}{y} \in N$$

$$f) \bigwedge_{x \in N} \bigwedge_{y \in N} x \cdot y \in N$$

$$g) \bigwedge_{x \in Q} \bigvee_{y \in Z} x \cdot y \in Z$$

$$h) \bigvee_{x \in Q} \bigwedge_{y \in Z} x \cdot y \in Z$$

$$i) \bigvee_{x \in Z} \bigvee_{y \in Q} x \cdot y \in Z$$

$$j) \bigwedge_{x \in Z} \bigvee_{y \in Q} x \cdot y \in Z$$

Wszystkie powyższe zdania są prawdziwe.

Zadanie 4

$$\text{a) } \bigvee_x |x| \neq \sqrt{x^2}$$

$$\text{b) } \bigwedge_x x < 3$$

$$\text{c) } \bigwedge_x (x \leq 3 \vee x \geq 5)$$

$$\text{d) } \bigvee_x (x \leq 3 \wedge x \geq 5)$$

$$\text{e) } \bigwedge_x (x \neq 2 \wedge x \notin Q)$$

$$\text{f) } \bigwedge_x (x \neq 2 \vee x \notin Q)$$

$$\text{g) } \bigvee_x \bigvee_y x^2 - y^2 \neq (x - y)(x + y)$$

$$\text{h) } \bigwedge_x \bigwedge_y x + y = xy$$

$$\text{i) } \bigvee_x \bigwedge_y xy > x + y$$

$$\text{j) } \bigwedge_x \bigvee_y (x \geq 2y \wedge x \leq 3y) \quad \text{k) } \bigvee_x \bigwedge_y (x \neq y \vee xy \leq 0)$$

$$\text{l) } \bigvee_a \bigwedge_b \bigvee_x (x > b \wedge x \leq a)$$

Rozdział 7

Relacje równoważności

Pojęcie relacji. Załóżmy, że dany jest niepusty zbiór A oraz własność W , którą mogą mieć niektóre elementy zbioru A . Własność W wyznacza pewien podzbiór W_A zbioru A , złożony z tych jego elementów, które mają własność W :

$$W_A = \{a \in A : a \text{ ma własność } W\}$$

Przykład 1

Niech $A = N$, liczba a ma własność W , gdy jest podzielna przez 5. Wówczas $W_A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$

Niech teraz zbiór A będzie iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów X i Y , tzn. $A = X \times Y$. Elementami zbioru A są więc pary uporządkowane (x, y) takie, że $x \in X$ i $y \in Y$. Własność W dotyczy par (x, y) , a zbiór W_A jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. W takim przypadku własność W nazwiemy **relacją dwuczłonową** lub krótko: **relacją**. Ponieważ każda własność W wyznacza jednoznacznie zbiór W_A , więc możemy przyjmując następujące określenie relacji:

Relacją w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ nazywamy każdy podzbiór tego iloczynu.

Przy omawianiu relacji zamiast mówić „para (x, y) należy do relacji R ” powiemy „ x jest w relacji R z y ”, co zapisujemy:

$$x R y$$

Przykład 2

Niech $X = \{1, 4, 5\}$, $Y = \{2, 3\}$. W zbiorze $X \times Y$ określamy relację R :

$$R = \{(x, y) : x + y \text{ jest liczbą nieparzystą}\}$$

Wyznamy najpierw zbiór $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$$

Para (1,2) należy do relacji R , bo $1+2$ jest liczbą nieparzystą. Ten fakt możemy wyrazić inaczej: „1 jest w relacji z 2” i napisać $1 R 2$.

Para (1,3) nie należy do relacji R , bo $1+3$ jest liczbą parzystą. Ten fakt możemy wyrazić inaczej: „1 nie jest w relacji z 3” i napisać $\sim 1 R 3$.

Mamy poza tym: $\sim 4 R 2$, $4 R 3$, $5 R 2$, $\sim 5 R 3$.

Zatem: $R = \{(1,2), (4,3), (5,2)\}$.

Przykład 3

Niech X będzie zbiorem miast w Polsce, zaś Y – zbiorem rzek płynących w Polsce (przynajmniej w części swego biegu). W zbiorze $X \times Y$ określamy relację R :

$$R = \{(x, y) : \text{miasto } x \text{ leży nad rzeką } y\}$$

Wypisanie pełnej relacji R byłoby uciążliwe, możemy natomiast orzekać, czy konkretna para (*miasto, rzeka*) należy do tej relacji, np.:

Warszawa R Wisła

Poznań R Warta

$\sim$ Warszawa R Warta

Sandomierz R San

Sandomierz R Wisła

$\sim$ Sandomierz R Odra

itd.

Przykład 4

Niech $X = Y = N$. W zbiorze $X \times Y$ określamy relację R :

$$R = \{(x, y) : x \mid y\}$$

(napis $x \mid y$ czytamy: y dzieli się przez x , tzn. x jest dzielnikiem y).

Wypisanie pełnej relacji R byłoby niemożliwe, możemy natomiast orzekać, czy konkretna para (x, y) należy do tej relacji, np.:

$3 R 6$, $5 R 10$, $2 R 4$, $2 R 2$, $1 R 7$, $\sim 3 R 5$, $\sim 5 R 3$ itd.

Uwaga. W przypadku gdy $X = Y$ będziemy mówić „relacja określona w zbiorze X ” pamiętając, że jest to jedynie skrót:

w istocie taka relacja jest określona w zbiorze $X \times X$. Takie relacje będą przedmiotem naszych zainteresowań w dalszym ciągu tego rozdziału.

Relacje zwrotne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *zwrotną*, gdy każdy element zbioru X jest w relacji sam ze sobą, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} x R x$$

Przykład 5

Niech $X = N$, $R = \{(x, y) : x \mid y\}$.

Relacja R jest zwrotna, gdyż każda liczba naturalna jest swoim dzielnikiem, tzn. $\bigwedge_{x \in N} x \mid x$.

Przykład 6

Niech $X = N$, $R = \{(x, y) : x \leq y^2\}$.

Relacja R jest zwrotna, gdyż liczba 1 jest równa swemu kwadratowi, a pozostałe liczby naturalne są mniejsze od swych

kwadratów, tzn. $\bigwedge_{x \in N} x \leq x^2$.

Przykład 7

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq y^2\}$.

Relacja R nie jest zwrotna, gdyż np.

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

zatem nie każda liczba rzeczywista jest w relacji R ze sobą.

Uwaga. Porównując przykłady 6 i 7 zauważamy, że relacje określone tym samym „przepisem” w różnych zbiorach mogą mieć różne własności.

Relacje symetryczne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *symetryczną*, gdy dla dowolnych elementów x i y tego zbioru

z faktu, że x jest w relacji z y wynika, że również y jest w relacji z x , tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} (x R y \Rightarrow y R x)$$

Przykład 8

Niech X będzie zbiorem wszystkich państw. W zbiorze X określamy relację R :

$R = \{(x, y) : \text{państwo } x \text{ graniczy z państwem } y\}$

Relacja R jest symetryczna, gdyż z faktu, że państwo x graniczy z państwem y wynika, że także państwo y graniczy z państwem x .

Przykład 9

Niech $X = N$, $R = \{(x, y) : x | y\}$.

Wykażemy, że relacja R nie jest symetryczna. Zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} (x R y \Rightarrow y R x)$$

jest zdanie

$$\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in X} \sim (x R y \Rightarrow y R x)$$

równoważne zdaniu

$$\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in X} (x R y \wedge \sim y R x)$$

Weźmy np. $x = 2$, $y = 4$. Mamy: $2 R 4$, ale $\sim 4 R 2$. Relacja R nie jest symetryczna.

Relacje przechodnie. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *przechodnią*, gdy dla dowolnych elementów x, y, z należących do zbioru X z faktu, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z z wynika, że również x jest w relacji z z , tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} [(x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z]$$

Przykład 10

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x < y\}$

Relacja R jest przechodnia, gdyż z faktu, że $x < y$ i $y < z$ wynika, że $x < z$ (dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z).

Przykład 11

Niech X będzie zbiorem wszystkich państw. W zbiorze X określamy relację R :

$R = \{(x, y) : \text{państwo } x \text{ graniczy z państwem } y\}$

Relacja R nie jest przechodnia, gdyż np. Polska graniczy z Niemcami, Niemcy graniczą z Francją, a Polska nie graniczy z Francją.

Relacje równoważności. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, gdy ta relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 11

a) W zbiorze słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego” wprowadzamy relację:

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ zaczyna się na tę samą literę, co słowo } y\}$.

Relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (sprawdź!), więc jest relacją równoważności.

b) W zbiorze słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego” wprowadzamy relację:

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ ma przynajmniej jedną wspólną literę ze słowem } y\}$.

Relacja R jest zwrotna i symetryczna (sprawdź!), lecz nie jest przechodnia (rozważ np. słowa: $x = \text{koń}$, $y = \text{kot}$, $z = \text{taca}$), więc nie jest relacją równoważności.

c) W zbiorze okręgów na płaszczyźnie wprowadzamy relację:

$R = \{(x, y) : \text{okrąg } x \text{ ma ten sam środek, co okrąg } y\}$.

Relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (sprawdź!), więc jest relacją równoważności.

- d) Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$.

Relacja R jest zwrotna i przechodnia (sprawdź!), lecz nie jest symetryczna (rozważ np. $x = 1, y = 2$), więc nie jest relacją równoważności.

Klasy abstrakcji relacji równoważności. Każda relacja równoważności R wyznacza naturalny podział zbioru X (w którym jest określona), na pary rozłączne podzbiory takie, że:

- każde dwa elementy należące do tego samego podzbioru są ze sobą w relacji,
- żadne dwa elementy należące do różnych podzbiorów nie są ze sobą w relacji.

Podzbiory te nazywamy *klasami abstrakcji* (albo *klasami równoważności*) relacji R .

Przykład 12

W zbiorze X słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego” wprowadzamy relację:

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ zaczyna się na tę samą literę, co słowo } y\}$.

Relacja R jest relacją równoważności. Klasami abstrakcji tej relacji są zbiory słów zaczynających się na tę samą literę:

$K(a) = \{\text{abażur, alkohol, arbuz, atrament, ...}\}$,

$K(b) = \{\text{baca, biedronka, bóbr, byk, ...}\}$,

.....
 $K(\acute{z}) = \{\acute{z}d\acute{z}b\acute{ł}, \acute{z}renica, \acute{z}rebak, \acute{z}r\acute{o}d\acute{ł}o, ...\}$.

Zauważmy, że:

- suma klas abstrakcji $K(a) \cup K(b) \cup \dots \cup K(\acute{z})$ jest całym zbiorem X ,
- żadne słowo nie należy do dwóch klas jednocześnie, więc klasy abstrakcji są parami rozłączne, tzn.

$$K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset \text{ dla } \alpha \neq \beta$$

- każde dwa słowa należące do tej samej klasy (a więc zaczynające się na tę samą literę) są ze sobą w relacji,
- żadne dwa słowa należące do różnych klas (a więc zaczynające się na różne litery) nie są ze sobą w relacji.

Przykład 13

Niech $X = N$,

$R = \{(x, y) : x \text{ ma w zapisie dziesiętnym tyle samo cyfr co } y\}$

Relacja R jest relacją równoważności (sprawdź!). Klasami abstrakcji tej relacji są zbiory liczb naturalnych składające się z tej samej liczby cyfr:

$K(1) = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$,

$K(2) = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$,

$K(3) = \{100, 101, 102, \dots, 999\}$,

.....
 Klas abstrakcji jest nieskończenie wiele. Przeanalizuj samodzielnie ich własności.

Zadania

Zadanie 1

W zbiorze $X \times Y$ dana jest relacja R . Wyznaczyć wszystkie pary należące do tej relacji.

- a) $X = \{\text{las, kot, osa, sos}\}$, $Y = \{\text{tor, set, lek}\}$,

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ ma przynajmniej jedną wspólną literę ze słowem } y\}$

- b) $X = \{\text{las, kot, osa, sos}\}$, $Y = \{\text{tor, set, lek}\}$,

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ zaczyna się na tę samą literę co słowo } y\}$

- c) $X = \{\text{Paryż, Monachium, Berlin}\}$,
 $Y = \{\text{Polska, Niemcy, Austria, Francja}\}$,
 $R = \{(x, y) : \text{miasto } x \text{ leży w państwie } y\}$

- d) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$, $R = \{(x, y) : x \mid y\}$

- e) $X = Y = N$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10\}$

- f) $X = \{2, 5, 8, 12\}$, $Y = \{3, 4, 10\}$,

$R = \{(x, y) : \text{liczba } x \text{ ma z liczbą } y \text{ tylko jeden wspólny dzielnik}\}$

Uwaga. Liczby naturalne x i y będące w tej relacji nazywamy liczbami względnie pierwszymi.

Zadanie 2

W zbiorze X dana jest relacja R . Zbadać, czy ta relacja jest:

- 1) zwrotna, 2) symetryczna, 3) przechodnia, 4) relacja równoważności.

Jeżeli dana relacja jest relacją równoważności, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

- a) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,

$R = \{(x, y) : \text{prosta } x \text{ jest równoległa do prostej } y\}$

- b) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,

$R = \{(x, y) : \text{prosta } x \text{ jest prostopadła do prostej } y\}$

- c) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,

$R = \{(x, y) : \text{prosta } x \text{ ma przynajmniej jeden punkt wspólny z prostą } y\}$

- d) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,

$R = \{(x, y) : \text{prosta } x \text{ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą } y\}$

- e) X – zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy ,

$R = \{(x, y) : \text{odległość punktu } x \text{ od początku układu jest równa odległości punktu } y \text{ od początku układu}\}$

- f) X – zbiór słów w języku polskim,

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ ma tyle samo liter co słowo } y\}$

- g) X – zbiór słów w języku polskim,

$R = \{(x, y) : \text{słowo } x \text{ ma wspólną literę ze słowem } y\}$

- h) X – zbiór mieszkańców Polski,

$R = \{(x, y) : x \text{ jest ojcem } y\}$

- i) X – zbiór mieszkańców Polski,

$R = \{(x, y) : x \text{ jest przodkiem } y\}$

- j) X – zbiór miast w Polsce,

$R = \{(x, y) : \text{miasto } x \text{ leży w tym samym województwie co miasto } y\}$

- k) X – zbiór wszystkich podzbiorów ustalonej płaszczyzny,

$R = \{(x, y) : x \subset y\}$

- l) X – zbiór funkcji kwadratowych,

$R = \{(x, y) : \text{funkcja } x \text{ ma tyle samo miejsc zerowych co funkcja } y\}$

m) $X = R, R = \{(x, y) : x < y\}$

n) $X = R, R = \{(x, y) : x \leq y\}$

o) $X = R, R = \{(x, y) : |x| = |y|\}$

p) $X = R, R = \{(x, y) : xy > 0\}$

q) $X = R, R = \{(x, y) : xy \geq 0\}$

r) $X = R \setminus \{0\}, R = \{(x, y) : xy > 0\}$

s) $X = R, R = \{(x, y) : x + y > 0\}$

t) $X = R \setminus \{0\}, R = \left\{ (x, y) : x = \frac{1}{y} \right\}.$

u) $X = N, R = \{(x, y) : x | y\}$

v) $X = N, R = \{(x, y) : x + 1 = y\}$

w) $X = R, R = \{(x, y) : |x - y| < 1\}$

x) $X = R, R = \{(x, y) : 0 \leq x - y < 1\}$

y) $X = N, R = \{(x, y) : xy \text{ jest liczbą parzystą}\}$

z) $X = N, R = \{(x, y) : xy \text{ jest liczbą nieparzystą}\}$

Zadanie 3

W zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ dana jest relacja R . Sprawdzić, czy ta relacja jest: 1) zwrotna, 2) symetryczna, 3) przechodnia, 4) relacją równoważności.

Jeżeli dana relacja jest relacją równoważności, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

a) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, \bar{c}), (a, \bar{d}), (c, \bar{d}), (d, \bar{a}), (d, \bar{c})\}$

b) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$

c) $R = \{(a, a), (b, b), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$

d) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$

e) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, d), (a, d)\}$

f) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$

g) $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$

h) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

i) $R = \{(a, a), (b, b)\}$

$$j) R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c)\}$$

$$k) R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (d, d)\}$$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- a) $R = \{(\text{las}, \text{set}), (\text{las}, \text{lek}), (\text{kot}, \text{tor}), (\text{kot}, \text{set}), (\text{kot}, \text{lek}), (\text{osa}, \text{tor}), (\text{osa}, \text{set}), (\text{sos}, \text{tor}), \text{sos}, \text{set})\}$
- b) $R = \{(\text{las}, \text{lek}), (\text{sos}, \text{set})\}$
- c) $R = \{(\text{Paryż}, \text{Francja}), (\text{Monachium}, \text{Niemcy}), (\text{Berlin}, \text{Niemcy})\}$
- d) $R = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 8), (3, 6)\}$
- e) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$
- f) $R = \{(2, 3), (5, 3), (5, 4), (8, 3)\}$

Zadanie 2

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
a)	+	+	+	+
b)	-	+	-	-
c)	+	+	-	-
d)	-	+	-	-
e)	+	+	+	+
f)	+	+	+	+
g)	+	+	-	-
h)	-	-	-	-
i)	-	-	+	-
j)	+	+	+	+
k)	+	-	+	-
l)	+	+	+	+
m)	-	-	+	-
n)	+	-	+	-
o)	+	+	+	+
p)	-	+	+	-
q)	+	+	-	-
r)	+	+	+	+
s)	-	+	-	-

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
t)	-	+	-	-
u)	+	-	+	-
v)	-	-	-	-
w)	+	+	-	-
x)	+	-	-	-
y)	-	+	-	-
z)	-	+	+	-

Klasy abstrakcji:

- a) Jest nieskończenie wiele klas, do tej samej klasy należą proste o tym samym kierunku.
- e) Jest nieskończenie wiele klas, do tej samej klasy należą punkty położone na ustalonym okręgu o środku w początku układu i dowolnym promieniu. Oprócz tego jest jedna klasa jednoelementowa składająca się wyłącznie z punktu $(0, 0)$.
- f) Jedną klasę tworzą wszystkie słowa jednoliterowe, kolejną – wszystkie słowa dwuliterowe, kolejną – trzyliterowe itd.
- j) Jest 16 klas, do tej samej klasy należą wszystkie miasta leżące w ustalonym województwie.
- l) Są trzy klasy: do pierwszej należą wszystkie funkcje kwadratowe o wyróżniku ujemnym, do drugiej – o wyróżniku równym zero, a do trzeciej – o wyróżniku dodatnim.
- o) Jest nieskończenie wiele klas, jedna z nich jest jednoelementowa: $\{0\}$, a pozostałe są dwuelementowe i składają się z liczb przeciwnych np. $\{3, -3\}$, $\{\pi, -\pi\}$,
- r) Są dwie klasy: do jednej należą wszystkie liczby ujemne, a do drugiej – wszystkie liczby dodatnie.

Zadanie 3

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
a)	+	+	+	+
b)	+	+	-	-
c)	-	+	-	-
d)	+	+	+	+
e)	+	-	+	-
f)	+	+	+	+
g)	-	+	+	-
h)	+	+	+	+
i)	-	+	+	-
j)	+	-	-	-
k)	-	-	+	-

Klasy abstrakcji:

- a) $K_1 = \{b\}$, $K_2 = \{a, c, d\}$
 d) $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{b, c\}$, $K_3 = \{d\}$
 f) $K_1 = \{a, b\}$, $K_2 = \{c, d\}$
 h) $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{b\}$, $K_3 = \{c\}$, $K_4 = \{d\}$

Rozdział 8

Relacje porządkujące

Relacje antysymetryczne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *antysymetryczną*, gdy dla dowolnych elementów x i y tego zbioru z tego, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z x wynika, że $x = y$, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} [(x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y]$$

Przykład 1

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$.Relacja R jest antysymetryczna, gdyż z tego, że $x \leq y$ i $y \leq x$ wynika, że $x = y$.

Przykład 2

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq 2y\}$.Relacja R nie jest antysymetryczna, gdyż z tego, że $x \leq 2y$ i $y \leq 2x$ nie wynika, że $x = y$, np. dla $x = 2$, $y = 3$ obie nierówności są spełnione, natomiast $x \neq y$.

Relacje porządku. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *relacją porządku*, gdy ta relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

Uwaga. W niektórych podręcznikach taka relacja jest nazywana *relacją częściowego porządku*.

Przykład 3

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$.

Relacja R jest relacją porządku w zbiorze R , gdyż jest zwrotna ($\bigwedge_{x \in R} x \leq x$), jest antysymetryczna (przykład 1) i jest przechodnia (zadanie 2n, rozdział poprzedni).

Przykład 4

Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, $R = \{(A, B): A \subset B\}$.

Relacja R jest relacją porządku w zbiorze X , gdyż jest zwrotna:

$$\bigwedge_{A \in X} A \subset A,$$

jest antysymetryczna:

$$\bigwedge_{A \in X} \bigwedge_{B \in X} [(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B]$$

i jest przechodnia:

$$\bigwedge_{A \in X} \bigwedge_{B \in X} \bigwedge_{C \in X} [(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C]$$

Jeżeli w zbiorze X jest określona relacja porządku, to mówimy, że X jest **zbiorem uporządkowanym** (przez tę relację).

W przypadku zbiorów uporządkowanych zamiast pisać $x R y$ będziemy czasem pisać:

$$x < y$$

i mówić: „ x jest mniejsze od y ” lub „ y jest większe od x ” (w domyśle: w sensie relacji $<$).

Element maksymalny, element minimalny. Niech X będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$.

Element a nazywamy **elementem maksymalnym** zbioru X , gdy $a \in X$ i nie ma w zbiorze X elementów różnych od a i większych od a , tzn. gdy

$$\bigwedge_{x \in X} (a < x \Rightarrow x = a)$$

Element a nazywamy **elementem minimalnym** zbioru X , gdy $a \in X$ i nie ma w zbiorze X elementów różnych od a i mniejszych od a , tzn. gdy

$$\bigwedge_{x \in X} (x < a \Rightarrow x = a)$$

Przykład 5

Niech $X = (0; 1>$, $R = \{(x, y): x \leq y\}$.

Relacja R jest relacją porządku w zbiorze X (sprawdź!). Elementem maksymalnym jest liczba 1, bo $1 \in X$ i w przedziale $(0; 1>$ nie ma liczb większych od 1.

W przedziale $(0; 1>$ nie ma elementu minimalnego, bowiem nie można w tym przedziale wskazać takiej liczby, od której nie ma liczb mniejszych.

Przykład 6

Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, $R = \{(A, B): A \subset B\}$.

Relacja R jest relacją porządku w zbiorze X (zob. przykład 4). Elementem maksymalnym jest zbiór R , bo $R \in X$ i nie ma w zbiorze X innego zbioru zawierającego R . Elementem minimalnym jest zbiór pusty $\emptyset$, bo $\emptyset \in X$ i nie ma w zbiorze X innego zbioru zawierającego się w zbiorze pustym.

Przykład 7

Niech $X = \{3, 5, 6, 10, 12\}$, $R = \{(x, y): x | y\}$.

Relacja R jest relacją porządku w zbiorze X (sprawdź!). Elementami maksymalnymi są liczby 10 i 12, bo nie ma w zbiorze X ani elementu różnego od 10 i większego od 10, ani elementu innego niż 12 i większego niż 12 (większego w sensie rozpatrywanej relacji!).

Elementami minimalnymi są liczby 3 i 5, bo nie ma w zbiorze X ani elementu różnego od 3 i mniejszego od 3, ani elementu różnego od 5 i mniejszego od 5 (mniejszego w sensie rozpatrywanej relacji!).

Element największy, element najmniejszy. Niech X będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$.

Element a nazywamy **elementem największym** w zbiorze X , gdy $a \in X$ i każdy element zbioru X jest mniejszy od a , tzn. gdy

$$\bigwedge_{x \in X} x < a$$

Element a nazywamy **elementem najmniejszym** w zbiorze X , gdy $a \in X$ i każdy element zbioru X jest większy od a , tzn. gdy

$$\bigwedge_{x \in X} x < a$$

W przykładach 5 i 6 elementy maksymalne są także elementami największymi (w przykładzie 5 liczba 1 jest większa od każdej liczby z przedziału $(0;1>$, zaś w przykładzie 6 zbiór R zawiera każdy swój podzbiór).

W przykładzie 6 element minimalny jest także elementem najmniejszym (zbiór pusty zawiera się w każdym podzbiorze R).

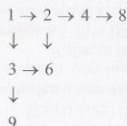
W przykładzie 7 nie ma elementu największego, bowiem nie ma w tym zbiorze liczby, która dzieli się przez wszystkie liczby z tego zbioru i nie ma w tym zbiorze liczby, która jest dzielnikiem wszystkich liczb z tego zbioru.

Schemat relacji porządku. Załóżmy, że X jest zbiorem skończonym, a $<$ jest relacją porządku w tym zbiorze. W takim przypadku wygodnie jest przedstawić tę relację w postaci schematu graficznego. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Przykład 8

Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $R = \{(x, y) : x | y\}$.

Rysując poniższy schemat:



i pamiętając o przechodności relacji porządku możemy zauważyć, że $x R y$ gdy na schemacie istnieje „droga” od x do y albo – ze względu na zwrotność – gdy $x = y$.

Element maksymalny to taki, z którego „nie wychodzi” żadna strzałka (w tym przykładzie: 6, 8 i 9).

Element minimalny to taki, do którego „nie dochodzi” żadna strzałka (w tym przykładzie: 1).

Element największy to taki, do którego można „dojść” od dowolnego elementu (w tym przykładzie taki element nie istnieje).

Element najmniejszy to taki, od którego można „dojść” do dowolnego elementu (w tym przykładzie: 1).

Relacje spójne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *spójną*, gdy dla dowolnych elementów x i y tego zbioru: x jest w relacji z y lub y jest w relacji z x lub $x = y$, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} (x R y \vee y R x \vee x = y)$$

Przykład 9

Niech $X = R$, $R = \{(x, y) : x \leq y\}$.

Relacja R jest spójna, gdyż dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y : $x \leq y$ lub $y \leq x$ (warunek $x = y$ już nie jest istotny).

Przykład 10

Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, $R = \{(A, B) : A \subset B\}$.

Relacja R nie jest spójna, gdyż np. dla przedziałów:

$$A = (1; 3), \quad B = (2, 4)$$

żadne ze zdań: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$ nie jest prawdziwe.

Przykład 11

Niech $X = \{1, 2, 4\}$, $R = \{(x, y) : x | y\}$.

Relacja R jest spójna, bo dla dowolnej pary liczb ze zbioru X jedna z nich jest dzielnikiem drugiej (sprawdź!).

Przykład 12

Niech $X = N$, $R = \{(x, y) : x \mid y\}$.

Relacja R nie jest spójna, bo np. dla $x=3$, $y=5$ żadne z zdań: $3 \mid 5$, $5 \mid 3$, $3=5$ nie jest prawdziwe.

Relacje liniowego porządku. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *relacją liniowego porządku*, gdy jest ona relacją porządku i jest spójna.

Inaczej mówiąc: relacja liniowego porządku to relacja zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna.

Jeżeli w zbiorze X jest określona relacja liniowego porządku, to mówimy, że X jest *zbiorem liniowo uporządkowanym* (przez tę relację).

Przykład 13

Zbiór liczb rzeczywistych R jest liniowo uporządkowany przez relację $R = \{(x, y) : x \leq y\}$. Wynika to z przykładów 3 i 9.

Przykład 14

Zbiór $X = \{1, 2, 4\}$ jest liniowo uporządkowany przez relację $R = \{(x, y) : x \mid y\}$ – ta relacja jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna (sprawdź!).

Przykład 15

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych nie jest liniowo uporządkowany przez relację

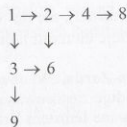
$R = \{(A, B) : A \subset B\}$, chociaż jest przez tę relację uporządkowany. Wynika to z przykładów 4 i 10.

Łańcuchy. Niech X będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$.

Łańcuchem w tym zbiorze nazywamy każdy jego podzbiór, który jest liniowo uporządkowany przez tę relację.

Przykład 16

Rozważmy relację z przykładu 8 o schemacie:



Przykłady schematów

łańcuchów:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 9$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 8$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 4$

itd.

Łańcuchy:

$\{1, 2, 4, 8\}$

$\{1, 3, 9\}$

$\{1, 3, 6\}$

$\{1, 2, 6\}$

$\{1, 2, 8\}$

$\{1, 2, 4\}$

$\{2, 4\}$

Relacje dobrego porządku. Relację określoną w zbiorze X nazywamy *relacją dobrego porządku*, gdy jest ona relacją liniowego porządku i w każdym niepustym podzbiorze zbioru X istnieje element najmniejszy.

Jeżeli w zbiorze X jest określona relacja dobrego porządku, to mówimy, że X jest *zbiorem dobrze uporządkowanym* (przez tę relację).

Przykład 17

Zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację $R = \{(x, y) : x \leq y\}$. Wynika to z przykładu 13 i z tego, że w każdym podzbiorze zbioru N istnieje element najmniejszy.

Przykład 18

Przedział $X = \langle 0; 1 \rangle$ nie jest dobrze uporządkowany przez relację $R = \{(x, y) : x \leq y\}$. Ta relacja jest relacją liniowego

porządku (sprawdź!), ale np. w przedziale $(0; 1)$ zawartym w X nie istnieje element najmniejszy.

Lemat Kuratowskiego-Zorna. W dowodach wielu twierdzeń matematycznych znajduje zastosowanie twierdzenie o zbiorach uporządkowanych zwane lematem Kuratowskiego-Zorna. Twierdzenie to po raz pierwszy udowodnił polski matematyk Kazimierz Kuratowski w 1922 roku, zaś matematyk amerykański M. Zorn w latach trzydziestych XX wieku pokazał doniosłą rolę tego twierdzenia w zastosowaniach.

Oto treść lematu Kuratowskiego-Zorna:

Jeżeli:

- X jest zbiorem uporządkowanym przez relację $<$,
- dla każdego łańcucha w X istnieje element $x \in X$ większy od wszystkich elementów tego łańcucha,

to:

- w zbiorze X istnieje element maksymalny
- i
- dla każdego $x \in X$ istnieje element maksymalny, który jest większy od x .

Zadania

Zadanie 1

W zbiorze X dana jest relacja R . Zbadać, czy ta relacja jest:

- 1) relacją porządku,
- 2) relacją liniowego porządku,
- 3) relacją dobrego porządku.

W przypadku gdy jest to relacja porządku, wyznaczyć elementy: maksymalny, minimalny, największy i najmniejszy (o ile takie istnieją).

- a) $X = N$, $R = \{(x, y): x | y\}$
- b) $X = N \setminus \{1\}$, $R = \{(x, y): x | y\}$
- c) X – zbiór liczb postaci 2^n gdzie $n \in N$,
 $R = \{(x, y): x | y\}$

- d) X – zbiór przedziałów postaci $(-a; a)$ gdzie $a \in R_+$ (zbiór liczb rzeczywistych dodatnich),
 $R = \{(x, y): x \subset y\}$

- e) $X = Z$, $R = \{(x, y): |x| \leq |y|\}$
- f) $X = R$, $R = \{(x, y): |x| < |y|\}$
- g) $X = N$, $R = \{(x, y): x | y \vee x \leq y\}$
- h) $X = N \setminus \{1\}$, $R = \{(x, y): x | y \vee x \leq y\}$
- i) X – zbiór liczb postaci $\frac{1}{n}$ gdzie $n \in N$,
 $R = \{(x, y): x \leq y\}$

Zadanie 2

Dany jest schemat relacji porządku. Wymienić elementy: maksymalny, minimalny, największy i najmniejszy (o ile takie istnieją). Wskazać wszystkie łańcuchy trójelementowe.

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow b \rightarrow c & & a \rightarrow b \rightarrow c \\ \text{a) } \downarrow & \downarrow & \text{b) } \downarrow \\ d \rightarrow e & & d \rightarrow e \rightarrow f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d & & a \rightarrow b \rightarrow c \\ \text{c) } & & \text{d) } \downarrow \\ e \rightarrow f \rightarrow g & & d \rightarrow e \rightarrow f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow b \rightarrow c & & a \rightarrow b & e \rightarrow f \\ \text{e) } \downarrow & \uparrow & \text{f) } \downarrow & \uparrow \\ d \rightarrow e \rightarrow f & & c \rightarrow d \end{array}$$

Zadanie 3

W zbiorze X dana jest relacja porządku

$R = \{(x, y) : x \mid y\}$. Narysować schemat tej relacji. Wy-
mienić elementy: maksymalny, minimalny, największy
i najmniejszy (o ile takie istnieją).

- a) $X = \{2, 3, 5, 6\}$ b) $X = \{2, 3, 6, 8\}$
c) $X = \{2, 3, 6, 12\}$ d) $X = \{2, 6, 10, 12\}$
e) $X = \{2, 3, 4, 8, 9, 27\}$ f) $X = \{2, 3, 4, 9, 36\}$
g) $X = \{1, 2, 3, 4, 9, 36\}$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- 1) Relacje porządku: a), b), c), d), g), h), i)
Relacja e) nie jest antysymetryczna, relacja f) nie jest
zwrotna.
2) Relacje liniowego porządku: c), d), g), h), i)
3) Relacje dobrego porządku: c), g), h)
Ad a) Elementy: maksymalny i największy nie istnieją. Ele-
mentem minimalnym i najmniejszym jest liczba 1.
Ad b) Elementy: maksymalny i największy nie istnieją. Ele-
mentów minimalnych jest nieskończenie wiele – każda
liczba pierwsza jest takim elementem. Element najmniej-
szy nie istnieje.
Ad c) Elementy: maksymalny i największy nie istnieją. Ele-
mentem minimalnym i najmniejszym jest liczba 2.
Ad d) Elementy: maksymalny, największy, minimalny i naj-
mniejszy nie istnieją.
Ad g) Elementy: maksymalny i największy nie istnieją. Ele-
mentem minimalnym i najmniejszym jest liczba 1.
Ad h) Elementy: maksymalny i największy nie istnieją. Ele-
mentem minimalnym i najmniejszym jest liczba 2.
Ad i) Elementem maksymalnym i największym jest liczba 1.
Elementy: minimalny i najmniejszy nie istnieją.

Zadanie 2

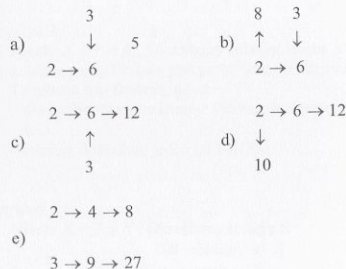
	element maksymalny	elementy największy	element minimalny	elementy najmniejszy
a)	c, e	nie istnieją	a	a
b)	c, f	nie istnieją	a	a
c)	d, g	nie istnieją	a, e	nie istnieją
d)	c, f	nie istnieją	a, d	nie istnieją
e)	c	c	a	a
f)	b, f	nie istnieją	a, e	nie istnieją

Łańcuchy trójelementowe:

- a) $\{a, b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e\}$
b) $\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{d, e, f\}, \{a, e, f\}, \{a, d, f\}$
c) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{e, f, g\}$
d) $\{a, b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, b, f\}, \{a, e, f\}, \{b, e, f\},$
 $\{d, e, f\}$
e) $\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, d, f\}, \{a, d, c\}, \{a, e, f\},$
 $\{a, e, c\}, \{a, f, c\}, \{d, e, f\}, \{d, e, c\}, \{d, f, c\},$
 $\{e, f, c\}$
f) $\{a, c, d\}, \{a, c, b\}, \{a, d, b\}, \{c, d, b\}$

Zadanie 3

Schematy:



$$\begin{array}{c}
 2 \rightarrow 4 \\
 \downarrow \\
 \text{f) } \quad 36 \\
 \uparrow \\
 3 \rightarrow 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 2 \rightarrow 4 \\
 \uparrow \quad \downarrow \\
 \text{g) } \quad 1 \quad 36 \\
 \downarrow \quad \uparrow \\
 3 \rightarrow 9
 \end{array}$$

	element maksymalny	elementy największy	element minimalny	elementy najmniejszy
a)	5, 6	nie istnieje	2, 3, 5	nie istnieje
b)	6, 8	nie istnieje	2, 3	nie istnieje
c)	12	12	2, 3	nie istnieje
d)	10, 12	nie istnieje	2	2
e)	8, 27	nie istnieje	2, 3	nie istnieje
f)	36	36	2, 3	nie istnieje
g)	36	36	1	1

Rozdział 9

Funkcje

Pojęcie funkcji. Niech X i Y będą dowolnymi niepustymi zbiorami.

Relację będącą podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy **funkcją**, gdy każdy element zbioru X jest w relacji z dokładnie jednym elementem zbioru Y .

Wprowadzając nowy symbol $\bigvee^1$, który odczytujemy „istnieje dokładnie jeden”, możemy warunek z powyższej definicji zapisać symbolicznie:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y}^1 x R y$$

Przykład 1

Niech X będzie zbiorem wszystkich ludzi, zaś $Y = N$. Określamy relację: człowiek x jest w relacji z liczbą naturalną y gdy y jest rokiem urodzenia osoby x (według ustalonego kalendarza).

Ta relacja jest funkcją, gdyż:

- dla każdego człowieka x istnieje liczba y będąca rokiem jego urodzenia,
- istnieje dokładnie jedna taka liczba.

Przykład 2

Niech $X = Y = R$. Określamy relację: liczba x jest w relacji z liczbą y gdy liczba y jest przeciwna do liczby x .

Ta relacja jest funkcją, gdyż:

- dla każdej liczby x istnieje liczba y będąca do niej przeciwna,
- istnieje dokładnie jedna taka liczba.

Przykład 3

Niech $X = Y = N$. Określamy relację R :

$$R = \{(x, y) : x \mid y\}$$

Ta relacja nie jest funkcją. Wprawdzie:

– dla każdej liczby naturalnej x istnieje liczba y taka, że $x|y$
(wystarczy wziąć np. $y = x$),
ale takich liczb – dla tego samego x – może być wiele, np.
 $2|2, 2|4, 2|6, \dots$

Relacje będące funkcjami oznaczamy zazwyczaj literami $f, g, h, F, \dots$. Zamiast mówić „funkcja f jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ ” mówimy „funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y ”, co zapisujemy symbolicznie:

$$f: X \rightarrow Y$$

Słowa: „funkcja”, „**przekształcenie**”, „**odzworowanie**” mają to samo znaczenie i mogą być używane zamiennie.

Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji. Jeżeli funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y (czyli $f: X \rightarrow Y$), to zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f . Każdy element dziedziny funkcji f nazywamy **argumentem** tej funkcji.

Z określenia funkcji wynika, że każdemu argumentowi x odpowiada (**jest przyporządkowany**) dokładnie jeden element y w zbiorze Y – ten, z którym x jest w relacji f , tzn. taki y , że

$$x f y$$

(literą f zastąpiono symbol relacji R). W przypadku funkcji zamiast pisać $x f y$ stosuje się zapis

$$f(x) = y$$

Jeżeli oba zbiory X i Y są zbiorami liczbowymi, to czasami zamiast opisu słownego można funkcję $f: X \rightarrow Y$ określić wzorem, np. $f(x) = x^2 + 2x$

Jeżeli $y = f(x)$, to y nazywamy **wartością funkcji f** dla argumentu x albo **obrazem elementu x** w przekształceniu f .

Niech $f: X \rightarrow Y$. W zbiorze Y niektóre elementy są wartościami funkcji f . Zbiór takich elementów (czyli **zbiór wartości funkcji f**) nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji f . Przeciwdziedzinę funkcji f będziemy oznaczać: W_f . Jest to podzbiór zbioru Y : $W_f \subset Y$ (czasami może być $W_f = Y$).

Przykład 4

Niech $f: N \rightarrow N$ przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej wynik mnożenia tej liczby przez 2.
 f jest funkcją (przemysł dławczego). Dziedziną funkcji f jest zbiór N . Wartością tej funkcji dla argumentu $x = 4$ jest $y = 8$, co zapisujemy:

$$f(4) = 8$$

Liczba 124 też jest wartością funkcji f (przemysł, dla jakiego argumentu). Liczba 7 nie jest wartością funkcji f , bowiem nie ma takiej liczby naturalnej, która pomnożona przez 2 daje 7. Przeciwdziedzina funkcji f (czyli zbiór W_f) jest zbiorem liczb naturalnych parzystych.

Przykład 5

Niech $f: R \rightarrow R$ będzie określona wzorem:

$$f(x) = |x|$$

f jest funkcją (przemysł dławczego). Dziedziną funkcji f jest zbiór R .

Przykładowo:

$$f(-3) = 3, \quad f(5,34) = 5,34, \quad f(0) = 0$$

Liczba -7 nie jest wartością funkcji f , bowiem nie ma takiej liczby rzeczywistej, której moduł jest równy -7 .

Przeciwdziedzina funkcji f jest $W_f =]-\infty; \infty[$.

Przykład 6

Niech $f: N \rightarrow R$ będzie określona wzorem:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór N .

Przykładowo:

$$f(4) = 2, \quad f(5) = \sqrt{5}, \quad f(1) = 1$$

Liczba -7 nie jest wartością funkcji f , bowiem nie ma takiej liczby rzeczywistej, której pierwiastek jest równy -7 . Liczby:

$\frac{1}{2}, \pi, 0$ też nie są wartościami funkcji f (przemysł!).

Przeciwdziedzina funkcji f jest $W_f = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$.

Obraz zbioru. Niech $f: X \rightarrow Y$ i niech A będzie podzbiorem dziedziny X ($A \subset X$). Zbiór tych elementów zbioru Y , które są obrazami elementów zbioru A w przekształceniu f nazywamy **obrazem zbioru A** w tym przekształceniu i oznaczamy: $f(A)$. Zatem:

$$f(A) = \{y \in Y : \bigvee_{x \in A} y = f(x)\}.$$

Przykład 7

Niech $f: N \rightarrow N$ będzie określona wzorem: $f(x) = 2x$ (funkcja z przykładu 4) i niech $A = \{3, 4, 7, 11\}$

Wówczas: $f(A) = \{6, 8, 14, 22\}$

Przykład 8

Niech $f: R \rightarrow R$ będzie określona wzorem: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(funkcja z przykładu 5) i niech
 $A = (-2; -1)$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Mamy: $f(A) = (1; 2)$, $f(B) = \{0, 1, 2\}$.

Przeciwwobraz zbioru. Niech $f: X \rightarrow Y$ i niech G będzie podzbiorem zbioru Y ($G \subset Y$). Zbiór tych elementów zbioru X , których obrazy należą do zbioru G nazywamy **przeciwwobrazem zbioru G** w przekształceniu f i oznaczamy: $f^{-1}(G)$. Zatem:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}.$$

Przykład 9

Niech $f: N \rightarrow N$ będzie określona wzorem: $f(x) = 2x$ i niech $G = \{1, 4, 5, 8, 14\}$.

Wówczas: $f^{-1}(G) = \{2, 4, 7\}$, bowiem:

- liczby $f(2), f(4), f(7)$ - czyli liczby 4, 8, 14 - należą do zbioru G ,
- jeżeli $x \notin \{2, 4, 7\}$, to $f(x) \notin G$.

Przykład 10

Niech $f: R \rightarrow R$ będzie określona wzorem: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ i niech: $G = (1; 2)$, $H = \{-1, 0, 2\}$.

Mamy: $f^{-1}(G) = (-2; -1) \cup (1; 2)$, $f(B) = \{-2, 0, 2\}$ (prze-myśl dlaczego).

Funkcje różnowartościowe. Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **różnowartościowa**, gdy dla różnych argumentów przyjmuje ona różne wartości tzn. gdy

$$\bigwedge_{x_1 \in X} \bigwedge_{x_2 \in X} [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

Przykład 11

Niech $f: N \rightarrow N$ będzie określona wzorem: $f(x) = 2x$.

Funkcja f jest różnowartościowa, bowiem jeżeli weźmiemy dwie różne liczby naturalne x_1 i x_2 i obie te liczby pomnożymy przez 2, to otrzymamy dwie różne liczby naturalne (jako wartości funkcji f).

Przykład 12

Niech $f: R \rightarrow R$ będzie określona wzorem: $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Funkcja f nie jest różnowartościowa, bowiem przyjmując np. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ otrzymamy $f(x_1) = f(x_2) = 3$ (zatem dla różnych argumentów x_1 i x_2 otrzymaliśmy tę samą wartość funkcji).

Funkcje wzajemnie jednoznaczne. Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **wzajemnie jednoznaczna** gdy jest to funkcja różnowartościowa i przeciwdziedzina tej funkcji jest zbiór Y (tzn. $W_f = Y$).

Przykład 13

Niech $f: R \rightarrow R$ będzie określona wzorem: $f(x) = 2x$.

Funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna, gdyż jest różnowartościowa (przemyśl!) i przeciwdziedzina tej funkcji jest

zbiór R (dla każdej liczby rzeczywistej y możemy wskazać taką liczbę rzeczywistą x , że $y = f(x)$ – wystarczy przyjąć

$$x = \frac{y}{2}.$$

Przykład 14

Niech $f: N \rightarrow N$ będzie określona wzorem: $f(x) = 2x$.

Funkcja f nie jest wzajemnie jednoznaczna, chociaż jest różnowartościowa (zobacz przykład 11), bowiem przeciwdziałną tej funkcji jest zbiór liczb parzystych (zobacz przykład 4), a nie zbiór N .

Uwaga 1. Zamiast pisać „funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna” czasem piszemy krótko: „ f jest 1-1”.

Uwaga 2. Jeżeli zbiorem wartości funkcji f jest zbiór Y , to mówimy, że „funkcja f przekształca zbiór X na zbiór Y ”. Zatem: funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna gdy jest różnowartościowa i przekształca zbiór X na zbiór Y .

Funkcja odwrotna. Funkcję $g: Y \rightarrow X$ nazywamy **funkcją odwrotną**

do funkcji $f: X \rightarrow Y$, gdy $W_f = Y$ i $\bigwedge_{x \in X} g(f(x)) = x$.

Przykład 15

Pokażemy, że funkcja $g: R \rightarrow R$ określona wzorem:

$g(y) = \frac{y}{2}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f: R \rightarrow R$ określonej wzorem: $f(x) = 2x$.

Mamy: $X = Y = R$. Warunek $W_f = Y$ sprawdzaliśmy

w przykładzie 13. Sprawdźmy, czy $\bigwedge_{x \in X} g(f(x)) = x$. Weź-

my dowolną liczbę x . Mamy: $g(f(x)) = g(2x) = \frac{2x}{2} = x$.

Funkcja g jest funkcją odwrotną do f .

Przykład 16.

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f: R \rightarrow R$ określonej wzorem $f(x) = 3x - 1$.

Sprawdźmy, czy $W_f = Y$. Weźmy dowolną liczbę y . Szukamy takiej liczby x , by $y = f(x)$, tzn. by

$$y = 3x - 1$$

Wyznaczając z powyższej równości x otrzymamy:

$$x = \frac{y+1}{3}$$

(sprawdź!). Powyższy wzór ma sens dla każdego y , zatem $W_f = Y$ (bo dla każdej liczby rzeczywistej y wskazaliśmy taką liczbę rzeczywistą x , że $y = f(x)$).

Funkcją odwrotną do funkcji f jest funkcja $g(y) = \frac{y+1}{3}$.

Rzeczywiście, dla dowolnej liczby x mamy:

$$g(f(x)) = g(3x - 1) = \frac{(3x - 1) + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

Przykład 17

Niech X będzie zbiorem wszystkich ludzi, $Y = \{1, 2, \dots, 31\}$, zaś $f: X \rightarrow Y$ każdemu człowiekowi przyporządkowuje liczbę oznaczającą dzień miesiąca, w którym się urodził.

Zauważmy, że funkcja odwrotna nie istnieje. Aby warunek $g(f(x)) = x$ był spełniony, każdej z liczb ze zbioru Y musiałoby odpowiadać wielu ludzi, a taka relacja nie jest funkcją.

Uwaga 1. Jeżeli oba zbiory X i Y są zbiorami liczbowymi, to argumenty obu funkcji oznaczamy tą samą literą. Powiemy np.:

„funkcja określona wzorem $g(x) = \frac{x}{2}$ jest funkcją odwrotną do funkcji określonej wzorem: $f(x) = 2x$ ”.

Uwaga 2. Funkcję odwrotną do funkcji f będziemy oznaczać symbolem f^{-1} . Warunek występujący w definicji funkcji odwrotnej zapiszemy następująco:

$$\bigwedge_{x \in X} f^{-1}(f(x)) = x$$

Twierdzenia o funkcji odwrotnej.

W twierdzeniach litera f oznacza funkcję: $f: X \rightarrow Y$, zaś symbol f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f .

Twierdzenie 1

Jeżeli $f: X \rightarrow Y$ i istnieje funkcja odwrotna f^{-1} , to

- (1) $\bigwedge_{y \in Y} f(f^{-1}(y)) = y$,
- (2) $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} [f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y]$,
- (3) $W_{f^{-1}} = X$,
- (4) obie funkcje f i f^{-1} są różnowartościowe.

Z definicji funkcji odwrotnej oraz z twierdzenia 1 pkt. (3) i (4) wynika następujący wniosek:
Wniosek.

Obie funkcje f i f^{-1} są wzajemnie jednoznaczne.

Twierdzenie 2

Dla każdej funkcji wzajemnie jednoznacznej f istnieje dokładnie jedna funkcja odwrotna f^{-1} . Funkcja odwrotna do funkcji wzajemnie jednoznacznej jest też wzajemnie jednoznaczna.

Twierdzenie 3

Jeżeli f^{-1} jest funkcją odwrotną do funkcji f , to f jest funkcją odwrotną do funkcji f^{-1} .

Funkcja złożona. Niech będą dane funkcje: $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow V$.

Jeżeli $W_f = Y$, to funkcje f i g wyznaczają nową funkcję $h: X \rightarrow V$ określoną wzorem:

$$h(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X$$

Funkcję h nazywamy **funkcją złożoną**. Jest ona **złożeniem** albo **superpozycją** funkcji f i g .

Złożenie funkcji f i g oznaczamy symbolem $g \circ f$. Zatem:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Przykład 18

Niech $f: R \rightarrow R$ i $g: R \rightarrow R$ będą funkcjami określonymi wzorami: $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x - 1$

Wyznamy funkcję $g \circ f$. Mamy:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 3 \cdot 2x - 1 = 6x - 1$$

Zatem: $(g \circ f)(x) = 6x - 1$

Wyznamy teraz funkcję $f \circ g$. Mamy:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = 2 \cdot (3x - 1) = 6x - 2$$

Zatem: $(f \circ g)(x) = 6x - 2$

Wniosek. Składanie funkcji nie jest przemienne, tzn. funkcje $g \circ f$ i $f \circ g$ mogą być różnymi funkcjami.

Twierdzenia o funkcji złożonej.

Twierdzenie 4

Jeżeli

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow V, h: V \rightarrow U, W_f = Y, W_g = V,$$

to

$$\bigwedge_{x \in X} [h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

Wniosek. Składanie funkcji jest łączne, tzn. funkcje $h \circ (g \circ f)$ i $(h \circ g) \circ f$ są równe.

Twierdzenie 5

Jeżeli $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow V$ są funkcjami wzajemnie jednoznacznymi, to funkcja $g \circ f$ też jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Twierdzenie 6

Jeżeli $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow V$ są funkcjami wzajemnie jednoznacznymi, to istnieją funkcje $(g \circ f)^{-1}: V \rightarrow X$ oraz $f^{-1} \circ g^{-1}: V \rightarrow X$ i

$$\bigwedge_{v \in V} (g \circ f)^{-1}(v) = (f^{-1} \circ g^{-1})(v)$$

Obcięcie i przedłużenie funkcji. Niech $f: X \rightarrow Y$. Czasami zachodzi potrzeba zbadania funkcji f nie w całym zbiorze X , ale w pewnym jego podzbiorze A . Określamy wówczas nową funkcję $g: A \rightarrow Y$ następująco:

$$g(x) = f(x) \text{ dla } x \in A$$

Tę nową funkcję g nazywamy **obcięciem funkcji f** do zbioru A i oznaczamy symbolem $f|_A$.

Niech teraz $g: A \rightarrow Y$ będzie funkcją określoną w pewnym podzbiorze A zbioru X . Każdą funkcję $f: X \rightarrow Y$ taką, że

$$f|_A(x) = g(x) \text{ dla } x \in A$$

nazywamy **przedłużeniem funkcji g** do zbioru X .

Uwaga. Operacja obcięcia funkcji jest jednoznaczna. Oznacza to, że dla ustalonej funkcji f i ustalonego zbioru A istnieje dokładnie jedna funkcja $f|_A$. Operacja przedłużania funkcji nie jest jednoznaczna. Oznacza to, że dla ustalonej funkcji g i ustalonego zbioru X istnieje wiele funkcji będących przedłużeniami funkcji g do zbioru X .

Przykład 19

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = |x|$.

Obcięciem tej funkcji do przedziału $<0; \infty)$ jest funkcja $g: <0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem: $g(x) = x$.

Obcięciem funkcji f do przedziału $(-\infty; 0)$ jest funkcja $h: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem: $h(x) = -x$.

Przykład 20

Niech $g: <0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $g(x) = x$.

Każda z poniższych funkcji f_1, f_2, f_3 jest przedłużeniem funkcji g na zbiór $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ \sin x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Funkcja g ma nieskończenie wiele przedłużeń na zbiór $\mathbb{R}$.

Wykres funkcji. Niech $f: X \rightarrow Y$. **Wykresem** funkcji f nazywamy zbiór wszystkich par postaci $(x, f(x))$ gdzie $x \in X$.

Przykład 21

Niech $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = 3x - 1$. Wykresem funkcji f jest zbiór

$$\{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11)\}$$

W przypadku gdy oba zbiory X i Y są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, wykresy niektórych funkcji można przedstawić w układzie współrzędnych Oxy . Dysponując wykresem funkcji w układzie współrzędnych możemy z niego odczytywać między innymi:

- dziedzinę funkcji, którą otrzymujemy rzutując prostopadłe wykres na oś Ox ,
- przeciwdziedzinę funkcji, którą otrzymujemy rzutując prostopadłe wykres na oś Oy ,
- obraz zbioru A , który otrzymujemy rzutując prostopadłe wykres obcięcia $f|_A$ na oś Oy .

Zadania

Zadanie 1

W iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ dana jest relacja R . Zbadać, czy ta relacja jest funkcją.

- $X =$ - zbiór mieszkańców Polski posiadających PESEL, $Y = N$. Człowiek x jest w relacji z liczbą naturalną y gdy y jest jego numerem PESEL.
- $X = Y =$ - zbiór wszystkich ludzi. Człowiek x jest w relacji z człowiekiem y gdy y jest dzieckiem x .
- $X =$ - zbiór wszystkich ludzi, $Y = N \cup \{0\}$. Człowiek x jest w relacji z liczbą naturalną y gdy y jest liczbą jego dzieci.
- $X = Y =$ - zbiór wszystkich ludzi. Człowiek x jest w relacji z człowiekiem y gdy y jest rodzicem x .
- $X = Y = R$, $R = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$
- $X = Y = R_+$, $R = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$

Zadanie 2

Przyjmujemy, że dziedziną każdej z podanych poniżej funkcji jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których wzór określający tę funkcję ma sens. Wyznaczyć tę dziedzinę.

- $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$
- $f(x) = \frac{x+3}{(x-4)^2}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x+2}$
- $f(x) = \sqrt{x-5}$
- $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x+2}$

Zadanie 3

Dana jest funkcja $f: R \rightarrow R$. Wyznaczyć przeciwdziedzinę (czyli zbiór wartości) tej funkcji.

- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = |\sin x|$
- $f(x) = 1 - |x|$
- $f(x) = 2 - 3x$
- $f(x) = 5$
- $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{dla } x < 1 \\ x+4 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ -4 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Zadanie 4

Dana jest funkcja $f: R \rightarrow R$ i zbiór $A \subset R$. Wyznaczyć obraz zbioru A w przekształceniu f .

- $f(x) = 5x - 3$ $A = \{2, 3, 4\}$
- $f(x) = 2x + 1$ $A = (-2; 1)$
- $f(x) = 1 - 4x$ $A = (0; \infty)$
- $f(x) = |x|$ $A = (-3; 0)$
- $f(x) = |x|$ $A = (-1; 2)$
- $f(x) = |x - 2|$ $A = (-1; 5)$
- $f(x) = 5$ $A = (-1; 5)$
- $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{dla } x < 1 \\ x+4 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ $A = (-\infty; 5)$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ -4 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ $A = (-\infty; 1)$

Zadanie 5

Wyznaczyć obraz zbioru $A = \{5, 6, 7, 14, 15\}$ w przekształceniu $f: N \rightarrow N$ określonym poniżej.

- a) $f(x)$ jest największą liczbą nieparzystą mniejszą lub równą x
- b) $f(x)$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą większą od x
- c) $f(x)$ jest największą liczbą nieparzystą spośród dzielników liczby x
- d) $f(x)$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą spośród dzielników liczby x
- e) $f(x)$ jest liczbą dzielników liczby x
- f) $f(x)$ jest liczbą nieparzystych dzielników liczby x

Zadanie 6

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru G w przekształceniu $f: R \rightarrow R$ określonym poniżej.

- a) $f(x) = 2x - 1$ $G = \{1, 3, 5\}$
- b) $f(x) = |x|$ $G = \{0, 1, 5\}$
- c) $f(x) = 2 - 3x$ $G = \langle -5; \infty \rangle$
- d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ $G = \langle -2; 3 \rangle$
- e) $f(x) = 1 - x^2$ $G = \langle 0; 1 \rangle$
- f) $f(x) = 1 - x^2$ $G = \langle 1; \infty \rangle$
- g) $f(x) = 5$ $G = \langle 4; 7 \rangle$
- h) $f(x) = 5$ $G = \langle 1; 5 \rangle$
- i) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x < 1 \\ x + 4 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ $G = \langle 0; 6 \rangle$
- j) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ -4 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ $G = (-1; 1)$

Zadanie 7

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru $G = \{1, 3\}$ w przekształceniu $f: N \rightarrow N$ określonym poniżej.

- a) $f(x)$ jest największą liczbą nieparzystą mniejszą lub równą x

- b) $f(x)$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą większą od x
- c) $f(x)$ jest największą liczbą parzystą spośród dzielników liczby x
- d) $f(x)$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą spośród dzielników liczby x

Zadanie 8

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru G w przekształceniu f .

- a) $f: N \times N \rightarrow N$, $f((x_1, x_2)) = x_1 \cdot x_2$, $G = \{2\}$
- b) $f: Z \times Z \rightarrow Z$, $f((x_1, x_2)) = x_1 \cdot x_2$, $G = \{0\}$
- c) $f: N \times N \rightarrow N$, $f((x_1, x_2)) = x_1 \cdot x_2$, G - zbiór liczb parzystych
- d) $f: N \times N \rightarrow N$, $f((x_1, x_2)) = x_1 \cdot x_2$, G - zbiór liczb nieparzystych

Zadanie 9

Sprawdzić czy dana funkcja jest:

- (1) różnowartościowa,
- (2) wzajemnie jednoznaczna.

- a) $f: N \rightarrow N$, $f(x) = x + 1$
- b) $f: Z \rightarrow Z$, $f(x) = x + 1$
- c) $f: N \rightarrow N \cup \{0\}$, $f(x) = x - 1$
- d) $f: Z \rightarrow Z$, $f(x) = -x$
- e) $f: N \rightarrow N$, $f(x)$ - liczba dzielników x
- f) $f: Z \rightarrow N \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$
- g) $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x + 1$
- h) $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$
- i) $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow R$, $f(x) = x^2$
- j) $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$, $f(x) = x^2$
- k) $f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$l) f: R \setminus \{0\} \rightarrow R_+, f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$m) f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = |x|$$

$$n) f: \{-2, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = |x|$$

W przykładach o) – q) litera Π oznacza ustaloną płaszczyznę, litera P – ustalony punkt na tej płaszczyźnie, a litera l – ustaloną prostą na tej płaszczyźnie.

$$o) f: \Pi \rightarrow \Pi, f \text{ jest symetrią osiową względem } l$$

$$p) f: \Pi \rightarrow l, f \text{ jest rzutem prostym na } l$$

$$q) f: \Pi \rightarrow \Pi, f \text{ jest symetrią środkową względem } P$$

Zadanie 10

Sprawdzić że funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f .

$$a) f: R \rightarrow R, f(x) = 1 - 2x, g: R \rightarrow R, g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$b) f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x},$$

$$g: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, g(x) = \frac{1}{x}$$

$$c) f:]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[, f(x) = x^2,$$

$$g:]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[, g(x) = \sqrt{x}$$

$$d) f:]-\infty; 0[\rightarrow]-\infty; 0[, f(x) = x^2,$$

$$g:]-\infty; 0[\rightarrow]-\infty; 0[, g(x) = -\sqrt{x}$$

Zadanie 11

Dana jest funkcja f . Wyznaczyć funkcję odwrotną f^{-1} .

$$a) f: R \rightarrow R, f(x) = 4x + 1$$

$$b) f: R \rightarrow R, f(x) = 2 - 3x$$

$$c) f: R \setminus \{2\} \rightarrow R \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{2x - 4}$$

Zadanie 12

Wyznaczyć funkcję złożoną $g \circ f$ gdy

$$a) f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3, g: R \rightarrow R, g(x) = x^2$$

$$b) f: R \rightarrow R_+ \cup \{0\}, f(x) = x^2, g: R_+ \cup \{0\} \rightarrow R, g(x) = 2x + 3$$

$$c) f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x},$$

$$g: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$g: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, g(x) = \frac{1}{x}$$

$$e) f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3, g: R \rightarrow R, g(x) = 5$$

Zadanie 13*

Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f: X \rightarrow Y$ i dla dowolnych podzbiorów A, B zbioru X :

$$a) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$b) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$c) f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$$

Zadanie 14*

Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f: X \rightarrow Y$ i dla dowolnych podzbiorów G, H zbioru Y :

$$a) f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cup H)$$

$$b) f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H)$$

$$c) f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H) = f^{-1}(G \setminus H)$$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- Ta relacja jest funkcją, gdyż każdy mający nr PESEL ma taki numer dokładnie jeden.
- Ta relacja nie jest funkcją, gdyż nie każdy ma dzieci (a także są osoby mające więcej niż jedno dziecko).
- Ta relacja jest funkcją, gdyż dla każdego człowieka liczba jego dzieci jest wyznaczona jednoznacznie.
- Ta relacja nie jest funkcją, gdyż mamy dwoje rodziców.
- Ta relacja nie jest funkcją, gdyż np. $2 \cdot 2$ i $2 \cdot 2 - 2$.
- Ta relacja jest funkcją, gdyż dla każdej liczby dodatniej x istnieje dokładnie jedna liczba dodatnia y taka, że $x^2 = y^2$.

Zadanie 2

- $R \setminus \{2\}$
- $R \setminus \{-2, 2\}$
- $R \setminus \{4\}$
- R
- $R \setminus \{-2, 1\}$
- f
- $< 5; \infty)$
- $< -2; 2 >$
- $(-1; 1)$
- $< -2; 1) \cup (1; 2)$

Zadanie 3

- $< 1; \infty)$
- $< -1; 1 >$
- $< 0; 1 >$
- $(-\infty; 1 >$
- R
- $\{5\}$
- $\{1\}$
- $(0; 1 >$
- $(-\infty; -1) \cup < 5; \infty)$
- $R_+ \cup \{-4\}$

Zadanie 4

- $\{7, 12, 17\}$
- $(-3; 3)$
- $(-\infty; 1 >$
- $(0; 3 >$
- $< 0; 2)$
- $< 0; 3)$
- $\{5\}$
- $< -2; -1) \cup < 5; 9 >$
- $R_+ \cup \{-4\}$

Zadanie 5

- $\{5, 7, 13, 15\}$
- $\{7, 9, 15, 17\}$
- $\{3, 5, 7, 15\}$
- $\{1\}$
- $\{2, 4\}$
- $\{2, 4\}$

Zadanie 6

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{-5, -1, 0, 1, 5\}$
- $(-\infty; -1 >$
- $(-3; 3)$
- $< -1; 1 >$
- $\{0\}$
- R
- $\emptyset$
- $< 1; 2 >$
- $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

Zadanie 7

- $\{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2\}$
- $\emptyset$
- N

Zadanie 8

- $\{(1, 2), (2, 1)\}$
- $\{(x_1, x_2) : x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2) : x_1 \in P \vee x_2 \in P\}$ gdzie P – zbiór liczb naturalnych parzystych
- $\{(x_1, x_2) : x_1 \notin P \wedge x_2 \notin P\}$ gdzie P – jak w c)

Zadanie 9

Funkcjami różnowartościowymi są: a), b), c), d), g), i), j), k), n), o), q). Funkcjami wzajemnie jednoznaczными są: b), c), d), g), j), k), n), o), q)

Zadanie 10

Wszystkie funkcje a) – d) są wzajemnie jednoznaczne, więc do każdej z nich istnieje dokładnie jedna funkcja odwrotna. Sprawdzamy, czy jest to funkcja g:

$$a) \quad g(f(x)) = g(1 - 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1 - 2x) = x$$

$$b) \quad g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$c) \quad g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x \quad (\text{dla } x \geq 0: \sqrt{x^2} = x)$$

$$d) \quad g(f(x)) = g(x^2) = -\sqrt{x^2} = -(-x) = x \quad (\text{dla } x < 0: \sqrt{x^2} = -x)$$

Zadanie 11

$$a) \quad f^{-1}: R \rightarrow R, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1$$

$$b) \quad f^{-1}: R \rightarrow R, \quad f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$c) \quad f^{-1}: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{2\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2x} + 2$$

Zadanie 12

$$a) \quad g \circ f: R \rightarrow R, \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 9$$

$$b) \quad g \circ f: R \rightarrow R, \quad (g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$$

$$c) \quad g \circ f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, \quad (g \circ f)(x) = x^2$$

$$d) g \circ f: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}, \quad (g \circ f)(x) = x^2$$

$$e) g \circ f: R \rightarrow R, \quad (g \circ f)(x) = 5$$

Zadanie 13*

$$a) [y \in f(A) \cup f(B)] \Leftrightarrow [y \in f(A) \vee y \in f(B)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\bigvee_{x \in A} y = f(x) \vee \bigvee_{x \in B} y = f(x) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{x \in A \cup B} y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A \cup B)$$

- b) Jeżeli $y \in f(A \cap B)$ to istnieje taki $x \in A \cap B$, że $y = f(x)$. Ponieważ $x \in A \cap B$, więc $x \in A$ i $x \in B$. Zatem $f(x) \in f(A)$ i $f(x) \in f(B)$, czyli $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Ponieważ $y = f(x)$, więc $y \in f(A) \cap f(B)$.

Wykazaliśmy, że:

$$\text{jeżeli } y \in f(A \cap B) \text{ to } y \in f(A) \cap f(B).$$

Oznacza to, że $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Uwaga. Symbolu $\subset$ nie można zastąpić symbolem $=$.

Na przykład przyjmując $f: R \rightarrow R$, $f(x) = |x|$,

$A = \{1\}$, $B = \{-1\}$ otrzymujemy: $f(A) = f(B) = \{1\}$, natomiast $A \cap B = \emptyset$, więc $f(A \cap B) = \emptyset$.

- c) Jeżeli $y \in f(A) \setminus f(B)$ to $y \in f(A)$ i $y \notin f(B)$. Ponieważ $y \in f(A)$, więc istnieje taki $x \in A$, że $y = f(x)$. Gdyby $x \in B$, to byłoby: $y = f(x) \in f(B)$, więc $x \notin B$. Mamy: $x \in A$ i $x \notin B$, tzn. $x \in A \setminus B$. Ponieważ $y = f(x)$, więc $y \in f(A \setminus B)$.

Wykazaliśmy, że:

$$\text{jeżeli } y \in f(A) \setminus f(B) \text{ to } y \in f(A \setminus B).$$

Oznacza to, że $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.

Uwaga. Symbolu $\subset$ nie można zastąpić symbolem $=$.

Na przykład przyjmując $f: R \rightarrow R$, $f(x) = |x|$,

$A = \{-1, 1\}$, $B = \{1\}$ otrzymujemy: $f(A) = f(B) = \{1\}$,

$f(A) \setminus f(B) = \emptyset$, natomiast $A \setminus B = \{-1\}$, więc $f(A \setminus B) = \{1\} \neq \emptyset$.

Zadanie 14*

$$a) [x \in f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(G) \vee x \in f^{-1}(H)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\bigvee_{y \in G} y = f(x) \vee \bigvee_{y \in H} y = f(x) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{y \in G \cup H} y = f(x) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(G \cup H)$$

- b), c) – wzorować się na dowodzie a).

Rozdział 10

Uogólnione działania na zbiorach

Indeksowana rodzina zbiorów. Niech T będzie zbiorem niepustym, zaś f – funkcją, która każdemu elementowi zbioru T przyporządkowuje pewien zbiór A_t . Zbiór $f(T)$ nazywamy wówczas *indeksowaną rodziną zbiorów* i oznaczamy

$$\{A_t\}_{t \in T}$$

Zbiór T nazywamy *zbiorem indeksów*, a elementy tego zbioru nazywamy *indeksami*.

Przykład 1

Niech $T = \{1, 4, 6, 7\}$ i niech $f(t) = A_t = \{t; t+1\}$.

Liczy 1, 4, 6, 7 to indeksy. Indeksowaną rodzinę zbiorów stanowią cztery przedziały:

$$A_1 = (1; 2), \quad A_2 = (4; 5), \quad A_3 = (6; 7), \quad A_4 = (7; 8)$$

Przykład 2

Niech $T = N$ i niech $f(t) = A_t = \{-t, 0, t\}$.

Liczy naturalne to indeksy. Indeksowaną rodzinę zbiorów stanowią zbiory:

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad A_2 = \{-2, 0, 2\}, \quad A_3 = \{-3, 0, 3\}, \dots$$

Przykład 3

Niech $T = (0; 1)$ i niech $A_t = (t; 2t)$.

Liczy z przedziału $(0; 1)$ to indeksy. Indeksowaną rodzinę zbiorów stanowią przedziały. Oto kilka z nich:

$$A_{1/2} = \left(\frac{1}{2}; 1\right), \quad A_{3/4} = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right), \quad A_{0,99} = (0,99; 1,98), \dots$$

Uogólniony iloczyn zbiorów. Niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. *Uogólnionym iloczynem* zbiorów rodziny

$\{A_t\}_{t \in T}$ nazywamy zbiór tych elementów, które należą do każdego ze zbiorów tej rodziny. Iloczyn ten oznaczamy symbolem:

$$\bigcap_{t \in T} A_t$$

Zatem:

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x : \bigwedge_{t \in T} x \in A_t\}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy zbiór T jest dwuelementowy otrzymujemy definicję iloczynu dwóch zbiorów (zob. rozdz. „Zbiory” s.43).

Przykład 4

Niech $T = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_t = \{t-2, t-1, t, t+1, t+2\}$.

Rodzina $\{A_t\}_{t \in T}$ składa się z czterech zbiorów:

$$A_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A_4 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Do każdego ze zbiorów tej rodziny należą liczby 2 i 3. Za-

tem: $\bigcap_{t \in T} A_t = \{2, 3\}$.

Przykład 5

$$\text{Niech } T = \langle 0; 2 \rangle, \quad A_t = \left(\frac{1}{2}t; \infty\right).$$

Elementami rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ są przedziały otwarte. Oto kilka z nich:

$$A_0 = (0; \infty), \quad A_1 = (0,5; \infty), \quad A_{1,4} = (0,7; \infty), \dots, \quad A_2 = (1; \infty).$$

Do każdego z tych przedziałów należą tylko te liczby, które są większe od 1. Zatem: $\bigcap_{t \in T} A_t = (1; \infty)$.

Uogólniona suma zbiorów. Niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. *Uogólnioną sumą* zbiorów rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ nazywamy zbiór tych elementów, które należą co najmniej do jednego ze zbiorów tej rodziny. Sumę tę oznaczamy symbolem:

$$\bigcup_{t \in T} A_t$$

Zatem:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x : \exists t \in T, x \in A_t\}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy zbiór T jest dwuelementowy otrzymujemy definicję sumy dwóch zbiorów (zob. rozdz. „Zbiory” s.43).

Przykład 6

Niech $T = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_t = \{t - 2, t - 1, t, t + 1, t + 2\}$.

Jest to rodzina z przykładu 4. Do przynajmniej jednego ze zbiorów tej rodziny należą liczby $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ i 6 . Za-

tem: $\bigcup_{t \in T} A_t = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przykład 7

Niech $T = \langle 0; 2 \rangle$, $A_t = \left(\frac{1}{2}t; \infty\right)$.

Jest to rodzina z przykładu 5. Do przynajmniej jednego ze zbiorów tej rodziny należą tylko te liczby, które są większe od 0. Zatem: $\bigcup_{t \in T} A_t = (0; \infty)$.

Przypadki szczególne.

(1) Jeżeli $T = N$ to zamiast pisać $\bigcap_{t \in N} A_t$ oraz $\bigcup_{t \in N} A_t$ często pi-

szemy: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) Jeżeli T jest zbiorem kolejnych liczb całkowitych od liczby k do liczby l to zamiast pisać $\bigcap_{t \in T} A_t$ oraz $\bigcup_{t \in T} A_t$ często pi-

szemy: $\bigcap_{n=k}^l A_n$ oraz $\bigcup_{n=k}^l A_n$.

(3) Jeżeli zbiór indeksów T jest znany i ustalony, to zamiast pisać $\bigcap_{t \in T} A_t$ oraz $\bigcup_{t \in T} A_t$ często piszemy: $\bigcap_t A_t$ oraz $\bigcup_t A_t$.

Zadania

Zadanie 1

Znaleźć $\bigcap_{t \in T} A_t$ i $\bigcup_{t \in T} A_t$ gdy

- $T = \{2, 3, 5\}$, $A_t = \langle t - 2; t + 3 \rangle$
- $T = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_t = \{-t, 0, t\}$
- $T = \{12, 18, 21\}$, A_t – zbiór dzielników liczby t
- $T = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_t = R \setminus \{t\}$
- $T = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_t = R \setminus (t; t + 1)$
- $T = \{1, 2, 3\}$, $A_t = R \setminus (-t; t)$

Zadanie 2

Znaleźć $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gdy

- $A_n = \langle 0; 1/n \rangle$
- $A_n = \langle -1/n; 1/n \rangle$
- $A_n = \langle 0; 1 + 1/n \rangle$
- $A_n = (n; \infty)$
- $A_n = R \setminus \langle 0; 1/n \rangle$
- $A_n = R \setminus \langle -1/n; 1/n \rangle$
- $A_n = R \setminus \langle 0; 1 + 1/n \rangle$
- $A_n = R \setminus (n; \infty)$

Zadanie 3

Znaleźć $\bigcap_{t \in T} A_t$ i $\bigcup_{t \in T} A_t$ gdy $T = R$ oraz

- $A_t = \langle 0; \frac{1}{t^2 + 1} \rangle$
- $A_t = R \setminus \{t\}$
- $A_t = (-t; t)$
- $A_t = (t; \infty)$
- $A_t = \{1, t^2\}$
- A_t – zbiór prostych na płaszczyźnie Oxy przechodzących przez punkt $P = (t, t)$

Zadanie 4

Udowodnić, że dla dowolnych rodzin $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$:

- $\bigcap_t (A_t \cap B_t) = \bigcap_t A_t \cap \bigcap_t B_t$
- $\bigcup_t (A_t \cup B_t) = \bigcup_t A_t \cup \bigcup_t B_t$
- $\bigcup_t (A_t \cap B_t) \subset \bigcap_t A_t \cap \bigcup_t B_t$
- $\bigcap_t A_t \cup \bigcap_t B_t \subset \bigcap_t (A_t \cup B_t)$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

- $\bigcap_{t \in T} A_t = \langle 3; 5 \rangle, \quad \bigcup_{t \in T} A_t = \langle 0; 8 \rangle$
- $\bigcap_{t \in T} A_t = \{0\}, \quad \bigcup_{t \in T} A_t = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- $\bigcap_{t \in T} A_t = \{1, 3\}, \quad \bigcup_{t \in T} A_t = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 18, 21\}$
- $\bigcap_{t \in T} A_t = R \setminus T, \quad \bigcup_{t \in T} A_t = R$
- $\bigcap_{t \in T} A_t = R \setminus (0; 4), \quad \bigcup_{t \in T} A_t = R$
- $\bigcap_{t \in T} A_t = R \setminus (-3; 3), \quad \bigcup_{t \in T} A_t = R \setminus (-1; 1)$

Zadanie 2

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 0; 1 \rangle$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle -1; 1 \rangle$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 0; 1 \rangle, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 0; 2 \rangle$

$$d) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (1; \infty)$$

$$e) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \langle 0; 1 \rangle, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \{0\}$$

$$f) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \langle -1; 1 \rangle, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \{0\}$$

$$g) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \langle 0; 2 \rangle, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = R \setminus \langle 0; 1 \rangle$$

$$h) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty; 1), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = R$$

Zadanie 3

$$a) \bigcap_t A_t = \{0\}, \quad \bigcup_t A_t = \langle 0; 1 \rangle$$

$$b) \bigcap_t A_t = \emptyset, \quad \bigcup_t A_t = R$$

$$c) \bigcap_t A_t = \{0\}, \quad \bigcup_t A_t = R$$

$$d) \bigcap_t A_t = \emptyset, \quad \bigcup_t A_t = R$$

$$e) \bigcap_{t \in T} A_t = \{1\}, \quad \bigcup_{t \in T} A_t = \langle 0; \infty \rangle$$

f) $\bigcap_t A_t$ to zbiór jednoelementowy, którego elementem jest

prosta o równaniu $y = x$. $\bigcup_t A_t$ to zbiór składający się

z prostej o równaniu $y = x$ oraz wszystkich prostych przecinających prostą $y = x$.

Zadanie 4

$$a) x \in \bigcap_t (A_t \cap B_t) \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} x \in A_t \cap B_t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} (x \in A_t \wedge x \in B_t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\bigwedge_{t \in T} x \in A_t \wedge \bigwedge_{t \in T} x \in B_t \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \bigcap_t A_t \wedge x \in \bigcap_t B_t \right) \Leftrightarrow x \in \bigcap_t A_t \cap \bigcap_t B_t$$

b) Wzorować się na dowodzie a)

c) Jeżeli $x \in \bigcup_t (A_t \cap B_t)$ to istnieje taki indeks t , że

$x \in A_t \cap B_t$, tzn. $x \in A_t \wedge x \in B_t$. Zatem:

$x \in \bigcup_t A_t \wedge x \in \bigcup_t B_t$. Stąd: $x \in \bigcup_t A_t \cap \bigcup_t B_t$.

Pokazaliśmy, że jeżeli $x \in \bigcup_t (A_t \cap B_t)$ to

$x \in \bigcup_t A_t \cap \bigcup_t B_t$, więc $\bigcup_t (A_t \cap B_t) \subset \bigcup_t A_t \cap \bigcup_t B_t$.

d) Wzorować się na dowodzie c)

Rozdział 11

Moc zbioru

Równoliczność zbiorów. Zbiór X nazywamy zbiorem *równolicznym* ze zbiorem Y gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X \rightarrow Y$.

Jeżeli zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y , to piszemy:

$$X \sim Y$$

Przykład 1

Zbiór $X = \{a, b, c\}$ jest równoliczny ze zbiorem $Y = \{1, 2, 3\}$, gdyż np. funkcja $f: X \rightarrow Y$ określona następująco:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3$$

jest wzajemnie jednoznaczna. ($W_f = Y$ i f jest różnowartościowa).

Przykład 2

Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych nieparzystych zaś Y – zbiorem liczb naturalnych parzystych. Zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y . Wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest np. funkcja określona wzorem $f(x) = x + 1$.

Przykład 3

Przedział $X = (0; 1)$ jest równoliczny z przedziałem $Y = (0; 2)$. Wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest np. funkcja określona wzorem $f(x) = 2x$.

Własności równoliczności zbiorów. Dla dowolnych zbiorów X, Y, V :

- | | |
|---|---------------|
| (1) $X \sim X$ | zwrotność |
| (2) $(X \sim Y) \Rightarrow (Y \sim X)$ | symetryczność |
| (3) $[(X \sim Y) \wedge (Y \sim V)] \Rightarrow (X \sim V)$ | przechodność |

Dowód (1): Funkcja $f: X \rightarrow X$ określona wzorem $f(x) = x$ jest wzajemnie jednoznaczna dla dowolnego zbioru X .

Uwaga. Powyższą funkcję nazywamy *przekształceniem identycznościowym* zbioru X i oznaczamy: Id_X .

Dowód (2): Jeżeli $X \sim Y$, to istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X \rightarrow Y$. Z twierdzenia 2 rozdz. „Funkcje” wynika, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}: Y \rightarrow X$, która jest wzajemnie jednoznaczna. Oznacza to, że $Y \sim X$.

Dowód (3): Jeżeli $X \sim Y$ i $Y \sim V$, to istnieją wzajemnie jednoznaczne funkcje $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow V$. Z twierdzenia 5 rozdz. „Funkcje” wynika, że złożenie tych funkcji $g \circ f: X \rightarrow V$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczna. Oznacza to, że $X \sim V$.

Uwaga. Ze względu na własność (2) możemy mówić: „zbiory X i Y są równoliczne” zamiast „zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y ”.

Moc zbioru. Każdemu zbiorowi przyporządkujemy obiekt zwany *liczbą kardynalną* albo *mocą* tego zbioru w ten sposób, że zbiorom równolicznym przyporządkujemy tę samą liczbę kardynalną.

Moc zbioru X będziemy oznaczać symbolem $\overline{X}$.

Jeżeli zbiór X jest skończony, to za moc tego zbioru będziemy uważać liczbę jego elementów, np. zbiór $X = \{a, b, c\}$ ma moc równą 3, co zapiszemy: $\overline{X} = 3$. Moc zbioru pustego jest równa 0. Moc zbioru liczb naturalnych N oznaczmy symbolem $\aleph_0$ (czytaj: alef zero). Zatem:

$$\overline{N} = \aleph_0$$

Ponieważ zbiorom równolicznym przyporządkowujemy tę samą liczbę kardynalną, więc wszystkie zbiory równoliczne ze zbiorem N też mają moc $\aleph_0$.

Moc zbioru liczb rzeczywistych R oznaczmy symbolem $\mathfrak{c}$ (czytaj: kontinuum). Zatem:

$$\overline{R} = \mathfrak{c}$$

Wszystkie zbiory równoliczne ze zbiorem R też mają moc $\mathfrak{c}$.

Można wykazać, że zbiór N nie jest równoliczny ze zbiorem R . Oznacza to, że liczby kardynalne $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ są różnymi liczbami.

Przypomnijmy, że dotychczas wprowadziliśmy następujące liczby kardynalne:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$$

Przykład 4

Pokażemy, że zbiór liczb parzystych P ma moc $\aleph_0$.

Musimy wykazać, że zbiory N i P są równoliczne.

Funkcja $f: N \rightarrow P$ określona wzorem $f(x) = 2x$ jest wzajemnie jednoznaczna (sprawdź!), zatem $N \sim P$.

Przykład 5

Pokażemy, że zbiór liczb całkowitych Z ma moc $\aleph_0$. Musimy wykazać, że zbiory N i Z są równoliczne.

Funkcja $f: N \rightarrow Z$ określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{2} & \text{gdy } x \text{ jest nieparzysta} \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{gdy } x \text{ jest parzysta} \end{cases}$$

jest wzajemnie jednoznaczna (sprawdź!), zatem $N \sim Z$. Inaczej mówiąc: $\overline{Z} = \aleph_0$.

Uwaga. Powyższą funkcję można przedstawić graficznie:

$$\begin{array}{cccccccc} N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \dots \} \\ f: \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Z = \{ & -1, & 0, & -2, & 1, & -3, & 2, & -4, \dots \} \end{array}$$

Przykład 6

Pokażemy, że zbiór liczb wymiernych dodatnich Q_+ ma moc $\aleph_0$. Musimy wykazać, że zbiory N i Q_+ są równoliczne.

Wypiszmy wszystkie liczby wymierne dodatnie w następującej kolejności:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

Przyjęto przy tym następujące reguły:

- liczba o mianowniku mniejszym występuje wcześniej niż liczba o mianowniku większym,
- w przypadku gdy mianowniki są równe wcześniej wypisano liczbę o mniejszym liczniku,
- nie powtarzano liczb równych (np. pominięto $\frac{2}{2}$, bo wcześniej występuje $\frac{1}{1}$, pominięto $\frac{2}{4}$ bo wcześniej występuje $\frac{1}{2}$ itd.)

Określamy funkcję $f: N \rightarrow Q_+$: $f(x)$ jest liczbą wymierną, która w wypisanym ciągu znajduje się na pozycji nr x (np. $f(3) = \frac{1}{3}$, $f(7) = \frac{1}{5}$, $f(8) = \frac{2}{5}$ itd.). Funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna, zatem $N \sim Q_+$, czyli $\overline{Q_+} = \aleph_0$.

Przykład 7

Pokażemy, że przedział $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ma moc $\mathfrak{c}$.

Musimy wykazać, że ten przedział jest równoliczny ze zbiorem R .

Funkcja $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ określona wzorem $f(x) = \tan x$

jest wzajemnie jednoznaczna (sprawdź!), zatem zbiory te są równoliczne.

Przykład 8

Pokażemy, że dowolny przedział postaci $(-a; a)$ gdzie $a > 0$ ma moc $\mathfrak{c}$.

Najpierw wykazemy, że dowolny przedział postaci $(-a; a)$ jest równoliczny z przedziałem $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcja $f: (-a; a) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ określona wzorem

$f(x) = \frac{\pi}{2a} \cdot x$ jest wzajemnie jednoznaczna (sprawdź!), zatem te przedziały są równoliczne. Równoliczność zbiorów

jest przechodnia, więc z tego, że $(-a; a) \sim \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

i $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \sim R$ (zob. przykład 7), wynika, że $(-a; a) \sim R$,

zatem moc przedziału $(-a; a)$ jest równa $\mathfrak{c}$.

Zbiory przeliczalne. Zbiór, którego moc jest równa $\aleph_0$ nazywamy zbiorem *przeliczalnym*.

Uwaga. W niektórych podręcznikach zbiorami przeliczalnymi są nazywane także zbiory skończone.

Z wcześniejszych przykładów wynika, że zbiory N , Z , Q_+ są zbiorami przeliczalnymi.

Zbiory przeliczalne mają następujące własności:

- (1) Każdy podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym.
- (2) Suma zbioru skończonego i zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.
- (3) Suma skończenie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.
- (4) Suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.
- (5) Część wspólna dowolnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym.
- (6) Iloczyn kartezjański skończenie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

- (7) Różnica zbioru przeliczalnego i zbioru skończonego jest zbiorem przeliczalnym.

Powyższe własności są pomocne przy wykazywaniu przeliczalności wielu zbiorów.

Przykład 9

Wykażemy, że zbiór liczb wymiernych Q jest zbiorem przeliczalnym.

Zauważmy, że $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$. Zbiory Q_+ i Q_- są równoliczne (rozważ funkcję $f(x) = -x$). W przykładzie 6 wykazaliśmy, że zbiór Q_+ jest przeliczalny. Z własności (3) wynika, że zbiór $Q_+ \cup Q_-$ jest przeliczalny. Z własności (2) wynika, że suma tego zbioru i zbioru jednoelementowego $\{0\}$ też jest zbiorem przeliczalnym.

Przykład 10

Zbiór punktów w układzie współrzędnych Oxy o obu współrzędnych całkowitych jest zbiorem przeliczalnym. Wynika to z faktu, że zbiór liczb całkowitych Z jest przeliczalny (przykład 5) i z własności (6).

Zbiory nieprzeliczone. Zbiór, który nie jest ani skończony ani przeliczalny nazywamy **zbiorem nieprzelicznym**.

Wszystkie zbiory mocy c są nieprzeliczne. Z poprzednich przykładów wynika, że dowolny przedział otwarty oraz zbiór R to zbiory nieprzeliczne.

Zbiory nieprzeliczne mają następujące własności:

- (8) Jeżeli A jest zbiorem nieprzelicznym i $A \subset B$ to zbiór B jest nieprzeliczny.
- (9) Suma zbioru nieprzelicznego i dowolnego zbioru jest zbiorem nieprzelicznym (jest to wniosek z (7)).
- (10) Iloczyn kartezjański zbioru nieprzelicznego i dowolnego zbioru niepustego jest zbiorem nieprzelicznym.
- (11) Różnica zbioru nieprzelicznego i zbioru skończonego jest zbiorem nieprzelicznym.
- (12) Różnica zbioru nieprzelicznego i zbioru przeliczalnego jest zbiorem nieprzelicznym.

Przykład 11

Zbiór liczb niewymiernych jest zbiorem nieprzelicznym. Wynika to z tego, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczny, zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny (przykład 9), a zbiór liczb niewymiernych jest różnicą tych zbiorów (zastosowano własność (12)).

Nierówności dla liczb kardynalnych. Niech m i n będą liczbami kardynalnymi.

Mówimy, że liczba kardynalna n jest większa lub równa m (piszemy: $m \leq n$) gdy istnieją zbiory A i B takie, że:

$$A \subset B \wedge \bar{A} = m \wedge \bar{B} = n$$

Mówimy, że liczba kardynalna n jest większa od m (piszemy: $m < n$) gdy $m \leq n$ i $m \neq n$.

Z wcześniejszych rozważań i z powyższej definicji wynika, że np.:

$$3 < 5, \quad 5 < \aleph_0, \quad 5 < c, \quad \aleph_0 < c$$

Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, p prawdziwe są następujące związki:

- (1) $m \leq m$
- (2) $(m \leq n \wedge n \leq p) \Rightarrow m \leq p$
- (3) $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$ (tw. Cantora-Bernsteina)
- (4) $m < n \vee n < m \vee m = n$
- (5) Nie istnieje zbiór nieskończony, którego moc jest mniejsza od $\aleph_0$

Hipoteza continuum. Przez wiele lat pozostawało nierozstrzygnięte następujące zagadnienie: czy istnieje taka liczba kardynalna m , że $\aleph_0 < m < c$? Hipotezę, że taka liczba kardynalna nie istnieje nazwano **hipotezą continuum**. W 1940 roku ukazała się praca austriackiego matematyka Kurta Gödla, w której autor udowodnił, że hipoteza continuum jest niesprzeczna z przyjętymi aksjomatami teorii mnogości (aksjomatami teorii mnogości będzie poświęcony rozdział 13). W 1963 roku P. J. Cohen udowodnił nie-

zależność hipotezy continuum od przyjętych aksjomatów teorii mnogości. Oznacza to, że jeżeli chcemy tę hipotezę uznać za prawdziwą, musimy uznać ją za nowy aksjomat.

Zbiór potęgowy. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X nazywamy zbiorem potęgowym zbioru X i oznaczamy symbolem $P(X)$.

Przykład 12

Niech $X = \{a, b\}$. Wówczas:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Przykład 13

Niech $X = \{a, b, c\}$. Wówczas:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Można udowodnić, że dla dowolnego zbioru X :

(1) Jeżeli zbiór X jest skończony i ma n elementów, to zbiór

$P(X)$ ma 2^n elementów.

(2) $\overline{X} < \overline{P(X)}$ (twierdzenie Cantora)

(3) $\overline{P(N)} = \mathfrak{c}$

Z twierdzenia Cantora wynika, że *istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych*, gdyż każdy ze zbiorów:

$$N, P(N), P(P(N)), P(P(P(N))), \dots$$

ma inną moc.

Innym wnioskiem z twierdzenia Cantora jest to, że *nie istnieje największa liczba kardynalna* (gdyby taka liczba istniała, to byłaby mocą pewnego zbioru X . Z tw. Cantora wynika, że moc zbioru $P(X)$ jest większa).

Kolejny wniosek z tw. Cantora brzmi: „*Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów*”. Załóżmy bowiem, że X jest zbiorem wszystkich zbiorów. Wtedy $P(X) \subset X$, więc $\overline{P(X)} \leq \overline{X}$, co jest sprzeczne z tw. Cantora.

Uogólniona hipoteza continuum jest to następujące zagadnienie: czy istnieje taki zbiór nieskończony X i taka liczba kardynalna $\mathfrak{m}$, że:

$$\overline{X} < \mathfrak{m} < \overline{P(X)}$$

Zauważmy, że hipoteza continuum to szczególny przypadek tej hipotezy – wystarczy ustalić $X = N$.

Podobnie jak w przypadku hipotezy continuum uogólniona hipoteza continuum jest niesprzeczna z przyjętymi aksjomatami teorii mnogości. Jest ona również niezależna od przyjętych aksjomatów teorii mnogości.

Działania na liczbach kardynalnych. Dla liczb kardynalnych można wprowadzić działania dodawania i mnożenia tych liczb. Jeżeli zbiór X ma moc $\mathfrak{m}$, a zbiór Y ma moc $\mathfrak{n}$ i $X \cap Y = \emptyset$, to:

- sumą $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ nazywamy moc zbioru $X \cup Y$,

- iloczynem $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ nazywamy moc zbioru $X \times Y$.

Z definicji tej wynika np., że:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

Więcej informacji o arytmetyce liczb kardynalnych można znaleźć w podręczniku Heleny Rasiowej „Wstęp do matematyki współczesnej”.

Rozdział 12

Typy porządkowe

Podobieństwo zbiorów liniowo uporządkowanych. Niech będą dane dwa zbiory X_1 i X_2 liniowo uporządkowane przez relacje $\prec_1$ i $\prec_2$. Będziemy mówić krótko: zbiory $(X_1, \prec_1)$ i $(X_2, \prec_2)$. Zbiory $(X_1, \prec_1)$ i $(X_2, \prec_2)$ nazywamy *podobnymi* gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X_1 \rightarrow X_2$ taka, że:

$$\bigwedge_{a \in X_1} \bigwedge_{b \in X_1} [a \prec_1 b \Leftrightarrow f(a) \prec_2 f(b)]$$

Podobieństwo zbiorów $(X_1, \prec_1)$ i $(X_2, \prec_2)$ zapisujemy:
 $(X_1, \prec_1) \cong (X_2, \prec_2)$

Przykład 1

Niech X_1 będzie zbiorem liczb naturalnych, X_2 - zbiorem liczb parzystych, zaś relacje $\prec_1$ i $\prec_2$ niech będą relacjami niewiększości $\leq$.

Zbiory $(X_1, \prec_1)$ i $(X_2, \prec_2)$ są podobne, gdyż funkcja $f: X_1 \rightarrow X_2$ określona wzorem $f(x) = 2x$ jest wzajemnie jednoznaczna i spełnia warunek:

$$\bigwedge_{a \in X_1} \bigwedge_{b \in X_1} (a < b \Leftrightarrow 2a < 2b)$$

Własności podobieństwa zbiorów. Dla dowolnych zbiorów liniowo uporządkowanych $(X_1, \prec_1)$, $(X_2, \prec_2)$ i $(X_3, \prec_3)$:

- (1) $(X_1, \prec_1) \cong (X_1, \prec_1)$
- (2) $[(X_1, \prec_1) \cong (X_2, \prec_2)] \Rightarrow [(X_2, \prec_2) \cong (X_1, \prec_1)]$
- (3) $[(X_1, \prec_1) \cong (X_2, \prec_2)] \wedge [(X_2, \prec_2) \cong (X_3, \prec_3)] \Rightarrow [(X_1, \prec_1) \cong (X_3, \prec_3)]$

Podobieństwo zbiorów liniowo uporządkowanych jest więc zwrotne, symetryczne i przechodnie. Własności te umożliwiają

dokonanie klasyfikacji zbiorów liniowo uporządkowanych w podobny sposób, jak pojęcie równoliczności zbiorów umożliwiło wprowadzenie liczb kardynalnych.

Typ porządkowy. Każdemu zbiorowi liniowo uporządkowanemu przyporządkujemy obiekt zwany *typem porządkowym* tego zbioru w ten sposób, że zbiorom podobnym przyporządkujemy ten sam typ porządkowy. Typ porządkowy zbioru $(X, \prec)$ będziemy oznaczać symbolem $\overline{(X, \prec)}$.

Jeżeli zbiór X jest skończony, to za typ porządkowy tego zbioru będziemy uważać liczbę jego elementów, np. zbiór $X = \{a, b, c\}$ z relacją porządku: $a < b, a < c, b < c$ ma typ porządkowy 3, co zapiszemy: $(\{a, b, c\}, \prec) = 3$. Typ porządkowy zbioru pustego jest równy 0.

Typ porządkowy zbioru liczb naturalnych N z relacją $\leq$ oznaczmy symbolem ω (czytaj: omega). Zatem:

$$\overline{(N, \leq)} = \omega$$

Typ porządkowy zbioru liczb całkowitych ujemnych Z_- z relacją $\leq$ oznaczmy symbolem ω^* . Zatem:

$$\overline{(Z_-, \leq)} = \omega^*$$

Typ porządkowy zbioru liczb wymiernych Q z relacją $\leq$ oznaczmy symbolem η (czytaj: eta). Zatem:

$$\overline{(Q, \leq)} = \eta$$

Typ porządkowy zbioru liczb rzeczywistych R z relacją $\leq$ oznaczmy symbolem λ (czytaj: lambda). Zatem:

$$\overline{(R, \leq)} = \lambda$$

Twierdzenia o typach porządkowych.

- (1) Wśród typów porządkowych: ω , ω^* , η , λ nie ma dwóch typów równych.
- (2) Każdy zbiór o typie porządkowym ω jest przeliczalny, ma element najmniejszy i nie ma elementu największego.
- (3) Każdy zbiór o typie porządkowym ω^* jest przeliczalny, ma element największy i nie ma elementu najmniejszego.

- (4) Każdy zbiór o typie porządkowym η jest przeliczalny, nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego.
- (5) Każdy zbiór o typie porządkowym λ ma moc continuum, nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego.

Liczby porządkowe. W określeniu typu porządkowego zakładaliśmy, że dany zbiór jest uporządkowany liniowo. Jeżeli ponadto dany zbiór jest dobrze uporządkowany, to jego typ porządkowy nazywamy *liczbą porządkową*. Zatem:

Liczba porządkowa jest to typ porządkowy zbioru dobrze uporządkowanego.

Wśród liczb porządkowych można wprowadzić relację umożliwiającą porównywanie tych liczb, tak by była to relacja dobrego porządku. Można także określić dodawanie i mnożenie tych liczb. Więcej informacji o arytmetyce liczb porządkowych można znaleźć w podręczniku Heleny Rasiowej „Wstęp do matematyki współczesnej”.

Rozdział 13

Aksjomaty teorii mnogości

Pojęcia pierwotne. Przypomnijmy, że pojęciami pierwotnymi w teorii mnogości (czyli pojęciami używanymi bez podawania ich definicji) są „zbiór” i „element zbioru”.

Aksjomaty Zermelo-Fraenkla. Pierwszy system aksjomatów dla teorii mnogości podał E. Zermelo na początku XX wieku. Do tego systemu pewne modyfikacje wprowadził A. Fraenkel. Oto te aksjomaty:

A1. (aksjomat ekstensjonalności)

Dwa zbiory są identyczne, gdy mają te same elementy.

A2. (aksjomat zbioru pustego)

Istnieje zbiór, który nie zawiera żadnego elementu.

A3. (aksjomat sumy)

Dla dowolnej rodziny zbiorów istnieje zbiór składający się ze wszystkich tych elementów, które są elementami przynajmniej jednego ze zbiorów tej rodziny.

A4. (aksjomat zbioru potęgowego)

Dla każdego zbioru istnieje zbiór składający się ze wszystkich podzbiorów danego zbioru.

A5. (aksjomat nieskończoności)

Istnieje zbiór nieskończony.

A6. (aksjomat zastępowania)

Jeżeli każdy element zbioru zastąpimy dowolnym obiektem, to otrzymamy znów pewien zbiór.

Teorię mnogości opartą o aksjomaty A1-A6 oznaczamy zazwyczaj przez **ZF** (od pierwszych liter nazwisk twórców tych aksjo-

matów). Matematycy tworzą różne wersje teorii ZF uzupełnianej o dodatkowe aksjomaty. Przykładowo:

- *teoria ZF z indywiduami* to teoria oparta na aksjomatach A1-A6 z dołączonym aksjomatem A7: „Istnieją obiekty nie będące zbiorami”.
- *teoria ZF bez indywiduów* to teoria oparta na aksjomatach A1-A6 z dołączonym aksjomatem A7: „Każdy obiekt jest zbiorem”.

Pewnik wyboru. Do teorii ZF dołączany jest zazwyczaj aksjomat zwany *pewnikiem wyboru*:

Dla każdej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje taki zbiór, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym ze zbiorów tej rodziny.

Wprowadzenie pewnika wyboru do zestawu aksjomatów wywołało wiele kontrowersji. Z jednej strony pewnik wyboru umożliwia przeprowadzenie dowodów wielu twierdzeń (argument „za”), z drugiej strony przyjęcie pewnika wyboru prowadzi do tzw. paradoksów (argument „przeciw”), np. polscy matematycy Stefan Banach i Alfred Tarski korzystając z pewnika wyboru udowodnili, że każdą kulę można podzielić na 5 części, z których można utworzyć dwie kule identyczne z kulą wyjściową.

Powstało przypuszczenie, że – być może – pewnik wyboru można udowodnić korzystając z teorii ZF. Okazało się to niemożliwe. Polscy matematycy A. Lindenbaum i A. Mostowski wykazali, że jest to niemożliwe w teorii ZF z indywiduami, zaś P. J. Cohen udowodnił to samo dla teorii ZF bez indywiduów.

Wysuwano też hipotezę, że – być może – uda się wykazać nieprawdziwość pewnika wyboru (w teorii ZF). Okazało się, że nie można wykazać nieprawdziwości pewnika wyboru na gruncie teorii ZF. Udowodnił to K. Gödel w 1940 roku.

Pewnik wyboru okazał się niezależny od aksjomatów teorii ZF.

Teoria ZF uzupełniona o pewnik wyboru jest nazywana *teorią ZFC* (ang. choice – wybór). Zdecydowana większość matematyków przyjęła pewnik wyboru jako aksjomat.

Z poprzedniego rozdziału wiadomo, że podobna sytuacja (czyli niezależność od aksjomatów ZF) dotyczy hipotezy continuum, którą także można uznać za nowy aksjomat. Polski matematyk Wacław Sierpiński udowodnił, że jeżeli aksjomaty ZF uzupełniły o hipotezę continuum, to z tak rozszerzonego zestawu aksjomatów można udowodnić pewnik wyboru.

Rozdział 14

Teorie formalne

Antynomia Russella. Rozważmy zbiór X złożony z tych zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Dowolny zbiór A jest więc elementem zbioru X wtedy i tylko wtedy gdy A nie jest elementem A . Zagadnienie: czy X jest elementem X ? Jeżeli jest, to z definicji zbioru X wynika, że X nie jest elementem X . Otrzymujemy sprzeczność.

Opisany powyżej paradoks nosi nazwę *antynomii Russella* i został odkryty w 1903 roku. Antynomia Russella jest konsekwencją niezdefiniowania pojęcia zbioru. Odkrycie tej antynomii zachwiało wiarę w poprawność rozumowań intuicyjnych i spowodowało konieczność wprowadzenia jeszcze większej ścisłości przy konstruowaniu teorii matematycznych. Uściśleniem teorii aksjomatycznych stały się *teorie formalne*.

Formalizacja języka teorii. W teoriach formalnych zastępujemy język potoczny *językiem sformalizowanym*. W tym celu najpierw ustalamy zestaw symboli zwanych *znakami pierwotnymi*. Następnie wprowadzamy reguły pozwalające z tych symboli konstruować wyrażenia zwane *formułami teorii*.

Znaki pierwotne dzielimy na:

- *stałe specyficzne*, czyli symbole oznaczające wszystkie pojęcia pierwotne formalizowanej teorii,
- *zmiennie indywidualne*, czyli symbole oznaczające przedmioty (indywidua), którymi zajmuje się teoria,
- *zmiennie wyższych typów*, czyli obiekty utworzone za pomocą zmiennych indywidualnych (np. zbiory takich zmiennych).

Teoria, w której nie wprowadzamy zmiennych wyższych typów nazywa się *teorią elementarną*. Arytmetykę liczb naturalnych można sformalizować tak, by była teorią elementarną.

Z wymienionych powyżej znaków pierwotnych tworzymy następnie *formuły atomowe* czyli najprostsze funkcje zdaniowe rozpatrywanej teorii (np. wyrażenia $(x + y) \cdot z$, $x < y + z$ itp. są formułami atomowymi sformalizowanej arytmetyki).

Do wcześniej omówionych znaków dołączamy spójniki logiczne i symbole kwantyfikatorów.

Z wyżej omówionych obiektów budujemy wszystkie formuły języka sformalizowanego danej teorii (także formuły odpowiadające aksjomatom).

Aparat logiczny teorii. Następnym etapem budowy teorii formalnej jest wybór aksjomatów logicznych i reguł dowodzenia, które razem tworzą *aparat logiczny teorii*.

Dowód formalny dowolnej formuły F rozpatrywanej teorii jest to skończony ciąg formuł tej teorii taki, że:

- każda formuła w tym ciągu jest albo aksjomatem tej teorii, albo aksjomatem logicznym, albo wnioskiem z wcześniejszych formuł otrzymanym przez zastosowanie reguł dowodzenia,
- ostatnim wyrazem ciągu formuł będącego dowodem jest formuła F .

Twierdzenie teorii sformalizowanej jest to formuła, dla której istnieje dowód formalny.

Teorie niesprzeczne. Teoria formalna jest *niesprzeczna* gdy nie istnieje taka formuła F w tej teorii, dla której można przeprowadzić dowód formalny tej formuły i formuły $\sim F$.

Matematyk niemiecki Dawid Hilbert w tzw. *programie Hilberta* (1904r) ogłosił zamiar zbudowania teorii sformalizowanej obejmującej całą matematykę. Program ten nie doczekał się realizacji. Kurt Gödel wykazał, że jest to niemożliwe. Wykazał on, że dowód niesprzeczności sformalizowanej teorii zawierającej arytmetykę liczb naturalnych można przeprowadzić tylko na gruncie teorii obszerniejszej od tej, której niesprzeczność chcemy udowodnić.

Teorie zupełne. Teoria formalna jest *zupełna* gdy dla każdej formuły F tej teorii będącej zdaniem istnieje dowód formalny albo formuły F , albo formuły $\sim F$. Teoria formalna, która powyższej własności nie ma nazywa się teorią niezupełną. Jeżeli teoria jest niezupełna, to istnieje w tej teorii taka formuła, że ani ta formuła ani jej nega-

cja nie jest twierdzeniem rozpatrywanej teorii. Taką formułę nazywamy **zdaniem nierozstrzygalnym** w tej teorii. Każda teoria formalna zawierająca arytmetykę liczb naturalnych (a więc także sama arytmetyka) jest niezupełna. Wykazał to Gödel w 1930 roku.

Teorie rozstrzygalne. Teoria formalna jest **rozstrzygalna** gdy istnieje metoda pozwalająca w skończonej liczbie kroków stwierdzić, czy dowolna formuła jest twierdzeniem tej teorii czy też nie jest twierdzeniem. W teoriach rozstrzygalnych badanie problemów daje się sprowadzić do realizowania określonych algorytmów. W teoriach nierozstrzygalnych badanie każdego zagadnienia wymaga pewnego pomysłu. Niestety, większość teorii matematycznych jest nierozstrzygalnych (nawet arytmetyka). Oznacza to, że współczesne komputery nie mogą zastąpić człowieka w poszukiwaniu dowodu dowolnej formuły tej teorii.

Skorowidz nazw

Aksjomat	27	formuły rachunku zdań	7
– ekstensjonalności	133	funkcja	93
– nieskończoności	133	– odwrotna	98
– sumy	133	– różnowartościowa	97
– zastępowania	133	– wzajemnie jednoznaczna	97
– zbioru potęgowego	133	– zdaniowa	12
– zbioru pustego	133	– złożona	101
aksjomaty Zermelo-Fraenkla	133	funktor zdaniotwórczy	8
alternatywa	8	– – dwuargumentowy	8
– wykluczająca	17	– – jednoargumentowy	8
antynomia Russella	136	H ipoteza continuum	127
aparatus logiczny teorii	137	I dentempotentność alternatywy	19
argument	94	identempotentność koniunkcji	19
C zęść wspólna zbiorów	42	iloczyn kartezyjski zbiorów	46
czynnik	8	– liczb kardynalnych	129
D efinicja	27	– zbiorów	42
dopełnienie zbioru	45	implikacja	8
dowód formalny	137	– odwrotna	33
– niewprost	32	– prosta	33
dylemat destrukcyjny	33	– przeciwna	33
– konstrukcyjny	33	– przeciwstawna	33
dziedzina funkcji	94	importacja	20
E ksportacja	20	indeksowana rodzina	
element maksymalny	82	zbiorów	114
– minimalny	82	J ęzyk sformalizowany	136
– najmniejszy	84	K lasa abstrakcji	74
– największy	83	– równoważności	74
– zbioru	38	koniunkcja	8
F alsz	7	konkluzja	27
formuła atomowa	136	kontrapozycja	19
– teorii	136	kwadrat logiczny	33

kwantyfikator duży	59	prawa Claviusa	19
– egzystencjalny	60	– de Morgana dla zdań	16
– mały	60	– de Morgana w rachunku	
– o ograniczonym zasięgu	61	kwantyfikatorów	63
– ogólny	59	– zaprzeczania w rachunku	
– szczegółowy	59	kwantyfikatorów	63
Lemat Kuratowskiego-Zorna	88	prawdziwość	7
liczba kardynalna	122	prawo Duns-Scotusa	19
– porządkowa	132	– kompozycji dla alternatywy	33
logika dwuwartościowa	7	– kompozycji dla koniunkcji	33
Łańcuch	86	– łączenia następników w	
koniunkcję	20		
alternatywę	20		
poprzedników w			
alternatywy	20		
– iloczynu zbiorów	43	– niesprzeczności	18
– koniunkcji	19	– Pierce'a	19
– sumy zbiorów	43	– podwójnego przeczenia	19
Moc zbioru	122	– symplifikacji	19
modus ponens	28	– wyłączonego środka	18
modus tollens	29	program Hilberta	137
Następnik	8	przechodniość implikacji	19
negacja	8	przeciwdziedzina funkcji	94
Obcięcie funkcji	102	przeciwobraz zbioru	
obraz elementu		w przekształceniu	96
w przekształceniu	94	przedłużenie funkcji	102
– zbioru w przekształceniu	96	przedział domknięty	40
odwzorowanie	94	– lewostronnie	40
okreslenie	27	– prawostronnie	41
Para uporządkowana	46	– nieograniczony	41
pewnik	27	– otwarty	40
– wyboru	134	przekształcenie	94
podzbiór	41	– identycznościowe	122
pojęcie pierwotne	27		
poprzednik	8		

przemienność alternatywy	19	różnica zbiorów	43
– iloczynu zbiorów	43	Schemat relacji porządku	84
– koniunkcji	19	składnik	8
– sumy zbiorów	43	spójniki logiczne	7
przesłanka	27	sprawdzian zerojedynkowy	15
przestrzeń	45	stała specyficzna	136
Reguła dowodzenia	28	suma liczb kardynalnych	129
– odrywania	28	– zbiorów	42
– wnioskowania	27	superpozycja funkcji	101
relacja	69	sylogizm alternatywny	31
– antysymetryczna	81	– hipotetyczny	30
– częściowego porządku	81	Tabela alternatywy	9
– dobrego porządku	87	– implikacji	9
– liniowego porządku	86	– koniunkcji	9
– porządku	81	– negacji	9
– przechodnia	72	– równoważności	10
– równoważności	73	– zerojedynkowa	8
– spójna	85	tautologia	15
– symetryczna	71	teoria elementarna	136
– zwrotna	71	– formalna	136
rozdzielność alternatywy		– mnogości	38
względem koniunkcji	19	– niesprzeczna	137
– iloczynu kartezjańskiego		– rozstrzygalna	138
względem części wspólnej	47	– ZF	133
– – – sumy zbiorów	47	– ZF bez indywiduów	134
– – zbiorów względem sumy		– ZF z indywiduami	134
zbiorów	43	– ZFC	134
– koniunkcji względem		– zupełna	137
alternatywy	19	tertium non datur	18
– sumy zbiorów względem		twierdzenie	27
iloczynu zbiorów	43	– Cantora	128
równość zbiorów	39	– Cantora-Bernsteina	127
równoważność	8	– teorii sformalizowanej	137

typ porządkowy	131	zdanie	7
Uogólniona hipoteza		– nierozstrzygalne	138
continuum	129	zmienna indywidualowa	136
– suma zbiorów	115	– swobodna	60
uogólniony iloczyn zbiorów	114	– zdaniowa	7
Wartość funkcji	94	– związana	60
– logiczna	7	znak pierwotny	136
wniosek	27		
wykres funkcji	103		
– zdaniowej 2-ch zmiennych	55		
– – jednej zmiennej	54		
– – n zmiennych	56		
Zakres zmienności	53		
zaprzeczenie	8		
zasada ekstensjonalności	39		
zbiory podobne	130		
– rozłączne	42		
– równoliczne	121		
zbiór	38		
– dobrze uporządkowany	87		
– indeksów	114		
– liczb całkowitych	39		
– – naturalnych	39		
– – niewymiernych	40		
– – rzeczywistych	40		
– – wymiernych	39		
– liniowo uporządkowany	86		
– nieprzeliczalny	126		
– potęgowy	128		
– przeliczalny	125		
– pusty	39		
– uporządkowany	82		
– wartości funkcji	94		

Książka jest przeznaczona dla studentów informatyki uczących się przedmiotu „logika i teoria mnogości”. Zakres książki jest zgodny ze standardami nauczania dla kierunku studiów „Informatyka”. W zakres dziesięciu początkowych rozdziałów wchodzi: zdania, tautologie, reguły dowodzenia, funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, zbiory, relacje (w tym relacje równoważności i relacje porządku) oraz funkcje. Każdy z tych rozdziałów zawiera krótkie omówienie teorii, rozwiązane przykłady ilustrujące teorię, zadania do samodzielnego rozwiązania i odpowiedzi do zadań. Ostatnie cztery rozdziały dotyczą zagadnień trudniejszych: mocy zbioru, typów porządkowych, aksjomatyki teorii mnogości oraz teorii formalnych. Te rozdziały zawierają jedynie krótkie streszczenie wiadomości związanych z omawianymi tematami. Czytelnik pragnący pogłębić swą wiedzę w tym zakresie powinien sięgnąć do obszerniejszych pozycji literatury.

Przykłady i zadania znajdujące się w książce nie wymagają od Czytelnika zaawansowanej wiedzy matematycznej. Książka została napisana z myślą o studentach, którzy nie będąc studentami wydziału matematyki, potrzebują poznać najważniejsze pojęcia z logiki i teorii mnogości, by móc zdobytą wiedzę stosować np. przy pisaniu programów komputerowych. Książka może być z powodzeniem wykorzystana w liceach profilowanych i ogólnokształcących, w klasach realizujących program nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym – w tym w klasach o profilu informatycznym.